1　数学通論 II (2011/10/04): ガイダンス

目的

数学通論 II・同演習では, 位相空間について学ぶ. この授業の目的は,

「位相空間の諸概念を理解すること」

「論理 (論理記号の使い方・証明の書き方・数学の考え方) を身に付けること」

の二つである. 既に数学通論 I で学んだように, 距離空間はユークリッド空間の一般化であった. この授業で扱う位相空間は, 距離空間の一般化である. 非常に抽象的だが, それだけに数学の多くの分野で登場するし, また論理記号などの使い方の訓練には非常に適している.

学ぶ上での諸注意

数学通論 II・同演習では, 「証明の書き方」の訓練を行いことを, 強く意識する. そのため, 試験の答案・レポート・演習の解答を作成する際には, 以下の二つの規則に従うことを要請する:

- 証明の最初に必ず「示すこと」を書くこと.
- 証明は, 最初に書いた示すことの順番に忠実に従って書くこと.

講義中に板書する証明は, これらの規則に従って書くので, 参考にすること. また, 試験の答案等の証明が上記の規則に従っていない場合には, 軽微な場合には減点で済ませるが, 軽微でないと判断された場合には採点しない.

その他の諸注意

講義に関する情報や配布したプリントなどは, 以下の webpage を参考にすること:

`http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~tamaru/kougi/11tsuron2.html`

質問等がある場合には, 講義が終わった後に教室で捕まえるのが最も確実. それ以外の場合には, 研究室に直接来ても構わない (不在の場合もあるので, 事前にメールで予告した方が確実).

研究室: 理学部 C613

e-mail: `tamaru@math.sci.hiroshima-u.ac.jp`

また, 数学科では, 大学院生による「学生相談室」制度があるので, 積極的な利用を推奨する.

2　数学通論 II (2011/10/04): 位相空間の定義

ユークリッド空間から距離空間へ

定義 2.1. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の **自然な距離** を次で定義する:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

命題 2.2. ユークリッド空間 $X := \mathbb{R}^n$ 上の自然な距離は, 次の (D1)–(D3) を満たす:

(D1) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ かつ "$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$".

(D2) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

(D3) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

定義 2.3. X を集合, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を写像とする. (X, d) が **距離空間** であるとは, d が命題 2.2 の条件 (D1)–(D3) を満たすこと.

距離空間から位相空間へ

定義 2.4. (X, d) を距離空間とする. このとき,

(1) $a \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して, $U(a; \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$ を **ε-近傍** と呼ぶ.

(2) $X \supset O$ が **開集合** とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in O$, $\exists \varepsilon > 0 : U(a; \varepsilon) \subset O$.

(3) $\mathcal{O} := \{O \subset X \mid O$ は開集合 $\}$ を **開集合族** と呼ぶ.

命題 2.5. 距離空間 (X, d) の開集合族 $\mathcal{O}$ に対して, 次が成り立つ:

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(T2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(T3) $\forall O_\lambda \in \mathcal{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

定義 2.6. X を集合, $\mathcal{O}$ を X の部分集合族とする. $(X, \mathcal{O})$ が **位相空間** であるとは, $\mathcal{O}$ が命題 2.5 の条件 (T1)–(T3) を満たすこと.

例 2.7. 以下が成り立つ:

(1) $\mathbb{R}$ に自然な距離 d を入れた距離空間に対して, $(0, +\infty)$ は開集合である.

(2) 距離空間 (X, d) の ε-近傍 $U(a; \varepsilon)$ は開集合である.

問題 2.8 (小テスト問題). 以下を示せ:

(1) $\mathbb{R}$ に自然な距離 d を入れた距離空間に対して, $[0, +\infty)$ は開集合でない.

(2) 距離空間 (X, d) の開集合族 $\mathcal{O}$ は, 条件 (T2) を満たす.

3　数学通論 II (2011/10/11): 位相空間の例・近傍系

用語

定義 3.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とするとき,

(1) $\mathcal{O}$ を X 上の **位相** と呼ぶ.

