1　幾何学 C (2011/04/20): 等質な集合 (1)

実行列の群

定義 1.1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **一般線型群** (**general linear group**) と呼ぶ. ここで $M_n(\mathbb{R})$ は $n \times n$ 実行列の全体を表す.

例 1.2. 以下は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群である:

(1) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ (**特殊線型群** (**special linear group**)),
(2) $\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n\}$ (**直交群** (**orthogonal group**)),
(3) $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n)$ (**特殊直交群** (**special orthogonal group**)),

命題 1.3. 次が成り立つ:

(1) $\mathrm{O}(n) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \langle gX, gY \rangle = \langle X, Y \rangle \ (\forall X, Y \in \mathbb{R}^n)\}$,
(2) $\mathrm{SO}(2) = \{R(\theta) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, ただしここで

$$R(\theta) := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

複素行列の群

定義 1.4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) := \{g \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **複素一般線型群** と呼ぶ. ここで $M_n(\mathbb{C})$ は $n \times n$ 複素行列の全体を表す.

例 1.5. 以下は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分群である:

(1) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det(g) = 1\}$ (**複素特殊線型群**),
(2) $\mathrm{U}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t \overline{g} g = I_n\}$ (**ユニタリ群** (**unitary group**)),
(3) $\mathrm{SU}(n) := \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(n)$ (**特殊ユニタリ群** (**special unitary group**)),

命題 1.6. 次が成り立つ:

(1) $\mathrm{U}(n) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \langle gX, gY \rangle = \langle X, Y \rangle \ (\forall X, Y \in \mathbb{C}^n)\}$,
(2) $\mathrm{U}(1) = \{(e^{i\theta}) \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$,
(3) $\mathrm{U}(1)$ と $\mathrm{SO}(2)$ は群として同型.

2 幾何学 C (2011/04/27): 等質な集合 (2)

集合の例

定義 2.1.

(1) $S^n := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |v| = 1\}$ を <u>n **次元球面**</u>,

(2) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \{\ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \ell$ は原点を通る直線 $\}$ を <u>n **次元実射影空間**</u>,

(3) $G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V$ は k 次元線型部分空間 $\}$ を <u>**実グラスマン多様体**</u>,

(4) $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を <u>**上半平面**</u> と呼ぶ.

定義から $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = G_1(\mathbb{R}^{n+1})$ である. これらの集合は全て等質になることを後に確かめる.

群作用

定義 2.2. 写像 $\Phi : G \times M \to M : (g, p) \mapsto \Phi(g, p) =: g.p$ が, G の M への <u>**作用**</u> (<u>**action**</u>) とは, 次が成り立つこと:

(i) $\forall g, h \in G$, $\forall p \in M$, $(gh).p = g.(h.p)$,

(ii) $\forall p \in M$, $e.p = p$ (ただし e は G の単位元).

ここで定義した作用は厳密には <u>**左作用**</u> と呼ばれるものである. 群 G が集合 M に作用することを, 記号 $G \curvearrowright M$ で表すことが多い.

例 2.3. 次は作用である:

(1) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $g.v := g + v$ で定めたもの (ただし $\mathbb{R}^n$ は加法群),

(2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $g.v := gv$ で定めたもの,

(3) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times G_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ を $g.V := \{gv \mid v \in V\}$ で定めたもの,

(4) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ を次の一次分数変換で定めたもの:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} .z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

命題 2.4. 群 G が集合 M に作用しているとする. このとき,

(1) 全ての部分群 $G' \subset G$ は M に作用する,

(2) 部分集合 $M' \subset M$ が G によって保たれているとする (すなわち, $\forall g \in G$, $\forall p \in M'$, $g.p \in M'$). このとき, G は M' に作用する.

例 2.5.

(1) $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^n$ に作用する,

(2) $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}(n)$ は球面 S^{n-1} に作用する,

(3) $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ は実グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ に作用する.

3　幾何学 C (2011/04/27): 等質な集合 (3)

推移的な作用

定義 3.1. 群 G の集合 M への作用が **推移的** とは, 次が成り立つこと: $\forall p, q \in M, \exists g \in G : g.p = q$. また, 集合 M が **等質** とは, M への推移的な群作用が存在すること.

