非コンパクト対称空間内の等質超曲面の幾何と応用

田丸 博士 (広島大学大学院理学研究科)

非可換幾何学と数理物理学 2012
慶應義塾大学
2012/09/14

1　イントロ

1.1　概要

▼ 内容:

- 「非コンパクト対称空間への群作用」に関する話,
- 「リー群上の左不変計量の幾何」に関する話,
- 両者を関連付けて得られた結果.

1.2　目次

対称空間への群作用の幾何 (§2)

- 余等質性 1 作用,
- 軌道の幾何, ...

リー群上の左不変計量 (§3)

- 左不変 Einstein 計量,
- 左不変 Ricci soliton 計量, ...

↘　　↙

対称空間への群作用と左不変計量の関係 (§4)

- 具体例の供給,
- モジュライの記述 (Milnor 型定理),
- 部分多様体による特徴付け, ...

2　対称空間への群作用の幾何

2.1　概要

▼ 前口上:

- $M = G/K$: 非コンパクト型対称空間.
- 特に, M への "余等質性 1 作用" に限定して話をする.

▼ この section の内容:

- 上半平面の場合 (3pp)
- M への余等質性 1 作用 (6pp)

2.2 上半平面の場合 (1/3) - 基本

▼ **定義:**

- $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を **上半平面**.
- 次で与えられる $SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ を **一次分数変換**:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

▼ **定義:**

- $A := \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0\}.$
- $N := \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\}.$

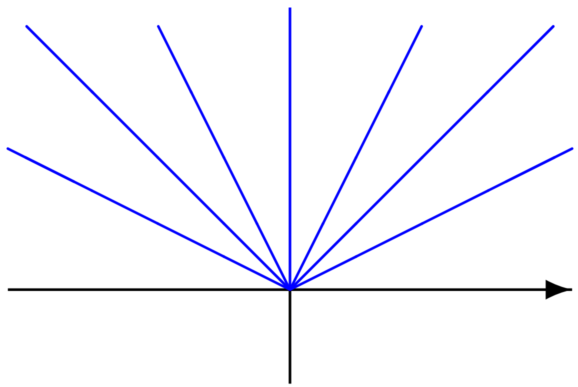
▼ **注意:**

- $SL_2(\mathbb{R}) = SO(2) \cdot A \cdot N$: **岩澤分解**.

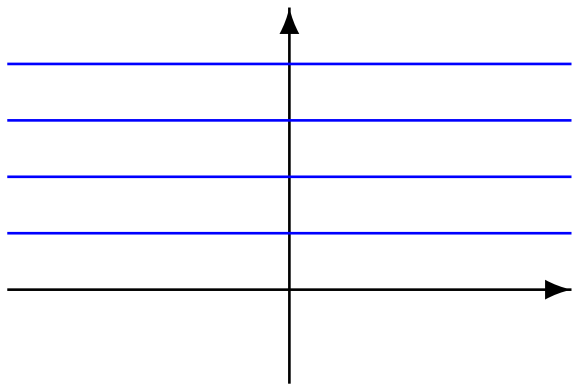
2.3 上半平面の場合 (2/3) - 軌道

- 計算練習:
  - $A \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : z \mapsto \dfrac{az+0}{0z+a^{-1}} = a^2 z.$
  - $N \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z \mapsto \dfrac{1z+b}{0z+1} = z+b.$
- 図:

$A \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$



$N \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$



- 系:
  - $S := AN \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ は単純推移的.

2.4　上半平面の場合 (3/3) - 軌道の幾何

▼ **命題:**

- $A.\sqrt{-1}$ は測地線．これは唯一の極小軌道.
- 全ての N-軌道は合同 (ホロ円)．これは極小ではない.