(2) $A (\subset X)$ が **開集合** とは, 次が成り立つこと: $A \in \mathcal{O}$.

位相空間の例

例 3.2. 次は位相である:

(1) 距離空間 (X, d) に対して, その開集合族 $\mathcal{O}_d := \{O \subset X \mid O$ は開集合 $\}$.

(2) 集合 X に対して, その巾集合 $\mathcal{O} := \mathfrak{P}(X)$ (これを **離散位相** と呼ぶ).

(3) 集合 X に対して, $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$ (これを **密着位相** と呼ぶ).

(4) $\mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{O} := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

近傍系

以下では $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

定義 3.3. 点 $x \in X$ に対して,

(1) $A (\subset X)$ が x の **近傍** とは, 次が成り立つこと: $\exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subset A$.

(2) $\mathfrak{N}_x := \{A \subset X \mid A$ は x の近傍 $\}$ を x の **近傍系** と呼ぶ.

例 3.4. $\mathbb{R}$ について次が成り立つ:

(1) 標準的な位相に関して, $[0, 2]$ は 1 の近傍だが 0 の近傍ではない.

(2) 例 3.2 (4) の位相に関して, $[0, 2]$ は 1 の近傍でも 0 の近傍でもない.

定義 3.5. A $(\subset X)$ に対して,

(1) $x (\in X)$ が A の **内点** とは, 次が成り立つこと: $\exists V \in \mathfrak{N}_x : V \subset A$.

(2) $A^\circ := \{x \in X \mid x$ は A の内点 $\}$ を A の **内部** と呼ぶ.

例 3.6. 例 3.2 (4) の位相空間に関して, 次が成り立つ: $1 \in [0, +\infty)^\circ$, $1 \notin [0, 2)^\circ$.

問題 3.7 (小テスト問題). 例 3.2 (4) の位相空間について, 次を示せ: $[0, 2]^\circ = \emptyset$.

命題 3.8. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ: $A^\circ \subset A$.

定理 3.9. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ: $A \in \mathcal{O} \Leftrightarrow A = A^\circ$.

4　数学通論 II (2011/10/18): 閉集合

閉集合

以下では $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

定義 4.1. $A\ (\subset X)$ が **閉集合** とは, 次が成り立つこと: $X - A \in \mathcal{O}$.

例 4.2. 距離空間 (X, d) の閉集合は, 位相 $\mathcal{O}_d$ に関しても閉集合.

定義 4.3. $A \subset X$ に対して,

(1) $x\ (\in X)$ が A の **触点** とは, 次が成り立つこと: $\forall U \in \mathfrak{N}_x$, $A \cap U \neq \emptyset$.
(2) $\overline{A} := \{x \in X \mid x$ は A の触点 $\}$ を A の **閉包** と呼ぶ.

例 4.4. 例 3.2 (4) の位相空間を考える. $A := \{0\}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $-1 \in \overline{A}$,
(2) $1 \notin \overline{A}$.

命題 4.5. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ: $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in (X - A)^\circ$.

問題 4.6 (小テスト問題). $A \subset X$ に対して, 次を示せ: $A \subset \overline{A}$.

定理 4.7. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ: A が閉集合 $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

例 4.8. 例 3.2 (4) の位相空間に対して, 次が成り立つ: $\overline{(0, 2)} = (-\infty, 2]$.

5　数学通論 II (2011/10/25): 連続写像・同相

以下では $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間とする．写像を, 定義域と値域に入っている位相を強調する時には, $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ のように表すこともある．

連続写像

定義 5.1. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が **連続** とは, 次が成り立つこと: $\forall O \in \mathcal{O}_Y$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$.

例 5.2. $\mathbb{R}$ の密着位相を $\mathcal{O}^t$, 離散位相を $\mathcal{O}^d$ で表す．また id は恒等写像を表す．このとき,

(1) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{O}^d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}^t)$ は連続,
(2) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{O}^t) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}^d)$ は連続でない.