作用が推移的であることを示すためには, 次の補題を用いると便利.

補題 3.2. M を集合とし, $o \in M$ を固定する. このとき, 群 G の M への作用が推移的であることは, 次と同値: $\forall p \in M, \exists g \in G : g.p = o$.

問題 3.3 (第 1 回レポート). G が M に作用しているとする. このとき, 各 $g \in G$ および $p, q \in M$ に対して, 「$g.p = q \Leftrightarrow p = g^{-1}.q$」を示せ. また, これを用いて補題 3.2 を示せ.

例 3.4. 次の作用は推移的である:

(1) 加法群 $\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{R}^n$ への作用,

(2) $\mathrm{O}(n+1)$, $\mathrm{SO}(n+1)$ の S^n への作用,

(3) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ の $G_k(\mathbb{R}^n)$ への作用,

(4) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ への作用.

4　幾何学 C (2011/05/11): 等質な集合 (4)

前回の補足

定義 4.1. 集合 M が **G-等質** であるとは, 群 G が M に推移的に作用すること. 集合 M が **等質** であるとは, ある群 G に関して G-等質となること.

剰余集合

定義 4.2. 群 G と部分群 K に対して, G 上の同値関係 $\sim$ を次で定義する: $g \sim h :\Leftrightarrow g^{-1}h \in K$. このとき, G の $\sim$ による商集合を G/K で表し, G の K による **剰余集合** (**coset space**) と呼ぶ.

この同値関係による同値類を $[\cdot]$ で表すと, 次が成立する: $G/K = \{[g] \mid g \in G\}$. また定義から次が成り立つ: $[g] = gK := \{gk \mid k \in K\}$.

固定部分群

定義 4.3. G に M への作用に対して, 次を $p \in M$ における **固定部分群** と呼ぶ:

$$G_p := \{g \in G \mid g.p = p\}.$$

命題 4.4. G の M への作用が推移的であるとする. このとき, 各点における固定部分群は全て共役である, すなわち, 次が成り立つ: $\forall p, q \in M, \exists g \in G : gG_pg^{-1} = G_q$.

主定理

定理 4.5. 集合 M が G-等質であることと $M = G/K$ と表示されることは同値である. すなわち, 次が成り立つ:

(1) G/K を剰余集合とする. このとき, 群 G は G/K に推移的に作用する.
(2) 集合 M が G-等質であるとし, $p \in M$ とする. このとき, 剰余集合 G/G_p と M との間に全単射が存在する.

$M = G/K$ のような表示を **等質空間表示** と呼ぶ. 等質空間表示を求めるためには, 固定部分群 G_p を求めれば良い.

5 幾何学 C (2011/05/18): 等質な集合 (5)

等質空間表示の例

例 5.1. $S^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$. 正確に言うと $S^n = \mathrm{O}(n+1)/K$, ただし

$$K := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\} \cong \mathrm{O}(n).$$

補題 5.2. G とその部分群 G' が共に M に推移的に作用しているとする. このとき, 各 $p \in M$ に対して, 次が成り立つ: $M = G'/(G' \cap G_p)$.

例 5.3. $S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$.

例 5.4. グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
G_k(\mathbb{R}^n) &= \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) / \left\{ \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right] \mid \det \neq 0 \right\} \\
&= \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) / \left\{ \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right] \mid \det = 1 \right\} \\
&= \mathrm{O}(n) / \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array} \right] \mid \alpha \in \mathrm{O}(k),\ \beta \in \mathrm{O}(n-k) \right\} \\
&= \mathrm{SO}(n) / \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array} \right] \mid \alpha \in \mathrm{O}(k),\ \beta \in \mathrm{O}(n-k),\ \det(\alpha)\det(\beta) = 1 \right\}.
\end{aligned}$$

この表示の下 2 つは省略して次のように書かれることが多い:

$$G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k) = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{S}(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)).$$

問題 5.5 (第 2 回レポート). $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ を示せ.

等質空間表示の応用 (1)

命題 5.6. $G_k(\mathbb{R}^n)$ と $G_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ の間に全単射が存在.