▼ **補足:**

- $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 \to$ 単位円板：$z \mapsto \dfrac{z - \sqrt{-1}}{z + \sqrt{-1}}$ で移すと下図のようになる:

$A \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$　　　$N \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$

2.5 余等質性 1 作用 (1/6) - 上半平面

▼ **定義:**

- リーマン多様体への等長的作用が **余等質性 1** (**cohomogeneity one**)
  :⇔ 最大次元の軌道 (= 非特異軌道) が余次元 1
  ⇔ 軌道空間が 1 次元.
- H, H' の作用が **軌道同値**
  :⇔ $\exists f \in \mathrm{Isom}(M) : \forall p \in M,\ f(H.p) = H'.f(p)$.

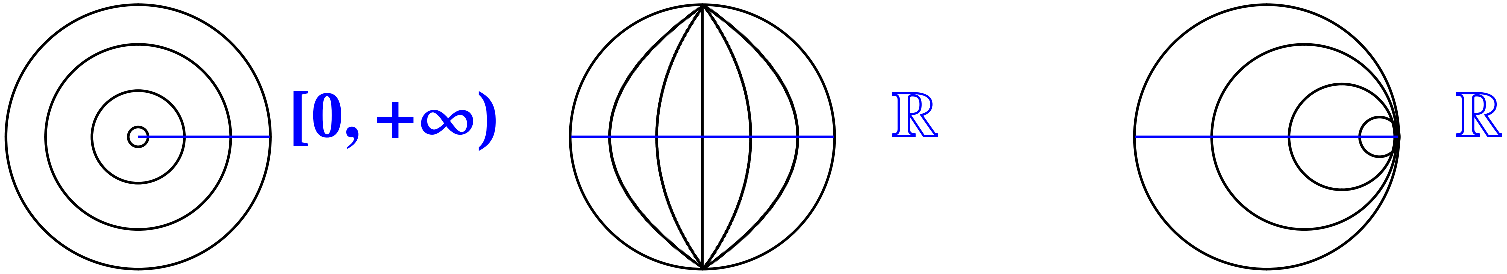
▼ **定理** ($\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$)**:**

- $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ への余等質性 1 作用は, 次のいずれかと軌道同値:
  - $\mathrm{SO}(2)$ の作用,
  - A の作用,
  - N の作用.

2.6 余等質性 1 作用 (2/6) - 軌道空間

▼ 円板モデルで書くと:

$SO(2) \curvearrowright \mathbb{R}H^2$ $\qquad$ $A \curvearrowright \mathbb{R}H^2$ $\qquad$ $N \curvearrowright \mathbb{R}H^2$



▼ 定理 (Berndt-Brück, 2001):

- M : 非コンパクト型対称空間, $H \curvearrowright M$: 余等質性 1

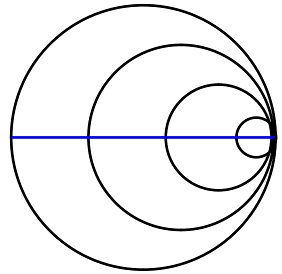
  $\Rightarrow$ ∘ 軌道空間 $\cong [0, +\infty)$ or $\mathbb{R}$.

  ∘ 軌道空間 $\cong [0, +\infty)$ のとき $\exists 1$ 特異軌道 (0 のところ),

  ∘ 軌道空間 $\cong \mathbb{R}$ のとき $\nexists$ 特異軌道.

2.7　余等質性 1 作用 (3/6) - 例

- やること:
  - $N \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の一般化.



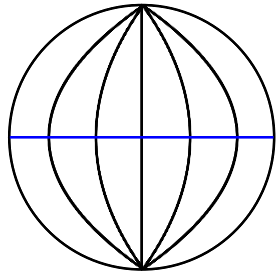
- 記号:
  - $M = G/K$: 非コンパクト型既約対称空間,
  - $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$: 岩澤分解, $\mathfrak{s} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.
- 命題 (Berndt-T., 2003):
  - $\mathfrak{a} \supset \ell$: 1 次元部分空間

    $\Rightarrow$ ∘ $\mathfrak{s}_\ell := (\mathfrak{a} \ominus \ell) \oplus \mathfrak{n}$: 部分リー代数,

    ∘ $S_\ell \curvearrowright M$: 余等質性 1, 特異軌道なし, 全ての軌道が合同.
- 注意:
  - $\mathrm{rank}(M) > 1 \;\Rightarrow\; S_\ell$ の取り方は連続的に存在.