命題 5.3. 連続写像と連続写像の合成は連続である．すなわち, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が連続ならば, $g \circ f$ も連続.

命題 5.4. 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が連続であることと次は同値: 閉集合の逆像は閉集合である, すなわち, $\forall F \in \mathfrak{A}_Y$, $f^{-1}(F) \in \mathfrak{A}_X$.

ただしここで, $\mathfrak{A}_X$ は X の閉集合系を表す.

問題 5.5 (小テスト問題). 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が連続のとき, 次を示せ: 近傍の逆像は近傍である, すなわち, $\forall x \in X$, $\forall V \in \mathfrak{N}_{f(x)}$, $f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_x$.

同相

定義 5.6. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が **同相写像** とは, 次が成り立つこと:

(1) f は全単射, (2) f は連続, (3) f^{-1} も連続.

定義 5.7. $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が **同相** とは, 次が成り立つこと: $\exists f : X \to Y$: 同相写像.

命題 5.8. 同相を $\cong$ で表す．このとき $\cong$ は同値関係である．すなわち,

(1) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (X, \mathcal{O}_X)$,
(2) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y) \Rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y) \cong (X, \mathcal{O}_X)$,
(3) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Y, \mathcal{O}_Y) \cong (Z, \mathcal{O}_Z) \Rightarrow (X, \mathcal{O}_X) \cong (Z, \mathcal{O}_Z)$.

6 数学通論 II (2011/11/01): 相対位相

相対位相

定義 6.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$, 部分集合 $A \subset X$ に対して, $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$ を, $(X, \mathcal{O})$ から決まる A の **相対位相** と呼ぶ.

定義より, 次が成り立つことに念のために注意: "$W \in \mathcal{O}_A \Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{O} : W = O \cap A$".

命題 6.2. 相対位相 $\mathcal{O}_A$ は A の位相.

例 6.3. $A := [0, 2)$ に $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相を入れる. このとき $[0, 1)$ は A の開集合.

離散位相について

補題 6.4. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, 次が成り立つと仮定する: $\forall x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{O}$. このとき $\mathcal{O}$ は離散位相.

例 6.5. $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる $\mathbb{Z}$ の相対位相は, 離散位相である.

問題 6.6 (小テスト問題). $\mathbb{R}$ に右半直線の位相を入れる. この位相から決まる $\mathbb{Z}$ の相対位相は, 離散位相ではないことを示せ.

相対位相の性質

命題 6.7. 連続写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $A \subset X$ に対して, 制限写像 $f|_A : (A, \mathcal{O}_A) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ は連続.
(2) 値域を制限した写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ も連続.

系 6.8. 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ および部分集合 $A \subset X$ と, 制限写像 $f|_A : (A, \mathcal{O}_A) \to (f(A), \mathcal{O}_{f(A)})$ を考える.

(1) f が連続なら $f|_A : A \to f(A)$ も連続.
(2) f が同相写像なら $f|_A : A \to f(A)$ も同相写像.

7　数学通論 II (2011/11/08): 連結

連結の定義と例

定義 7.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して,

(1) $(X, \mathcal{O})$ が **非連結** とは, 次が成り立つこと: $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : O_1 \cup O_2 = X$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$.

(2) $(X, \mathcal{O})$ が **連結** とは, 次が成り立つこと: $(X, \mathcal{O})$ は非連結でない.

命題 7.2. $X \subset \mathbb{R}$ とし, $\mathcal{O}_X$ を $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる X の相対位相とする. このとき $(X, \mathcal{O}_X)$ が連結であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall a, b \in X$ $(a < b)$, $[a, b] \subset X$.

例 7.3. $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して, 次が成り立つ:

(1) $\mathbb{R}$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ は連結.

(2) $(0, 1) \cup [2, 3)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ は非連結.

連結の同相不変性

補題 7.4. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, 以下は互いに同値:

(1) $(X, \mathcal{O})$ は非連結.

