# 「幾何学と不変量」

田丸 博士 (広島大学)

先端数学 (2011/07/22) 講義資料

# 1　本講義の概要

## 1.1　目的

- 「不変量」の考え方を知ること:
  - 全ての数学に共通の「定石」.
  - 知っていると見通しが良くなる.
- 「不変量」の例を紹介すること:
  - 今までに習った概念のほとんどは不変量.
  - 高校の数学でも登場していた.
  - 新しい例も少し紹介.

## 1.2 たとえ話: 血液型

- **設定**:
  - $b$ : { **人間全体の集合** } $\to \{A, B, O, AB\}$,
  - $b(x) :=$ [$x$ **氏の血液型**].
- **応用例** (**パターン** 1): **同一人物判定**
  - $x_0$ : **犯人** (**特定できないが** $b(x_0)$ **は分かってる**),
  - $x_1$ : **容疑者**,
  - $b(x_0) \neq b(x_1) \Rightarrow x_0 \neq x_1$.
- **応用例** (**パターン** 2): **占い**
  - $b(x)$ **から** $x$ **の情報が得られる** (**例**: $b(x) = A \Rightarrow x$ **は几帳面**).
  - **注意**: **当たるかどうかは, 今は気にしない**.

# 2　不変量の一般論

## 2.1　不変量の定義

▼ **設定**:

- $X, Y$ : **集合**,
- $\sim$ : $X$ **上の同値関係**.

▼ **定義**:

- **写像** $f : X \to Y$ **が** (**同値関係** $\sim$ **に関する**) **不変量**

$$:\Leftrightarrow \ \forall x_1, x_2 \in X, \text{ “} x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \text{”}.$$

(i.e., **誘導写像** $\widetilde{f} : X/\sim \longrightarrow Y$ **が** well-defined.)

## 2.2　不変量の使い方

▼ **注意**:

- ○ $X$ **は複雑な集合** (**例**: **人間全体**),
- ○ $Y$ **は比較的簡単な集合** (**例**: $\{A, B, O, AB\}$),
- ○ **不変量のアイデア**: **複雑な** $X$ **のことが**, **簡単な** $Y$ **を見ると分かる**.

▼ **応用例**:

- ○ (**パターン** 1)　$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \nsim x_2$.
- ○ (**パターン** 2)　$f(x)$ **から** $x$ **の性質が分かる**.

# 3　簡単な不変量の例

## 3.1　2 次方程式

▼ **不変量:**

$$X := \{\ \textbf{二次多項式}\ \} = \{f(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\},$$

$$f(x) \sim g(x) :\Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

$\Longrightarrow$ **このとき** $D := b^2 - 4ac$ **は不変量 (判別式).**

▼ **応用例 (パターン 2):**

◦ $D$ **の符号によって** $f(x) = 0$ **の実数解の個数が分かる.**

(**$D$ が決まっても $f(x)$ は決まらないが, その性質が分かる.**)

## 3.2 三角形

▼ **不変量:**

- $X :=$ { **三角形全体** }, $\sim$ : **三角形の合同**, **に対し**, **次は不変量**:

$$f : X \to \mathbb{R}^3 : \triangle \mapsto (a, b, c)$$ (**三辺の長さ**, **ただし** $a \geq b \geq c$).

▼ **注意:**

- **このとき誘導写像** $\widetilde{f} : X/ \sim \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **は単射**

(**すなわち**, $f(\triangle_1) = f(\triangle_2) \Rightarrow \triangle_1 \sim \triangle_2$).

▼ **応用例** (**パターン** 2):

- $f(\triangle)$ **によって** $\triangle$ **は完全に決まる**.
- **すなわち**, $\triangle$ **の性質は** $f(\triangle)$ **で** (**原理的には**) **全て分かる**.
- **例** (**ヘロンの公式**): $\triangle$ **の面積は** $f(\triangle)$ **で書ける**.

## 3.3 行列

▼ **不変量**:

- $X := M_n(\mathbb{R})$ : **実** $n \times n$ **行列全体**,

  $A \sim B :\Leftrightarrow \exists g \in M_n(\mathbb{R})\ (\det(g) \neq 0)$ s.t. $A = gBg^{-1}$.

$\Rightarrow$ **トレース** tr, **階数** rank, **行列式** det, **固有値**, . . . **は不変量**.

▼ **応用例** (**パターン** 2):

- $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ **は逆行列を持つ**.

# 4　多面体のオイラー標数

## 4.1　オイラー標数の定義

▼ **定義:**

- $\mathbb{R}^3 \supset M$ : **多面体に対して, 次を オイラー標数 と呼ぶ:**

$$\chi(M) := \#(\textbf{頂点}) - \#(\textbf{辺}) + \#(\textbf{面}).$$

▼ **例:**

- $\chi(\textbf{正四面体}) = 4 - 6 + 4 = 2.$
- $\chi(\textbf{立方体}) = \chi(\textbf{直方体}) = 8 - 12 + 6 = 2.$
- **他の場合を考えてみよう**... (2 **にならないものはある？**)

## 4.2 オイラー標数は不変量

- 状況設定:
  - $X := \{$ 多面体 $\subset \mathbb{R}^3\}$,
  - $\sim$ : 連続変形で移り合う (つまり同相).

- 定理:
  - 多面体のオイラー標数は, 同相に関する不変量.

    (逆にこれを知っていれば, $\chi(M) \neq 2$ の例を思い付くはず...)

- 応用例 (パターン 1):
  - 球面 $S^2$ とトーラス $T^2$ は同相でない.

# 5　平面曲線の曲率

## 5.1　平面曲線と曲率の定義

▼ **定義**:

- $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ **が なめらかな曲線の弧長パラメータ表示**

  $:\Leftrightarrow$ (1) $c$ **は** $C^\infty$**-級**, (2) $\forall t \in \mathbb{R},\ |c'(t)| = 1.$

- $c_1$ **と** $c_2$ **が 合同**

  $:\Leftrightarrow$ $\exists A \in O(2),\ \exists v \in \mathbb{R}^2$ s.t. $\forall t \in \mathbb{R},\ c_2(t) = Ac_1(t) + v.$

- $\kappa(t) := |c''(t)|$ **を 曲率 と呼ぶ** (**注**: **正確に言うと曲率の絶対値**).

▼ **イメージ**:

- **曲率** = **一定の速さで走った時の加速度** (**横** G) **の大きさ**.

## 5.2 曲率は不変量

- **定理**:
  - なめらかな曲線の弧長パラメータ表示に対して,
    曲率 $\kappa(t)$ は合同に関する不変量.
- **応用例**:
  - 半径が異なる円周は合同ではない (パターン 1).
  - $\kappa(t) = 0\ (\forall t)$ ならば $c$ は直線 (パターン 2).

# 6　レポート問題

▼ 問題 (以下から 4 題以上選択):

- オイラー標数が $\chi(M) \neq 2$ となる多面体の例を挙げよ.
- 平面曲線の曲率が, 合同に関する不変量であることを示せ.
- 半径が異なる円周は合同ではないことを示せ (応用例パターン 1).
- $\kappa(t) = 0\ (\forall t)$ ならば $c$ は直線であることを示せ (応用例パターン 2).
- 本講義でとりあげた以外の不変量の例を一つ挙げよ.
  また, それが不変量であることを示せ.
- 高校数学で登場する不変量の例を一つ挙げよ.
  また, それについて高校生向けの説明をせよ.