2.8 余等質性 1 作用 (4/6) - 例

- **やること:**
  - $A \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の一般化.
  - 復習: $A.o$ は唯一の極小軌道 (測地線).



$\mathbb{R}$

- **記号:**
  - $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$: 岩澤分解,
  - $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$: 制限ルート系, $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$.

- **命題 (Berndt-T., 2003):**
  - α_i : 単純ルート, $0 \neq X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$

  $\Rightarrow$
  - $\mathfrak{s}_i := \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{n} \ominus \mathbb{R}X_i)$: 部分リー代数,
  - $S_i \curvearrowright M$: 余等質性 1, 特異軌道なし,
  - 原点軌道 $(S_i).o$ が唯一の極小軌道.

2.9　余等質性 1 作用 (5/6) - 分類について

▼ 定理 (Berndt-T., 2003):

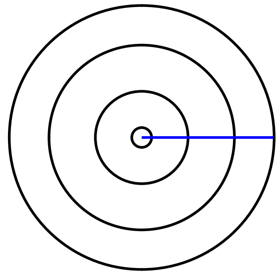
- $H \curvearrowright M$: 余等質性 1, 特異軌道なし

  $\Rightarrow$ 先の S_ℓ or S_i のいずれかの作用に軌道同値.

▼ 残ってる問題:

- 特異軌道を持つ余等質性 1 作用

  i.e., $\mathrm{SO}(2) \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の一般化.



▼ 定理 (Berndt-T., 2007 & to appear):

- 以下の対称空間への余等質性 1 作用の分類:

  $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$, $\mathbb{H}\mathrm{H}^2$, $\mathbb{O}\mathrm{H}^2$, $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$, $G_2^*(\mathbb{R}^5)$, $G_2^2/\mathrm{SO}(4)$.

2.10　余等質性 1 作用 (6/6) - まとめ

▼ まとめ:

◦ M : 非コンパクト型対称空間,

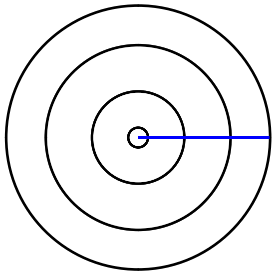
◦ $H \curvearrowright M$: 余等質性 1

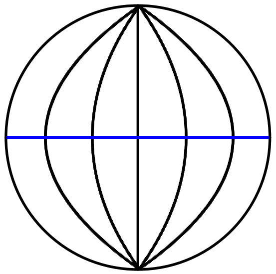
⇒ ◦ 非特異軌道は等質超曲面,

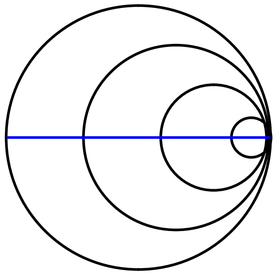
◦ 軌道空間は 1 次元: $[0, +\infty)$ or $\mathbb{R}$,

◦ “特別な軌道が一つだけ” という状況がしばしば起こる.

(特異軌道があればそれ, なくても唯一の極小軌道をもつ場合)







3　左不変計量の幾何

3.1　あらすじ

▼ 背景:

- 左不変計量は “良い” リーマン計量の具体例を供給.
- 問題:　与えられたリー群は “良い” 左不変計量を許容するか？

▼ この section の内容:

- 左不変計量 (3pp)
- 左不変 Einstein 計量 (3pp)
- 左不変 Ricci soliton 計量 (3pp)

3.2 左不変計量 (1/3) - 定義

▼ **定義:**

- リー群 G 上のリーマン計量が **左不変**
  :⇔ 左作用 $L_a : G \to G : g \mapsto ag$ が等長変換.