等質空間表示の応用 (2)

命題 5.7. $G \supset H \supset K$ を部分群の列とする. このとき, 次が成り立つ: $\pi : G/K \to G/H$: 全射 s.t. $\forall p \in G/H$, $\pi^{-1}(\{p\}) = H/K$.

例 5.8. 次の写像が存在する:

(1) $\pi : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ (2:1 の写像),

(2) $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ (各点の逆像は S^1).

6　幾何学 C (2011/05/25): 等質な位相空間 (1)

位相群

定義 6.1. G が群かつ位相空間であるとする. G が **位相群** であるとは, 次が成り立つこと:

(1) $G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh$: 連続,
(2) $G \to G : g \mapsto g^{-1}$: 連続.

ちなみに $G \times G$ の位相は積位相で定義する. 位相群の条件にハウスドルフ性を仮定することも多い.

命題 6.2. 上の条件 (1), (2) は次と同値: $G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh^{-1}$ が連続.

例 6.3. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ は位相群である.

コンパクト性

上記の位相群は, 全て $M_n(\mathbb{R})$ または $M_n(\mathbb{C})$ (すなわちユークリッド空間) の部分空間である. このとき, コンパクトであることは有界閉集合であることと同値であった. $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ のノルムは次で与えられることに注意する:

$$||X||^2 = \sum x_{ij}^2 = \mathrm{tr}({}^t XX).$$

命題 6.4. $n \geq 2$ のとき次が成り立つ:

(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ は非コンパクト,
(2) $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ はコンパクト.

連結性

位相空間 X が連結であるとは, 直感的に言うと,「二つの開集合に分けられない」ことであった. 連結な位相空間の連続写像による像は連結であること, および, 弧状連結ならば連結であることに注意する.

命題 6.5. $n \geq 1$ のとき次が成り立つ:

(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$ は非連結,
(2) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ は連結.

7 幾何学 C (2011/06/15): 等質な位相空間 (2)

連続な作用

定義 7.1. G を位相群, M を位相空間とする. G の M への作用が **連続な作用** であるとは, 次が成り立つこと: 写像 $\Phi : G \times M \to M : (g, p) \mapsto g.p$ が連続.

命題 7.2. G の M への作用が連続であるとする. このとき, 各 $g \in G$ に対して, 次は同相写像: $\varphi_g : M \to M : p \mapsto g.p$.

例 7.3. 次は連続な作用である:

(1) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $g.v := g + v$ で定めたもの (ただし $\mathbb{R}^n$ は加法群),
(2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $g.v := gv$ で定めたもの,
(3) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ を一次分数変換で定めたもの.

命題 7.4. 位相群 G が位相空間 M に連続に作用しているとする. このとき,

(1) 全ての部分群 $G' \subset G$ は M に連続に作用する,
(2) 部分空間 $M' \subset M$ が G によって保たれているとき, G は M' に連続に作用する.

ここで, 部分群 G' および部分空間 M' には, G および M からの相対位相を入れている.

例 7.5.

(1) $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^n$ に連続に作用する,
(2) $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}(n)$ は球面 S^{n-1} に連続に作用する.

剰余空間

定義 7.6. G を位相群, K をその部分群とし, 剰余集合 G/K への自然な射影を $\pi : G \to G/K$ とする. このとき, G/K に π から決まる商位相を入れた空間を **剰余空間** と呼ぶ.

G/K 上の商位相は, $\{O \subset G/K \mid G \supset \pi^{-1}(O) : 開\}$ で定義されていた. 商位相に関して, π は開写像である.

命題 7.7. G を位相群, K をその部分群とする. 剰余空間 G/K がハウスドルフであるための必要十分条件は, K が G の閉部分群であること.

8　幾何学 C (2011/06/22): 等質な位相空間 (3)

固定部分群

命題 8.1. G の M への作用が連続であるとし, M はハウスドルフであると仮定する. このとき, 各 $p \in M$ に対して, 固定部分群 $G_p = \{g \in G \mid g.p = p\}$ は G 内の閉部分群である.

