非コンパクト型対称空間の基本事項*

田丸 博士† (広島大学大学院理学研究科)

概要

非コンパクト型対称空間に関する基本的な事項の具体例を紹介する．扱う内容は, 可解リー代数・上半平面・岩澤分解・階別リー代数・放物型部分代数である．一般の非コンパクト型対称空間を調べるためにはルート系などの知識が必要になるが, その準備段階として, ここで述べるような行列計算で扱える具体例を理解しておくことは, 有益だと思われる.

1 リー代数の例

冪零リー代数

定義 1.1. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して,

(1) 次で定義される部分リー代数の列を **降中心列** と呼ぶ: $\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(k)} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$.
(2) リー代数 $\mathfrak{g}$ が **m-step 冪零** とは, 次が成り立つこと: $\mathfrak{g}^{(m)} = 0$ かつ $\mathfrak{g}^{(m-1)} \neq 0$.

例 1.2. 次は冪零リー代数である:

(1) 可換リー代数 (敢えて言えば 1-step).
(2) 狭義の上三角行列全体の成すリー代数 ($n \times n$ 行列なら $(n-1)$-step).
(3) 冪零リー代数の任意の部分リー代数.
(4) Heisenberg リー代数 $\mathfrak{h}_{2n+1}$ (2-step). すなわち, 基底 $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, Z\}$ を持ち, 括弧積の関係式が次で与えられるリー代数:

$$[X_i, Y_i] = Z \quad (\text{for } i \in \{1, \ldots, n\}).$$

可解リー代数

定義 1.3. リー代数 $\mathfrak{g}$ が **可解** とは, 次が成り立つこと: $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が冪零.

例 1.4. 次は可解リー代数である:

(1) 冪零リー代数.

---

* 第 8 回秋葉原微分幾何セミナー (2012/07/14) “warming up lecture” 参考資料
† `tamaru@math.sci.hiroshima-u.ac.jp`

(2) 広義の上三角行列全体の成すリー代数.

(3) 可解リー代数の任意の部分リー代数.

(4) 実双曲空間のリー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$. すなわち, 基底 $\{A, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ を持ち, 括弧積の関係式が次で与えられるリー代数:

$$[A, X_i] = X_i \quad (\text{for } i \in \{1, \ldots, n-1\}).$$

(5) 複素双曲空間のリー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}\mathrm{H}^n}$. すなわち, $\mathrm{span}\{A\}$ と $\mathfrak{h}_{2n-1}$ の半直積であり, ad_A が次で定められているリー代数:

$$[A, X_i] = (1/2)X_i,\ [A, Y_i] = (1/2)Y_i,\ [A, Z] = Z \quad (\text{for } i \in \{1, \ldots, n-1\}).$$

2 上半平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$

定義 2.1. 次を <u>**上半平面**</u> と呼ぶ: $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

岩澤分解

命題 2.2. 上半平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ について, 以下が成り立つ:

(1) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は一次分数変換によって $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ に推移的に作用する.

(2) $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$.

(3) 次で定義される S は $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ に単純推移的に作用する. よって $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \cong S$:

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid a > 0 \right\}.$$

命題 2.3 (岩澤分解). リー代数に関して次が成り立つ:

(1) 上記の S のリー代数は次で与えられ, 実双曲空間のリー代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^2}$ と同型 (特に可解):

$$\mathfrak{s} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \right\}.$$

(2) 分解 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ はベクトル空間の直和分解. ただしここで,

$$\mathfrak{k} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathfrak{o}(2), \quad \mathfrak{a} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{n} := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3) リー代数 $\mathfrak{k}$ はコンパクト, $\mathfrak{a}$ は可換, $\mathfrak{n}$ は冪零.

軌道の幾何

命題 2.4. $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ 内の軌道について, 以下が成り立つ:

(1) 全ての N-軌道は合同 (i.e. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の作用で移り合う).

(2) $A.(\sqrt{-1}+b) \cong (S_b).\sqrt{-1}$, ただし S_b は次に対応する連結リー部分群: $\mathfrak{s}_b := \mathrm{span}\{A+bX\}$.

よって, 全ての N-軌道および A-軌道を調べるためには, $\mathfrak{s}_\theta := \mathrm{span}\{\cos(\theta)A + \sin(\theta)X\}$ (ただし $\theta \in [0, \pi/2]$) に対応する連結リー群 S_θ の原点軌道 $(S_\theta).o$ を考えれば良い.

3 非コンパクト型対称空間 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$

岩澤分解

補題 3.1. 次で定義される S は, $M := \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ に単純推移的に作用する. よって $M \cong S$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) \mid a, b, c > 0 \right\}.$$

命題 3.2 (岩澤分解). リー代数に関して次が成り立つ:

(1) 上の S のリー代数 $\mathfrak{s}$ は次で与えられ, 特に可解:

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}.$$

(2) 分解 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ はベクトル空間の直和分解. ただしここで,

$$\mathfrak{k} := \mathfrak{o}(3), \quad \mathfrak{a} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}, \quad \mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3) リー代数 $\mathfrak{k}$ はコンパクト, $\mathfrak{a}$ は可換, $\mathfrak{n}$ は冪零.

階別リー代数

定義 3.3. $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が **階別リー代数** とは, 次が成り立つこと: $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, $[\mathfrak{g}^p, \mathfrak{g}^q] \subset \mathfrak{g}^{p+q}$.

例 3.4. 次で与えられる分解 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$ は階別リー代数:

$$\mathfrak{g}^{-1} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline * & * & 0 \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^0 := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^1 := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

注意 3.5. 同様に, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ の任意のブロック分割から, 階別リー代数が得られる.

放物型部分代数

定義 3.6. 各階別リー代数に対して, $\mathfrak{q} := \bigoplus_{k\geq 0} \mathfrak{g}^k$ を **放物型部分代数** という.

例 3.7. 次は $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ の放物型部分代数である:

$$\mathfrak{q}_{(2,1)} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{q}_{(1,1,1)} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right) \right\}.$$

命題 3.8 (Langlands 分解).

(1) 分解 $\mathfrak{q}_{(2,1)} = \mathfrak{m}_{(2,1)} \oplus \mathfrak{a}_{(2,1)} \oplus \mathfrak{n}_{(2,1)}$ はベクトル空間の直和分解. ただしここで,

$$\mathfrak{m}_{(2,1)} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathfrak{a}_{(2,1)} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & b \end{array} \right) \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}, \quad \mathfrak{n}_{(2,1)} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

(2) リー代数 $\mathfrak{m}_{(2,1)}$ は簡約型, $\mathfrak{a}_{(2,1)}$ は可換, $\mathfrak{n}_{(2,1)}$ は冪零.

(3) 次は可解リー代数: $\mathfrak{s}_{(2,1)} := \mathfrak{a}_{(2,1)} \oplus \mathfrak{n}_{(2,1)}$.

注意 3.9. 放物型部分リー代数について以下が成り立つ:

(1) 一般の $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ および一般のブロック分割に対して, 上記と同様に放物型部分リー代数や Langlands 分解が得られる.

(2) $(1, 1, \ldots, 1)$ 型のブロック分割から得られる放物型部分リー代数の可解部分は, 岩澤分解の可解部分と一致する.