▼ **命題:**

- G : リー群, $\mathfrak{g}$: G のリー代数
  $\Rightarrow \{G$ 上の左不変計量$\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\mathfrak{g}$ 上の内積$\}$.

▼ **記号:**

- 簡単のため, 次の二つは同一視する:
  - (G, g) : リー群 + 左不変計量,
  - $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$: 内積付きリー代数.

3.3　左不変計量 (2/3) - 曲率

▼ **定義:**

- $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$: 内積付きリー代数,
- 次の $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を **Levi-Civita 接続**:

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle.$$

▼ **定義:**

- **リーマン曲率**: $R(X, Y) := \nabla_{[X,Y]} - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_Y \nabla_X$,
- **断面曲率**: $K_\sigma := \langle R(X, Y)X, Y\rangle$ 　($\{X, Y\} : \sigma$ の o.n.b.)
- **Ricci 曲率**:
  - $\mathrm{ric}(X, Y) := \sum \langle R(E_i, X)E_i, Y\rangle$
  - $\mathrm{Ric}(X) := \sum R(E_i, X)E_i$

    ($\{E_i\} : \mathfrak{g}$ の o.n.b.)

3.4　左不変計量 (3/3) - 例

▼ **自明な例:**

- $\mathfrak{g}$: 可換リー代数, $\langle , \rangle$: 任意の内積

  $\Rightarrow$ $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ は平坦.

▼ **定義:**

- $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n} := \mathrm{span}\{A, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$: 双曲空間のリー代数,

  ただし $[A, X_i] = X_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$.
- (対応する単連結リー群 $\cong \mathbb{R}\mathrm{H}^n$, $n = 2$ のときは前述.)

▼ **演習問題:**

- $\langle , \rangle : \{A, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ を o.n.b にする内積

  $\Rightarrow$ $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}, \langle , \rangle)$: 断面曲率は -1 (一定).

3.5 左不変 Einstein 計量 (1/3) - 定義

▼ 定義:

- $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$: **Einstein**

  $:\Leftrightarrow \ \exists c \in \mathbb{R} \ : \ \mathrm{Ric} = c \cdot \mathrm{id} \quad (\text{i.e., } \mathrm{ric} = c\langle , \rangle).$

▼ 演習問題:

- $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}H^2} := \mathrm{span}\{A_0, X_1, Y_1, Z_0\} : \mathbb{C}H^2$ のリー代数

  ただし, $[X_1, Y_1] = Z_0,$

  $[A_0, X_1] = (1/2)X_1, \ [A_0, Y_1] = (1/2)Y_1, \ [A_0, Z_0] = Z_0.$

- $\langle , \rangle : \{A_0, X_1, Y_1, Z_0\}$ を o.n.b. にする内積

  $\Rightarrow \ (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}H^2}, \langle , \rangle) : \mathrm{Einstein} \ (\mathrm{Ric} = -(3/2) \cdot \mathrm{id}).$

3.6　左不変 Einstein 計量 (2/3) - 背景

- **問題:**
  - G : リー群．左不変 Einstein 計量の存在・非存在を調べよ．
    (構成せよ，必要 / 十分条件を見付けよ, ...)

- **Aleksevskii 予想:**
  - (M, g) : 非コンパクト等質 Einstein 多様体
    $\Rightarrow$ $(M, g) \cong$ "可解リー群 + 左不変計量" ?

- **関連する結果:**
  - $SL_2(\mathbb{R})$ には $\nexists$ 左不変 Einstein 計量 (Milnor, 1976).
  - $SL_3(\mathbb{R})$ の場合ですら未解決...
  - $\dim \leq 5$ なら予想は正しい (Nikonorov, 2005).

