

1 幾何学 A (2012/04/12): 概要説明・平面曲線 (1)

概要説明

幾何学 A および同演習では, 多様体について学ぶ. 多様体とは, 大雑把に言うところ「微分が定義できる位相空間」である. この講義では, 多様体に関して, 主に以下の事柄を紹介する.

- [0] 曲線と曲面
- [1] 多様体の定義
- [2] 多様体での微分
- [3] 多様体の接空間

曲線の助変数表示

以下, I は \mathbb{R} の開集合を表すものとする.

定義 1.1. 写像 $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ (またはその像 $c(I)$) が なめらかな曲線 とは, 次が成り立つこと:

- (i) c は C^∞ -級,
- (ii) $\forall t \in I, c'(t) \neq (0, 0)$.

例 1.2. 次の (1), (2) はなめらかな曲線であり, (3) はなめらかな曲線ではない:

- (1) $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t, 0)$,
- (2) $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$,
- (3) $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t^3, t^2)$.

例 1.2 (3) の曲線は, $y = x^{2/3}$ のグラフになる. これを用いて概形を描くことができる.

問題 1.3 (第 1 回小テスト問題). 写像 $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ で次をみたすものを作れ: $c(\mathbb{R})$ は x 軸となるが, なめらかな曲線ではない. また, それがなめらかな曲線でないことを示せ.

曲線の陽関数表示

定義 1.4. C^∞ -写像 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ に対して,

- (1) $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\}$ を $y = f(x)$ のグラフ,
- (2) $\{(f(y), y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in I\}$ を $x = f(y)$ のグラフ と呼ぶ.

命題 1.5. なめらかな曲線とグラフは以下の意味で対応する:

- (1) グラフは, なめらかな曲線である,
- (2) なめらかな曲線 $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ は, 局所的にはグラフで表される (すなわち, $\forall t \in I, \exists I' \subset I$ (t の開近傍) : $c(I')$ はグラフで表される).

2 幾何学 A (2012/04/19): 平面曲線 (2)

曲線の陽関数表示 (補足)

命題 1.5 (2) の証明には, 次の逆関数定理を使う.

定理 2.1 (逆関数定理). 関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ -級とし, $a \in I$ とする. もし $f'(a) \neq 0$ であるならば, f は a の周りで C^∞ -級の逆関数を持つ.

曲線の陰関数表示

定義 2.2. U を \mathbb{R}^2 の開集合, $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ を関数とする. このとき, $F(x, y) = 0$ が, なめらかな曲線の 陰関数表示 とは, 次が成り立つこと:

- (i) $\exists(x, y) \in U : F(x, y) = 0$,
- (ii) F は C^∞ -級,
- (iii) $\forall(x, y) \in U (F(x, y) = 0), (JF)_{(x,y)} \neq (0, 0)$.

ここで $(JF)_{(x,y)}$ は Jacobi 行列を表す. すなわち,

$$(JF)_{(x,y)} := (F_x, F_y)_{(x,y)}, \quad \text{ただし } F_x := \frac{\partial F}{\partial x}, F_y := \frac{\partial F}{\partial y}.$$

例 2.3. 次はなめらかな曲線の陰関数表示である:

- (1) $ax + by + c = 0$ (ただし $(a, b) \neq (0, 0)$),
- (2) $x^2 + y^2 - 1 = 0$,

例 2.4. 次はなめらかな曲線の陰関数表示でない:

- (1) $xy = 0$,
- (2) $y^2 - x^3 - x^2 = 0$.

問題 2.5 (第 2 回小テスト問題). 例 2.4 (2) の曲線を, 局所的にグラフで表して, その概形を描け. (ヒント: この曲線は x 軸に関して対称, また $x \geq -1$ が成立.)

3 幾何学 A (2012/04/26): 平面曲線 (3)・空間内の曲面 (1)

曲線の陰関数表示 (続き)

命題 3.1. グラフとなめらかな曲線の陰関数表示は、以下の意味で対応する:

- (1) グラフは、陰関数表示することができる、
- (2) $F(x, y) = 0$ をなめらかな曲線の陰関数表示とすると、局所的にはグラフで表される (すなわち、 $\forall (a, b) \in U (F(a, b) = 0)$, $\exists U' \subset U ((a, b)$ の開近傍) : $\{(x, y) \in U' \mid F(x, y) = 0\}$ はグラフで表される).

命題 3.1 (2) の証明には、次の陰関数定理を使う。

定理 3.2 (陰関数定理). $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ -級関数とし、 $F(a, b) = 0$ とする。もし $F_y(a, b) \neq 0$ ならば、 $F(x, y) = 0$ は (a, b) の周りで $y = f(x)$ のグラフで表される。

曲面の助変数表示

以下、 D は \mathbb{R}^2 の開集合を表すものとする。

定義 3.3. 写像 $p : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ が (なめらかな曲面の) 助変数表示 とは、次が成り立つこと:

- (i) p は C^∞ -級、
- (ii) $\forall (u, v) \in D$, $\text{rank}(Jp)_{(u,v)} = 2$.