主定理

補題 8.2. 写像 $\pi : X \to Y$ を全射とし, また写像 $f : X \to Z$ および $\widetilde{f} : Y \to Z$ は $f = \widetilde{f} \circ \pi$ をみたすとする. このとき, 次が成り立つ:

(1) π を開写像, f を連続とすると, $\widetilde{f}$ は連続である.
(2) π を連続, f を開写像とすると, $\widetilde{f}$ は開写像である.

主定理は, 雑に言うと「M が G-等質 $\Leftrightarrow$ $M = G/K$ と書ける」というものである. これを正確に述べると次のようになる.

定理 8.3. G を位相群とする. このとき, 次が成り立つ:

(1) K を G の部分群とするとき, 剰余空間 G/K は G-等質な位相空間である.
(2) M を G-等質な位相空間とし, $p \in M$ とすると, 全単射かつ連続な写像 $\widetilde{f} : G/G_p \to M$ が存在する.
(3) (2) の状況で, さらに G は第二可算公理をみたし, 局所コンパクトであるとし, M も局所コンパクトであると仮定する. このとき, G/G_p と M は同相である.

応用例

命題 8.4. G を位相群, K をその部分群とする. このとき, 次が成り立つ:

(1) G がコンパクトならば, G/K もコンパクトである.
(2) G が連結ならば, G/K も連結である.

これにより, 球面やグラスマン多様体はコンパクトかつ連結であることが分かる. ちなみにこの命題の逆は, いずれも成り立たない.

問題

問題 8.5 (第 3 回レポート). 命題 8.1 および補題 8.2 (2) を示せ.

9　幾何学 C (2011/06/29): 等質な多様体 (1)

多様体

以下では多様体は全て C^∞-級であるとする. 多様体の定義は, 局所座標系が存在することであった. しかし実際に局所座標系を構成することは困難であるので, 多様体であることを示すためには, 以下のような陰関数表示を用いる方法が便利.

命題 9.1. U を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合, $F : U \to \mathbb{R}^m$ を C^∞-級写像とし, $M := \{p \in U \mid F(p) = 0\}$ とおく. このとき, $\mathrm{rank}(JF)_p = m - k$ $(\forall p \in M)$ が成り立つならば, M は k 次元多様体になる.

このとき $F(p) = 0$ を M の陰関数表示と呼ぶ. ここで $(JF)_p$ は F のヤコビ行列を表す. ちなみにヤコビ行列は, F の微分写像

$$(dF)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : X \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{F(p + tX) - F(p)}{t}$$

を標準的な基底に関して行列表示したものであった. よって, 上の命題の仮定 $\mathrm{rank}(JF)_p = m - k$ は, $\dim \ker(dF)_p = k$ と同値である.

リー群

定義 9.2. G が群かつ多様体であるとする. G が **リー群** であるとは, 次が成り立つこと:

(1) $G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh$: C^∞-級,

(2) $G \to G : g \mapsto g^{-1}$: C^∞-級.

命題 9.3. $F : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ を C^∞-級写像とし, $G := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid F(g) = 0\}$ が群であるとする. このとき, G はリー群である. またこのとき, $\dim G = \dim \ker(dF)_e$ である.

例 9.4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ はリー群である.

リー群の接空間

定義 9.5. 部分多様体 $M \subset \mathbb{R}^n$ に対して, 次を $p \in M$ における **接空間** と呼ぶ:

$$T_pM := \{c'(0) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty,\ c(0) = p\}.$$

命題 9.6. $F(p) = 0$ を多様体 M の陰関数表示とすると, 次が成り立つ: $T_pM = \ker(dF)_p$.

例 9.7. $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ の単位元 e での接空間は次のようになる:

(1) $T_e\mathrm{O}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tX + X = 0\}$,

(2) $T_e\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$.

10　幾何学 C (2011/07/06): 等質な多様体 (2)

リー群の指数写像

定理 10.1. G をリー群とすると, C^∞-級写像 $\exp : T_eG \to G$ で, 次をみたすものが存在する:

(i) $\forall X \in T_eG$, $c_X : \mathbb{R} \to G : s \mapsto \exp(sX)$ は群準同型,

(ii) $c'_X(0) = \frac{d}{ds}\exp(sX)|_{s=0} = X$.