3.7　左不変 Einstein 計量 (3/3) - 構造定理

- **記号:**
  - $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$: 内積付き可解リー代数,
  - $\mathfrak{n} := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$: 冪零リー代数,
  - $\mathfrak{a} := \mathfrak{n}^{\perp}$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.

- **定理 (Lauret, 2010):**
  - $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$: Einstein $\Rightarrow$ $\mathfrak{a}$: 可換.

- **定理 (Heber, 1998):**
  - $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$: Einstein

    $\Rightarrow$ $\exists H_0 \in \mathfrak{a}$: $(\mathbb{R}H_0 \oplus \mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ も Einstein.

3.8　左不変 Ricci soliton 計量 (1/3) - 定義

▼ **定義:**

- リーマン多様体 (M, g) が **Ricci soliton**
  $:\Leftrightarrow\ \exists c \in \mathbb{R}, \exists X \in \mathfrak{X}(M)\ :\ \mathrm{ric}_g = cg + \mathfrak{L}_X g.$
- $(G, \langle , \rangle)$ (リー群 + 左不変計量) が **代数的 Ricci soliton**
  $:\Leftrightarrow\ \exists c \in \mathbb{R}, \exists D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})\ :\ \mathrm{Ric}_{\langle , \rangle} = c \cdot \mathrm{id} + D.$

▼ **補足:**

- $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) := \{ D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : \text{線型} \mid D[\cdot, \cdot] = [D(\cdot), \cdot] + [\cdot, D(\cdot)] \}$
  $\cong\ \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})).$

3.9　左不変 Ricci soliton 計量 (2/3) - 性質

- **定理 (Lauret, 2011):**
  - 左不変 Einstein
    $\Rightarrow$ 代数的 Ricci soliton
    $\Rightarrow$ 左不変 Ricci soliton.
  - 完全可解リー群上の左不変 Ricci soliton
    $\Rightarrow$ 代数的 Ricci soliton.

- **定理 (Jablonski, preprint):**
  - 可解リー群上の左不変 Ricci soliton
    $\Rightarrow$ 代数的 Ricci soliton と等長的.

3.10　左不変 Ricci soliton 計量 (3/3) - 性質 2

▼ **定理 (Lauret, 2001):**

- $(\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \langle , \rangle)$: Einstein 可解

  $\Rightarrow$ $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$: 代数的 Ricci soliton.

- $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$: 代数的 Ricci soliton

  $\Rightarrow$ $\exists \mathfrak{a} : (\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \langle , \rangle)$: Einstein 可解.

▼ **例:**

- $\mathfrak{h}^3 := \mathrm{span}\{X, Y, Z\}$: Heisenberg リー代数 (i.e., $[X, Y] = Z$),

  $\langle , \rangle : \{X, Y, Z\}$ を o.n.b. にするリー代数

  $\Rightarrow$ $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$: 代数的 Ricci soliton.

4 対称空間への群作用と左不変計量の関係

4.1 この節のあらすじ

▼ **問題:**

- **G : リー群.**
- **左不変 Einstein / Ricci soliton 計量などの存在・非存在を調べよ.**

▼ **この節のあらすじ:**

(対称空間への群作用 → 左不変計量の幾何への応用)

- **具体例の供給 (3pp)**
- **左不変計量のモジュライ空間 (4pp)**
- **Milnor 型定理 (3pp)**
- **対応する部分多様体 (3pp)**

4.2 具体例の供給 (1/3) - 前置き

- 観察:
  - $M = G/K$: 非コンパクト型対称空間, $G = KAN$: 岩澤分解

    $\Rightarrow$ $S := AN$ は可解, ∃ 左不変 Einstein 計量.

- やっていること:
  - S のリー部分群の軌道 ($S'.p \subset M$) を考えて,

    Einstein / Ricci soliton になるものを見付る.

- 補足:
  - S のリー部分群 S' は可解.
  - $N \subset S$ $\Rightarrow$ $N.o$ は代数的 Ricci soliton (Lauret の結果より).