一般に、 $(2, 3)$ -行列 $A = (x, y)$ に対して、 $\text{rank}(A) = 2$ となる必要十分条件は、 $\{x, y\}$ が一次独立となることである。

例 3.4. 次の (1) は曲面の助変数表示であり、(2), (3) はそうではない:

- (1) (xy 平面) $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, 0)$,
- (2) (一点) $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (0, 0, 0)$,
- (3) (曲線) $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (x(u), y(u), z(u))$.

命題 3.5. なめらかな曲線 $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto c(t) = (x(t), z(t))$ が、次をみたすと仮定する: $\forall t \in I$, $x(t) > 0$. このとき、次は曲面の助変数表示である (これを曲線 c の 回転面 と呼ぶ):

$$p : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

4 幾何学 A (2012/05/10): 空間内の曲面 (2)

曲面の助変数表示 (続き)

例 4.1. 次は曲面の助変数表示である:

- (1) (円柱) $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto (\cos(u), \sin(u), v)$,
- (2) (球面) $p: \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v))$,
- (3) (トーラス) $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto (\cos(u)(2 + \cos(v)), \sin(u)(2 + \cos(v)), \sin(v))$.

問題 4.2 (第 3 回小テスト問題). 例 4.1 (2) で与えられた球面の助変数表示に対して, その定義域を \mathbb{R}^2 に広げたものは助変数表示にはならない. このことを定義に従って示せ.

曲面の陽関数表示

定義 4.3. C^∞ -写像 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 次を $z = f(x, y)$ のグラフ と呼ぶ ($x = f(y, z)$ や $y = f(x, z)$ のグラフも同様に定義する):

$$\{(x, y, f(x)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\}.$$

例 4.4. $z = (x^2/a^2) + (y^2/b^2)$ のグラフを 楕円放物面 と呼ぶ.

命題 4.5. なめらかな曲面の助変数表示とグラフは, 以下の意味で対応する:

- (1) グラフは, なめらかな曲面の助変数表示を持つ,
- (2) なめらかな曲面の助変数表示 $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, 局所的にはグラフで表される
(すなわち, $\forall (u, v) \in D, \exists D' \subset D ((u, v)$ の開近傍) : $p(D')$ はグラフで表される).

上の命題 (2) の証明には, 逆関数定理を使う.

定理 4.6 (逆関数定理). 写像 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C^∞ -級とし, $p \in D$ とする. もし $\text{rank}(Jf)_p = 2$ であるならば, f は p の周りで C^∞ -級の逆写像を持つ.

ここで, 逆関数定理および Jacobi 行列の意味を少し述べておく. まず, C^∞ -級写像 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ の微分 (全微分) とは, 次で定義される線型写像であった:

$$(df)_p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n: X \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(p + tX) - f(p)).$$

この線型写像を, 標準的な基底に関して行列表示したものが, Jacobi 行列である. よって, 上の逆関数定理の仮定「 $\text{rank}(Jf)_p = 2$ 」は, 「微分 $(df)_p$ が線型同型写像」と同値である. すなわち, 逆関数定理をラフに述べると, 「微分が可逆ならば元の写像も (局所的には) 可逆」となる.

5 幾何学 A (2012/05/17): 空間内の曲面 (3) ・ 多様体の定義 (1)

曲面の陰関数表示

定義 5.1. U を \mathbb{R}^3 の開集合, $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ を関数とする. このとき, $F(x, y, z) = 0$ が, なめらかな曲面の 陰関数表示 とは, 次が成り立つこと:

- (i) $\exists(x, y, z) \in U : F(x, y, z) = 0$,
- (ii) F は C^∞ -級,
- (iii) $\forall(x, y, z) \in U (F(x, y, z) = 0), (JF)_{(x, y, z)} \neq (0, 0, 0)$.

例 5.2. 次はなめらかな曲面の陰関数表示である:

- (1) (平面) $ax + by + cz + d = 0$ (ただし $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$),
- (2) (円柱) $x^2 + y^2 - 1 = 0$,
- (3) (球面) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

命題 5.3. グラフとなめらかな曲面の陰関数表示は, 以下の意味で対応する:

- (1) グラフは, 陰関数表示することができる,
- (2) $F(x, y, z) = 0$ をなめらかな曲面の陰関数表示とすると, 局所的にはグラフで表される (すなわち, $\forall(a, b, c) \in U (F(a, b, c) = 0), \exists U' \subset U ((a, b, c)$ の開近傍) : $\{(x, y, z) \in U' \mid F(x, y, z) = 0\}$ はグラフで表される).

位相多様体

多様体とは, 雑に言うところ「 \mathbb{R}^m の開集合を貼り合わせてできた位相空間」である.