(2) $\exists A \subset X : A$ は開かつ閉, $\emptyset \neq A \neq X$.

(3) $\exists \varphi : X \to \{1, 2\}$: 連続かつ全射.

命題 7.5. 連結な位相空間の連続写像による像は連結である. すなわち, $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像, $(X, \mathcal{O}_X)$ を連結とすると, $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ は連結.

問題 7.6 (小テスト問題). 上の命題 7.5 の逆は成り立たない. すなわち, 連続写像による像が連結だとしても, 定義域の位相空間が連結とは限らない. 反例を挙げよ.

定理 7.7. 連結性は同相で不変である. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X, \mathcal{O}_X)$ が連結のとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は連結.

例 7.8. $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して, $[0, 1)$ と $(0, 1)$ は同相でない.

連結性の応用

系 7.9 (中間値の定理). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続写像とし, $f(a) < f(b)$ とする. このとき次が成立: $\forall m \in [f(a), f(b)]$, $\exists c \in [a, b] : m = f(c)$.

8 数学通論 II (2011/11/15): 弧状連結

弧状連結の定義

定義 8.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が **弧状連結** とは, 次が成り立つこと: $\forall x_0, x_1 \in X$, $\exists c : [0,1] \to X$: 連続, $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$.

上の定義の条件を満たす c を, x_0 と x_1 を結ぶ **道** と呼ぶ.

例 8.2. $\mathbb{R}^n$ に標準的な位相を入れた位相空間は弧状連結. $\mathbb{R}$ の区間, 円周 S^1 も弧状連結.

連結と弧状連結の関係

命題 8.3. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ は, 弧状連結ならば連結である.

注意 8.4. 上の命題の逆は成り立たない. すなわち, 連結だが弧状連結でない位相空間が存在する.

弧状連結の性質

命題 8.5. 弧状連結な位相空間の連続写像による像は弧状連結である. すなわち, $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像, $(X, \mathcal{O}_X)$ を弧状連結とすると, $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ は弧状連結.

問題 8.6 (小テスト問題). 命題 8.5 を示せ.

定理 8.7. 弧状連結性は同相で不変である. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結のとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は弧状連結.

例 8.8. 直線 $\mathbb{R}$ と平面 $\mathbb{R}^2$ も同相ではない.

例 8.9 (余談). メビウスの帯は, 帯の方向に沿った線で切っても弧状連結.

9　数学通論 II (2011/11/29): コンパクト

コンパクトの定義

定義 9.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して,

(1) $\mathfrak{U}$ $(\subset \mathcal{O})$ が X の **開被覆** (**open cover**) とは, 次が成り立つこと: $X = \bigcup \mathfrak{U}$.

(2) $(X, \mathcal{O})$ が **コンパクト** とは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: 開被覆, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ s.t. $X = \bigcup U_{\lambda_i}$.

コンパクトの例

命題 9.2 (復習). $X \subset \mathbb{R}^n$ とする. X が ($\mathbb{R}^n$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して) コンパクトであるための必要十分条件は, X が有界閉集合であること.

命題 9.3. $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトであるとし, A を X の閉集合とする. このとき, A は相対位相に関してコンパクトである.

例 9.4. $\mathcal{O}^d$ を X の離散位相とする. このとき, $(X, \mathcal{O}^d)$ がコンパクトであるための必要十分条件は, X が有限集合であること.

問題 9.5 (小テスト問題). $\mathbb{R}$ に右半直線の位相を入れた空間はコンパクトでないことを示せ.

コンパクトの同相不変性

命題 9.6. コンパクトな位相空間の連続写像による像はコンパクト. すなわち, $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像, $(X, \mathcal{O}_X)$ をコンパクトとすると, $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ はコンパクトである.

定理 9.7. コンパクト性は同相で不変である. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトのとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ はコンパクト.