4.3 具体例の供給 (2/3) - 結果 1

- **記号:**
  - Φ : 単純ルート系 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ の真部分集合,
  - $G \supset Q_\Phi$: 放物型部分群,
  - $Q_\Phi = M_\Phi A_\Phi N_\Phi$: Langlands 分解,
  - $S_\Phi := A_\Phi N_\Phi$.

- **定理 (T., 2011):**
  - $\forall M,\ \forall \Phi,\ (S_\Phi).o$ は Einstein.

- **例:**
  - $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \supset \mathfrak{q}_\Phi = \left\{ \left[\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right] \right\} \supset \mathfrak{s}_\Phi = \left\{ \left[\begin{array}{cc|c} x & 0 & * \\ 0 & x & * \\ \hline 0 & 0 & y \end{array}\right] \right\}.$

4.4 具体例の供給 (3/3) - 結果 2

▼ **事実:**

- $H \curvearrowright \mathbb{C}\mathrm{H}^n$ に対して以下は同値:
  - (1) 特異軌道を持たない,
  - (2) S_1 または N の作用と軌道同値 (前述の記号),
  - (3) S の部分群の作用である.
- このような作用の軌道を **リー超曲面** と呼ぶ.

▼ **定理 (橋永-久保-T., in preparation):**

- リー超曲面が Ricci soliton
  - ⇔ (1) $n > 2$ のとき, $N.o$ (ホロ球面) と合同,
  - (2) $n = 2$ のとき, $(S_1).o$ または $N.o$ (ホロ球面) と合同.

4.5 左不変計量のモジュライ空間 (1/4) - 定義

▼ 記号:

- G : n 次元単連結リー群, $\mathfrak{g}$: そのリー代数.
- $\widetilde{\mathfrak{M}} := \{G$ 上の左不変計量 $\} \cong \{\mathfrak{g}$ 上の内積 $\} \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$.

  (良い左不変計量を探すには $\widetilde{\mathfrak{M}}$ を全て調べる必要がある)

▼ 定義:

- $\langle , \rangle_1, \langle , \rangle_2 \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ が スカラー倍を除いて等長的

  $:\Leftrightarrow \ \exists c > 0, \exists \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) : \langle \cdot, \cdot \rangle_1 = c \langle \varphi^{-1}(\cdot), \varphi^{-1}(\cdot) \rangle_2$.
- 次の商集合を モジュライ空間 と呼ぶ:

  $\mathfrak{PM} := \widetilde{\mathfrak{M}}/$(スカラー倍を除いて等長的).

4.6　左不変計量のモジュライ空間 (2/4) - 性質

▼ 注意:

- $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle_1)$ と $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle_2)$ がスカラー倍を除いて等長的

  $\Rightarrow$ 対応する単連結な $(G, \langle , \rangle_1)$ と $(G, \langle , \rangle_2)$ も,

  (リーマン多様体として) スカラー倍を除いて等長的.

- よって, "特別な左不変計量" を調べるには, $\mathfrak{PM}$ を考えれば十分.

▼ 命題 (児玉-高原-T., 2011):

- $\mathfrak{PM} \cong \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \backslash \widetilde{\mathfrak{M}}$.

▼ ただしここで:

- $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) := \{ c\varphi \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \mid c \in \mathbb{R}^\times, \ \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \}$.
- $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \backslash \widetilde{\mathfrak{M}} := \{ \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle , \rangle \mid \langle , \rangle \in \widetilde{\mathfrak{M}} \}$

  (これを **軌道空間** と呼ぶ).

4.7 左不変計量のモジュライ空間 (3/4) - 簡単な例

▼ **定理 (Lauret, 2003):**

- ∘ G 上の左不変計量がスカラー倍と等長的を除いて一意

  ⇔ そのリー代数が次のいずれか:

  (1) $\mathbb{R}^n$: 可換リー代数,

  (2) $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n} := \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ with $[e_1, e_j] = e_j$ $(j \geq 2)$,

  (3) $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3} := \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ with $[e_1, e_2] = e_3$.