上記の exp を **リー群の指数写像** と呼ぶ. 後に剰余空間 G/K に多様体構造を定めるときに, 指数写像 exp が用いられる. ちなみに, リー群が行列で書かれている場合には, exp も行列で具体的に書くことができる.

定義 10.2. 次の写像を **行列の指数写像** と呼ぶ:

$$\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) : X \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k.$$

例 10.3. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$ に対して, 行列の指数写像を接空間に制限したものは, リー群としての指数写像である.

なめらかな作用

定義 10.4. G をリー群, M を多様体とする. G の M への作用が **なめらかな作用** であるとは, 次が成り立つこと: 写像 $\Phi : G \times M \to M : (g, p) \mapsto g.p$ がなめらか.

例 10.5. 次はなめらかな作用である:

(1) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $g.v := g + v$ で定めたもの (ただし $\mathbb{R}^n$ は加法群),

(2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $g.v := gv$ で定めたもの,

(3) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}\mathrm{H}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ を一次分数変換で定めたもの.

11　幾何学 C (2011/07/13): 等質な多様体 (3)

指数写像と局所座標

系 11.1. G をリー群とし, $T_eG = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ を直和分解とする. このとき, 次で定義される写像は 0 の周りの局所 C^∞-級同相である:

$$T_eG \to G : X = X_1 + \cdots + X_k \mapsto \exp(X_1) \cdots \exp(X_k).$$

すなわち, $0 \in T_eG$ の近傍から $e \in G$ の近傍への同相写像が得られる. これは G の e の周りの局所座標を与える. 次はこの局所座標を用いると示される.

定理 11.2. G をリー群, K をその閉部分群とする. このとき K もリー群になる.

剰余空間上の多様体構造

定理 11.3. G をリー群, K をその閉部分群とする. このとき G/K には次をみたす多様体構造が存在する:

(i) $\pi : G \to G/K$ はなめらか,
(ii) 作用 $G \curvearrowright G/K$ はなめらか.

例 11.4. $S^2 = \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(2)$ に上の定理の証明方法を適用すると, 次の座標近傍が得られる:

$$\{(\cos a \cos b, \sin a \cos b, \sin b) \in S^2\}.$$

系 11.5. 多様体の次元について次が成り立つ: $\dim G/K = \dim G - \dim K$.

主定理

定理 11.6. G をリー群とする. このとき, 次が成り立つ:

(1) K を G の閉部分群とするとき, 剰余空間 G/K は G-等質な多様体である.
(2) M を G-等質な多様体とし, $p \in M$ とすると, G/G_p と M は C^∞-級同相である.

問題

問題 11.7 (第 4 回レポート). 以下のそれぞれのキーワードついて, 関連する期末試験問題を予想し, その問題と解答を書け:

(1) 等質な集合, (2) 位相群, (3) 等質な位相空間, (4) リー群, (5) 等質な多様体.

12 幾何学 C (2011/07/20): 等質な部分多様体

等質部分多様体の例

定義 12.1. G/K を等質な多様体とし, H を G の閉部分群とする. このとき, 各 $p \in G/K$ に対して, 次を p を通る H による **軌道** と言う: $H.p := \{h.p \mid h \in H\}$.

例 12.2. 次の群 H の球面 $S^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$ への作用の軌道は, $\{\mathrm{pt}\}$ または S^{n-1} のいずれかに C^∞-級同相である:

$$H := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} g & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \in \mathrm{O}(n+1) \mid g \in \mathrm{O}(n) \right\} \cong \mathrm{O}(n).$$

例 12.3. 次の群 H の球面 $S^{a+b-1} = \mathrm{O}(a+b)/\mathrm{O}(a+b-1)$ への作用の軌道は, S^{a-1}, S^{b-1}, $S^{a-1} \times S^{b-1}$ のいずれかに C^∞-級同相である:

$$H := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \\ \hline & \beta \end{array} \right) \in \mathrm{O}(a+b) \mid \alpha \in \mathrm{O}(a), \beta \in \mathrm{O}(b) \right\} \cong \mathrm{O}(a) \times \mathrm{O}(b).$$

例 12.4. $\mathrm{O}(3)$ の $M_3(\mathbb{R})$ への作用について次が成り立つ:

(1) $g.X := gXg^{-1}$ によって $\mathrm{O}(3)$ は $M_3(\mathbb{R})$ に作用する.