レポート問題

問題 9.8 (中間試験事前救済レポート, 12/08(木) 締切). 以下に挙げるそれぞれのキーワードに対して, 関連する中間試験の問題を予想し, それに解答せよ. レポートには表紙を付けず, 最初のページに予想した問題を書き, 2 ページ目以降に予想した問題の解答を書くこと.

(1) 開集合および閉集合, (2) 連続写像, (3) 連結, (4) 弧状連結, (5) コンパクト.

10　数学通論 II (2011/12/06): 分離公理

分離公理の定義

定義 10.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が **(T_1) 空間** であるとは, 次が成り立つこと:

(T_1) $\forall x_1, x_2 \in X\ (x_1 \neq x_2),\ \exists O \in \mathcal{O} :\ x_1 \in O,\ x_2 \notin O.$

また, $(X, \mathcal{O})$ が **(T_2) 空間** または **ハウスドルフ空間** であるとは, 次が成り立つこと:

(T_2) $\forall x_1, x_2 \in X\ (x_1 \neq x_2),\ \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} :\ x_1 \in O_1,\ x_2 \in O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset.$

分離公理を満たす例と満たさない例

命題 10.2. 位相空間は, ハウスドルフ空間なら (T_1) 空間である.

例 10.3. 距離から決まる位相 $\mathcal{O}_d$ に対して, $(X, \mathcal{O}_d)$ はハウスドルフ (よって (T_1)) である.

命題 10.4. $(X, \mathcal{O})$ が (T_1) 空間であるための必要十分条件は, 一点集合が閉集合となること, すなわち, 次が成り立つこと: $\forall x \in X,\ \{x\} \in \mathfrak{A}$.

例 10.5. $\mathbb{R}$ に密着位相または右半直線の位相を入れた空間は, (T_1) (よってハウスドルフ) でない.

分離公理の同相不変性

定理 10.6. 分離公理は同相で不変である. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X, \mathcal{O}_X)$ が (T_1) または (T_2) を満たすとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ も (T_1) または (T_2) を満たす.

例 10.7. $\mathbb{R}$ 上の密着位相または右半直線の位相は, 距離から決まる位相と同相ではない.

その他の分離公理

定義 10.8. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, 次を **(T_3)-分離公理** および **(T_4)-分離公理** と呼ぶ:

(T_3) $\forall F \in \mathfrak{A},\ \forall x \notin F,\ \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} :\ x \in O_1,\ F \subset O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset.$

(T_4) $\forall F_1, F_2 \in \mathfrak{A}\ (F_1 \cap F_2 = \emptyset),\ \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} :\ F_1 \subset O_1,\ F \subset O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset.$

定義 10.9. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して,

(1) $(X, \mathcal{O})$ が **正則空間** であるとは, (T_1) と (T_3) を満たすこと.

(2) $(X, \mathcal{O})$ が **正規空間** であるとは, (T_1) と (T_4) を満たすこと.

命題 10.10. 位相空間に対して, 次が成立: 正規 $\Rightarrow$ 正則 $\Rightarrow$ ハウスドルフ $\Rightarrow$ (T_1).

11　数学通論 II (2011/12/13): 中間試験

注意

証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

定義や用語など

- $\mathbb{R}$ 上の右半直線の位相とは, $\mathcal{O}^+ := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.
- x の近傍系とは, $\mathfrak{N}_x := \{A \subset X \mid \exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subset A\}$.
- 内部とは, $A^\circ := \{x \in X \mid \exists V \in \mathfrak{N}_x : V \subset A\}$.
- 閉包とは, $\overline{A} := \{x \in X \mid \forall U \in \mathfrak{N}_x, A \cap U \neq \emptyset\}$.
- 写像が連続とは, 任意の開集合の逆像が開集合になること.
- 部分集合が閉集合とは, 補集合が開集合となること.
- 連結とは, 2 つの開集合に分けられないこと.
- $x_0, x_1 \in X$ を結ぶ道とは, $c : [0,1] \to X$: 連続, $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$.
- 弧状連結とは, 任意の 2 点が道で結べること.
- コンパクトとは, 任意の開被覆に対して, 有限部分被覆が存在すること.