▼ **命題 (児玉-高原-T., 2011):**

- ∘ 上記の (1), (2), (3) のリー代数

  ⇒ $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \widetilde{\mathfrak{M}}$: 推移的

  ⇒ $\mathfrak{P}\mathfrak{M} = \{\mathrm{pt}\}$.

  (これは Lauret の定理の (⇐) の簡単な別証明を与えている)

4.8 左不変計量のモジュライ空間 (4/4) - 例

▼ 例 (児玉-高原-T., 2011):

- $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ with $[e_1, e_2] = e_2$

$$\Rightarrow \circ \ \mathbb{R} \oplus \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \left\{ \left[\begin{array}{c|cc|c} * & 0 & 0 & 0 \\ \hline * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ \hline * & 0 & 0 & * \end{array} \right] \right\},$$

- $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \widetilde{\mathfrak{M}}$: 余等質性 1.

- $$\mathfrak{PM} = \{[g_\lambda.\langle , \rangle_0] \mid g_\lambda = \left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 & 1 \end{array} \right], \ \lambda \geq 0\} \cong [0, +\infty).$$

- 他にも $\forall n \geq 3$, $\exists \mathfrak{g} : \dim \mathfrak{g} = n$, $\dim \mathfrak{PM} = 1$.

4.9 Milnor 型定理 (1/3) - 3 次元の復習

▼ 定理 (Milnor, 1976):

- $\mathfrak{g}$: 3 次元 unimodular リー代数, $\langle , \rangle$: 任意の内積

  $\Rightarrow$ $\exists\{x_1, x_2, x_3\}$: 正規直交基底, $\exists\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

  $$[x_1, x_2] = \lambda_3 x_3, \ [x_2, x_3] = \lambda_1 x_1, \ [x_3, x_1] = \lambda_2 x_2.$$

▼ コメント:

- 各 $\mathfrak{g}$ ごとに $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の取り得る値は確定している.

  (これを使って左不変 Einstein 計量の存在・非存在などが分かる)
- 証明は $\dim = 3$ に強く依存している.

▼ 観察:

- $\dim \mathfrak{g} = 3$ なので $\dim \widetilde{\mathfrak{M}} = 6$. なのにパラメータは 3 つ.

  $\rightarrow$ これは $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\widetilde{\mathfrak{M}}$ を表示している.

4.10　Milnor 型定理 (2/3) - 主定理

▼ 定理 (橋永-T.-寺田, preprint):

- $\mathfrak{PM}$ の具体的な表示 → Milnor 型定理が得られる.

▼ 例 (Milonr 型定理):

- $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ with $[e_1, e_2] = e_2$
- $\langle , \rangle$: 任意の内積

$\Rightarrow$ $\exists k > 0,\ \exists \lambda \geq 0,\ \exists \{x_1, \ldots, x_4\}$: 正規直交基底 wrt $k\langle , \rangle$

s.t. $[x_1, x_2] = x_2 + \lambda x_4$.

▼ 系:

- $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ with $[e_1, e_2] = e_2$

$\Rightarrow$
- Ricci 曲率の符号は $(+, 0, -, -)$ or $(0, 0, -, -)$.
- $\nexists$ 左不変 Einstein 計量.

4.11 Milnor 型定理 (3/3) - コメント

- **再掲 (橋永-T.-寺田, preprint):**
  - $\mathfrak{PM}$ の具体的な表示 → Milnor 型定理が得られる.
- **コメント:**
  - $\mathfrak{PM}$ の表示がきれい (e.g. $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \widetilde{\mathfrak{M}}$ が余等質性 1)
    $\Rightarrow$ 有効な Milnor 型定理.
  - $\mathfrak{PM}$ の表示がきれいでない (e.g. $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ が小さい)
    $\Rightarrow$ Milnor 型定理は得られるが有効でない.