(2) $\mathrm{O}(3)$ は次を保つ: $\mathrm{Sym}^0_3(\mathbb{R}) := \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid X = {}^tX,\ \mathrm{tr}(X) = 0\}$ $(= \mathbb{R}^5)$.

(3) $\mathrm{O}(3)$ は次の内積を保つ: $\langle X, Y \rangle := \mathrm{tr}({}^tXY)$. よって単位球 S^4 に作用する.

(4) $\mathrm{O}(3)$ の S^4 への作用の軌道は, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ または $\mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1)$ に C^∞-級同相.

上で得られた部分多様体 $S^4 \supset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ を **Veronese 曲面**, また $S^4 \supset \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1)$ を **Cartan 超曲面** と呼ぶ.

統一的な構成法: reductive 分解

命題 12.5. G を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 内の閉部分群とする. このとき G は次によって T_eG に作用する: $g.X := gXg^{-1}$. これを G の **随伴表現** と呼び, Ad_g で表す.

定義 12.6. 等質多様体 G/K に対して, 分解 $T_eG = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ が **reductive 分解** とは, 次が成り立つこと: $\forall g \in K$, Ad_g は $\mathfrak{m}$ を保つ.

このような分解があると, K の $\mathfrak{m}$ への作用が得られる. このような作用は **線型イソトロピー表現** と呼ばれるものになっている.

例 12.7. 上記の例に対して次が成り立つ:

(1) $S^n \times S^1$ の reductive 分解から, 例 12.2 の作用が得られる.

(2) $S^{a+1} \times S^{b+1}$ の reductive 分解から, 例 12.3 の作用が得られる.

(3) $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ の reductive 分解から, 例 12.4 の作用が得られる.

13　幾何学 C (2011/07/27): 期末試験問題

必要な定義等

以下に述べる定義および性質は, 必要な場合には証明無しで使っても良い.

- G/K とは, G を同値関係 $g \sim h :\Leftrightarrow g^{-1}h \in K$ で割った商集合のこと.
- $G_p := \{g \in G \mid g.p = p\}$ を $p \in M$ における固定部分群と呼ぶ.
- $\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t gg = I_n\}$ を直交群と呼ぶ.
- $F(p) = 0$ を多様体 M の陰関数表示とすると, 次が成り立つ: $T_pM = \ker(dF)_p$.
- 行列の指数写像とは, 次で定義される写像:

$$\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) : X \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k.$$

試験問題

[1]. 群 G が集合 M に推移的に作用しているとし, $p \in M$ とする. このとき, G/G_p から M への全単射写像が存在することを示せ. (ヒント: 写像 $f : G \to M : g \mapsto g.p$ を考えよ.)

[2]. 直交群 $\mathrm{O}(n)$ が連結でないことを示せ.

[3]. 位相群 G がハウスドルフ位相空間 M に連続的に作用しているとし, $p \in M$ とする. このとき, 固定部分群 G_p は G 内の閉集合であることを示せ. ただし, 写像 $f : G \to M : g \mapsto g.p$ を用いて, できるだけ簡潔に証明すること.

[4]. 直交群 $\mathrm{O}(n)$ の単位元での接空間 $T_e\mathrm{O}(n)$ が次をみたすことを示せ:

$$T_e\mathrm{O}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t X + X = 0\}.$$

[5]. $\mathrm{O}(2)$ の指数写像 $\exp : T_e\mathrm{O}(2) \to \mathrm{O}(2)$ を求めよ.

[6]. $S^2 = \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(2)$ に対して,

$$p := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U := \left(\begin{array}{c|cc} 0 & -u & 0 \\ \hline u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad V := \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & -v \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & 0 \end{array}\right)$$

とおく. 自然な射影 $\pi : \mathrm{O}(3) \to \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(2) = S^2$ を用いると, $\pi(\exp(U)\exp(V))$ によって S^2 の p の周りの局所座標が得られる. この $\pi(\exp(U)\exp(V))$ を具体的に求めよ.

[7]. 講義や試験などについて感想などがありましたら書いて下さい.