問題

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 以下の問題に答えよ.

[1] $\mathbb{R}$ の標準的な位相を $\mathcal{O}$, 離散位相を $\mathcal{O}^d$, 密着位相を $\mathcal{O}^t$, 右半直線の位相を $\mathcal{O}^+$ とする. $A := (0,1]$ に対して, それぞれの位相に関する内部と閉包を書け. (証明不要, 20 点)

[2] $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像とする. このとき, Y の任意の閉集合に対して, その逆像が X の閉集合になることを示せ. (20 点)

[3] $\mathcal{O}_X$ が X の離散位相であるとし, $A \subset X$ とする. このとき, 相対位相 $\mathcal{O}_A$ は A の離散位相であることを示せ. (20 点)

[4] $(X, \mathcal{O}_X)$ が非連結であるとする. このとき, 連続な全射 $f : X \to \{1, 2\}$ が存在することを示せ. ただし $\{1, 2\}$ には離散位相が入っているものとする. (20 点)

[5] $\mathbb{R}^2$ の自然な距離から決まる位相を $\mathcal{O}$ とする. 位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ が弧状連結であることを, 定義に従って示せ. (20 点)

[6] $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続な全射とし, $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトであるとする. このとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ もコンパクトであることを示せ. (20 点)

[7] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.

12　数学通論 II (2011/12/20): 開基

集合の開基

X を集合とし, $\mathcal{O}'$ を X の部分集合族とする.

定義 12.1. $\mathcal{O}'$ が **集合 X の開基** とは, 次が成り立つこと:
(1) $\bigcup \mathcal{O}' = X$.
(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{O}'$, $\forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists V \in \mathcal{O}' : x \in V \subset B_1 \cap B_2$.

例 12.2. (X, d) を距離空間とすると, 次は X の開基: $\mathcal{O}' := \{U(x; \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$.

定義 12.3. 次の $\langle \mathcal{O}' \rangle$ を **$\mathcal{O}'$ の生成する部分集合族** と呼ぶ:

$$\langle \mathcal{O}' \rangle := \{\emptyset\} \cup \{\textstyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \mid O_\lambda \in \mathcal{O}'\}.$$

命題 12.4. $\langle \mathcal{O}' \rangle$ が位相になるための必要十分条件は, $\mathcal{O}'$ が X の開基であること.

位相の開基

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $\mathcal{O}^* \subset \mathcal{O}$ とする.

定義 12.5. $\mathcal{O}^*$ が **位相 $\mathcal{O}$ の開基** とは, 次が成り立つこと: $\langle \mathcal{O}^* \rangle = \mathcal{O}$.

命題 12.6. $\mathcal{O}^*$ が位相 $\mathcal{O}$ の開基であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O \in \mathcal{O}$, $\forall x \in O$, $\exists V \in \mathcal{O}^* : x \in V \subset O$.

例 12.7. 次の $\mathcal{O}^*$ は, $\mathbb{R}$ の標準的な位相 $\mathcal{O}$ の開基: $\mathcal{O}^* := \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$.

第二可算公理

定義 12.8. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, 次の条件を **第二可算公理** と呼ぶ: $\exists \mathcal{O}^*$: 開基 s.t. $\mathcal{O}^*$ は高々可算.

問題 12.9 (小テスト問題). $\mathbb{R}$ に標準的な位相を入れた空間は, 第二可算公理を満たすことを示せ. ただし, 次の事実を使って良い: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, $\exists r \in (a, b) : r \in \mathbb{Q}$.

定理 12.10 (Urysohn の距離付け可能定理). 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は, 正規かつ第二可算公理を満たすならば, 距離空間と同相である.

13 **数学通論 II** (2012/01/17): **積位相** (1)

以下では, $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 直積集合 $X \times Y$ の上に位相を定義する.