4.12 対応する部分多様体 (1/3) - 定義

▼ **定義:**

- 同値類 $[\langle,\rangle]$ を $\langle,\rangle$ に対応する部分多様体.

  (復習: $[\langle,\rangle] = \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle,\rangle \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$)

▼ **問題:**

- $\langle,\rangle$: 特別な計量 $\Leftrightarrow$ $[\langle,\rangle]$: 特別な部分多様体？

▼ **復習:**

- 非コンパクト型対称空間への余等質性 1 作用

  $\Rightarrow$ "特別な軌道" が唯一つ存在することがしばしば起こる.

4.13　対応する部分多様体 (2/3) - 例

▼ **復習:**

- $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ with $[e_1, e_2] = e_2$

$$\Rightarrow \circ\ \mathfrak{PM} = \left\{[g_\lambda.\langle , \rangle_0] \mid g_\lambda = \left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 & 1 \end{array}\right], \lambda \geq 0\right\} \cong [0, +\infty).$$

- $\langle , \rangle_0$: 代数的 Ricci soliton.
- $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \widetilde{\mathfrak{M}}$: 余等質性 1, $\exists 1$ 特異軌道.

▼ **観察:**

- $g_\lambda.\langle , \rangle_0$: 代数的 Ricci soliton

$\Leftrightarrow\ \lambda = 0$

$\Leftrightarrow\ [g_\lambda.\langle , \rangle_0]$ が (唯一の) 特異軌道.

4.14　対応する部分多様体 (3/3) - 3 次元の場合の結果

▼ 定理 (橋永-T., in preparation):

∘ $\mathfrak{g}$: 3 次元可解リー代数のとき,

$\langle , \rangle$: 代数的 Ricci soliton $\Leftrightarrow$ $\widetilde{\mathfrak{M}} \supset [\langle , \rangle]$: 極小.

(注: $\widetilde{\mathfrak{M}} = GL_3(\mathbb{R})/O(3)$ には自然な $GL_3(\mathbb{R})$-不変計量を入れる)

▼ もう少し詳しく言うと:

リー代数	説明	作用	計量
$\mathfrak{h}^3$	Heisenberg	推移的	$\exists$ Ricci soliton
$\mathfrak{r}_{3,1}$	$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^3}$	推移的	$\exists$ 負定曲率
$\mathfrak{r}_3$	可解	$\nexists$ 極小軌道, 合同性	$\nexists$ Ricci soliton
$\mathfrak{r}_{3,a}$	可解	$\exists$ 極小軌道 (非特異)	$\exists$ Ricci soliton
$\mathfrak{r}'_{3,a}$	可解	$\exists$ 極小軌道 (特異)	$\exists$ Einstein

5　まとめ

5.1　まとめ

▼ 大枠:

- 非コンパクト対称空間 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ への群作用の研究
  → リー群上の左不変計量の幾何の研究に応用できる.
- e.g., $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ による軌道空間の表示
  → 左不変計量のモジュライ空間の表示
  → Milnor 型定理
  → 特別な左不変計量の存在・非存在の判定.
- 特に, $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用が余等質性 1 の場合は, いろいろ上手く行く.

5.2 今後の研究計画

- やりたいこと:
  - 対称空間への群作用を用いた,
    リー群上の様々な左不変な幾何構造の研究.
- 課題 1; 左不変リーマン計量の研究:
  - 非コンパクト対称空間への余等質性 1 でない群作用の研究,
    ↔ もっと一般のリー群における左不変計量の研究.
- 課題 2; 他の左不変な幾何構造の研究:
  - 擬リーマン対称空間 $GL_n(\mathbb{R})/O(p,q)$ への群作用の研究,
    ↔ リー群上の左不変擬リーマン計量の幾何の研究.
  - その他の幾何構造の研究,
    e.g., 左不変エルミート計量, 左不変概複素構造, 左不変シンプレクティック構造, ...