積位相の定義

命題 13.1. 次で定義される $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ は, $X \times Y$ の開基である:

$$\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y := \{O_X \times O_Y \mid O_X \in \mathcal{O}_X, O_Y \in \mathcal{O}_Y\}.$$

定義 13.2. $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ の生成する部分集合族 $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ を, $X \times Y$ の **積位相** と呼ぶ. また, 位相空間 $(X \times Y, \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle)$ を, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の **積空間** と呼ぶ.

積位相の例

例 13.3. $\mathbb{R}^n$ の標準的な位相を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ で表す. このとき, 次が成り立つ: $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \rangle$.

例 13.4. 円柱 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と $S^1 \times \mathbb{R}$ は同相である.

念のために, 円柱には $\mathbb{R}^3$ の標準的な位相から決まる相対位相を, $S^1 \times \mathbb{R}$ にはそれぞれの標準的な位相の積位相を, それぞれ入れたものを考えている. 次の例も同様.

例 13.5. 次で定義されるトーラス T と $S^1 \times S^1$ は同相である:

$$T := \{((2 + \cos\alpha)\cos\beta, (2 + \cos\alpha)\sin\beta, \sin\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

積位相の基本的な性質

次で定義される写像を (X 方向への) **自然な射影** と呼ぶ:

$$\pi : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x.$$

補題 13.6. 自然な射影 $\pi : X \times Y \to X$ に関して, 次が成り立つ:

(1) π は連続である.
(2) π は開写像である, すなわち, 任意の開集合の像は開集合である.
(3) 各 $y \in Y$ に対して, $\pi|_{X \times \{y\}} : X \times \{y\} \to X$ は同相写像である.

上の補題において, $X \times Y$ には積位相を入れ, また, $X \times \{y\}$ には (積位相から決まる) 相対位相を入れている.

14 数学通論 II (2010/01/24): 積位相 (2)・商位相 (1)

積位相と他の性質との関係

定理 14.1.

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を弧状連結とすると, 積空間も弧状連結である,

(2) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を連結とすると, 積空間も連結である,

(3) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ をコンパクトとすると, 積空間もコンパクトである.

商集合

定義 14.2. 集合 X 上の関係 $\sim$ が <u>**同値関係**</u> であるとは, 次が成り立つこと:

(i) $\forall x \in X$, $x \sim x$.

(ii) $\forall x, y \in X$, $(x \sim y \Rightarrow y \sim x)$.

(iii) $\forall x, y, z \in X$, $(x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z)$.

定義 14.3. $\sim$ を, 集合 X 上の同値関係とする.

(1) $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$ を x を含む <u>**同値類**</u> と呼ぶ.

(2) $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ を X の $\sim$ による <u>**商集合**</u> と呼ぶ.

例 14.4. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) 次で定義される $\sim$ は同値関係: $m \sim n :\Leftrightarrow m - n \in 2\mathbb{Z}$.

(2) 上の同値関係に対して, $\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1]\}$.

例 14.5. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) 次で定義される $\sim$ は同値関係: $x \sim x' :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$.

(2) 上の同値関係に対して, $\mathbb{R}/\sim$ と円 S^1 との間に全単射が存在する.

レポート問題

問題 14.6 (期末試験事前救済レポート, 02/02(木) 締切). 以下に挙げるそれぞれのキーワードに対して, 関連する期末試験の問題を予想し, それに解答せよ. レポートには表紙を付けず, 最初のページに予想した問題を書き, 2 ページ目以降に予想した問題の解答を書くこと.

(1) 中間試験の範囲, (2) 分離公理, (3) 開基, (4) 積位相, (5) 商位相.

15　数学通論 II (2012/01/31): 商位相 (2)

商位相の定義

X 上の同値関係を $\sim$ とすると, 次で定義される π は全射である. これを **自然な射影** と呼ぶ:

$$\pi : X \to X/\sim : x \mapsto [x].$$

命題 15.1. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を全射とする. このとき, 次は Y の位相である:

$$\mathcal{O}^f := \{O \subset Y \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}.$$

定義 15.2. 上の命題の $\mathcal{O}^f$ を **f による商位相** と呼ぶ. 特に, X 上に同値関係 $\sim$ があるとき, 自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ による商位相 $\mathcal{O}^\pi$ を, 商集合 $X/\sim$ 上の **商位相** と呼ぶ. また, 商位相を入れた位相空間を **商空間** と呼ぶ.

商位相の性質

命題 15.3. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を全射とする. このとき, f は商位相 $\mathcal{O}^f$ に関して連続である.

定理 15.4. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を全射とする. このとき,

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^f)$ もコンパクトである.
(2) $(X, \mathcal{O}_X)$ が連結ならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^f)$ も連結である.
(3) $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結ならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^f)$ も弧状連結である.

商空間の例

例 15.5. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を, 例 14.5 で定義された同値関係による $\mathbb{R}$ の商集合とする. このとき, 商空間 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と円 S^1 は同相である.

写像 $f : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ から誘導された写像によって, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ から S^1 への同相写像が与えられる. 同相であることの証明には, f が連続かつ開写像であることを用いる.

例 15.6. $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ を, 次で定義される同値関係による商集合とする: $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$, $y = y'$. このとき, 商空間 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ と円柱は同相である.

例 15.7. $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を, 次で定義される同値関係による商集合とする: $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$, $y - y' \in \mathbb{Z}$. このとき, 商空間 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ とトーラスは同相である.

16　数学通論 II (2012/02/07): 期末試験

注意

証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

定義や用語など

- $\mathbb{R}$ 上の右半直線の位相とは, $\mathcal{O}^+ := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.
- 弧状連結とは, 任意の 2 点が道で結べること.
- 連結とは, 2 つの開集合に分けられないこと.
- コンパクトとは, 任意の開被覆に対して, 有限部分被覆が存在すること.
- ハウスドルフとは, 任意の 2 点が開集合で分離できること.
- $A \subset X$ の相対位相とは, $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}_X\}$.
- $\langle \mathcal{O}' \rangle := \{\emptyset\} \cup \{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \mid O_\lambda \in \mathcal{O}'\}$.
- $\mathcal{O}_X$ と $\mathcal{O}_Y$ の積位相とは, $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$.
- 開写像とは, 任意の開集合の像が開集合となること.
- $\pi : X \to X/\sim$ による商位相とは, $\mathcal{O}^\pi := \{O \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$.
- $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

期末試験問題

[1] $(X, \mathcal{O}_X)$ がハウスドルフであるとする. 次を示せ: $\forall x \in X$, $\{x\}$ は X の閉集合. (20 点)

[2] $\mathbb{R}$ の標準的な位相を $\mathcal{O}$, 離散位相を $\mathcal{O}^d$, 密着位相を $\mathcal{O}^t$, 右半直線の位相を $\mathcal{O}^+$ とする. $\mathbb{R}$ にこれらの位相を入れた空間が以下の性質をみたすかどうかを○×で答えよ: 弧状連結・連結・コンパクト・ハウスドルフ. (証明不要, 20 点)

[3] $(X, \mathcal{O}_X)$ はコンパクトであるとし, A を X の閉集合とする. このとき A は相対位相に関してコンパクトであることを示せ. (20 点)

[4] $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ を共に離散位相とする. これらの積位相 $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ が $X \times Y$ 上の離散位相であることを示せ. (20 点)

[5] 射影 $\pi : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x$ は, 積位相に関して開写像であることを示せ. (20 点)

[6] $\mathbb{R}$ 上の次の同値関係を考える: $t \sim t' :\Leftrightarrow t - t' \in 2\pi\mathbb{Z}$. この同値関係による商空間を $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ で表す. また, 写像 $f : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ を考える. 以下に答えよ.
(1) f を使って $\widetilde{f} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to S^1$ を定義し, それが well-defined であることを示せ. (10 点)
(2) 自然な射影 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ の定義を書き, π が連続であることを示せ. (10 点)

[7] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.