定義 5.4. M を位相空間, U を M の開集合, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ を写像とする. このとき, (U, φ) が M の m 次元 座標近傍 とは, 次が成り立つこと: $\exists U' \subset \mathbb{R}^m$ (開集合) s.t. $\varphi : U \rightarrow U'$ は同相写像.

座標近傍は「 \mathbb{R}^m の開集合と同じ」ことを意味する. 多様体は, 全ての点の近傍が「 \mathbb{R}^m の開集合と同じ」ような位相空間として定義する.

定義 5.5. M を位相空間とする. このとき, M が m 次元 位相多様体 とは, 次が成り立つこと:

- (i) M はハウスドルフ空間,
- (ii) $\forall p \in M, \exists(U, \varphi) : m$ 次元座標近傍 s.t. $p \in U$.

例 5.6. 次が成り立つ:

- (1) C^∞ -級関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $y = f(x)$ のグラフは 1 次元位相多様体である.
- (2) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ は 1 次元位相多様体ではない.

6 幾何学 A (2012/05/24): 多様体の定義 (2)

位相多様体 (続き)

命題 6.1. M を位相空間とする. このとき, M が m 次元位相多様体ための必要十分条件は, 次が成り立つこと:

- (i) M はハウスドルフ空間,
- (ii) $\exists \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ s.t. $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆, かつ, 各 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ は m 次元座標近傍.

条件 (ii) を満たす $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を 局所座標系 と呼ぶ.

例 6.2. $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は, 次で定義される局所座標系 $\{(U_x^\pm, \varphi_x^\pm), (U_y^\pm, \varphi_y^\pm)\}$ によって 1 次元位相多様体となる:

$$\begin{aligned}U_x^+ &:= \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}, & \varphi_x^+ : U_x^+ &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y, \\U_x^- &:= \{(x, y) \in S^1 \mid x < 0\}, & \varphi_x^- : U_x^- &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y, \\U_y^+ &:= \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}, & \varphi_y^+ : U_y^+ &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x, \\U_y^- &:= \{(x, y) \in S^1 \mid y < 0\}, & \varphi_y^- : U_y^- &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x.\end{aligned}$$

可微分多様体の定義

定義 6.3. M を位相多様体, $(U, \varphi), (V, \psi)$ を座標近傍とし, $U \cap V \neq \emptyset$ とする. このとき, 次の写像を (U, φ) から (V, ψ) への 座標変換 と呼ぶ: $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$.

例 6.4. 上で定義された S^1 の座標近傍に対して, (U_x^+, φ_x^+) から (U_y^+, φ_y^+) への座標変換は,

$$\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, 1) : y \mapsto \sqrt{1 - y^2}.$$

定義 6.5. M が m 次元 可微分多様体 とは, 次が成り立つこと:

- (i) M は m 次元位相多様体,
- (ii) 全ての座標変換は C^∞ -級.

例 6.6. 以下は可微分多様体である:

- (1) \mathbb{R}^m の開集合 $U (\neq \emptyset)$ (m 次元).
- (2) C^∞ -級関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $y = f(x)$ のグラフ (1 次元),
- (3) 球面 $S^n := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\|^2 = 1\}$ (n 次元).

問題 6.7 (第 4 回小テスト問題). S^2 に対して, S^1 を参考にして $(U_x^+, \varphi_x^+), (U_y^+, \varphi_y^+)$ を定義し, 前者から後者への座標変換を求めよ. ただし, 定義域と値域も明記すること.

7 幾何学 A (2012/05/31): 多様体の定義 (3)

可微分多様体の例

可微分多様体であることを示す際に、座標近傍の数が多いと、全ての座標変換が C^∞ -級であることを確かめるのが大変である。その困難を回避する一つの方法は「できるだけ少ない個数の座標近傍で覆うこと」である。

例 7.1. n 次元球面 S^n は、次の $\{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$ によって n 次元可微分多様体になる:

$$p_\pm := (0, \dots, 0, \pm 1), \quad U_\pm := S^n \setminus \{p_\pm\},$$
$$\varphi_\pm : U_\pm \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 \mp x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 \mp x_{n+1}} \right).$$

これらの座標近傍 (U_\pm, φ_\pm) を p_\pm からの 立体射影 と呼ぶ。

問題 7.2 (第 5 回小テスト問題). $n = 1$ の場合の立体射影について、 (U_-, φ_-) から (U_+, φ_+) への座標変換を求めよ (定義域と値域も明記すること)。

可微分多様体と陰関数表示

可微分多様体であることを示す際に最も便利な方法は、以下で述べるような「陰関数表示を用いる方法」だと思われる。

定理 7.3. U を \mathbb{R}^m の開集合、 $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ を C^∞ -級写像とし、 $M := \{p \in U \mid F(p) = 0\}$ とおく。もし $\text{rank}(JF)_p = k$ ($\forall p \in M$) であるならば、 M は $m - k$ 次元可微分多様体になる。

系 7.4. 以下が成り立つ:

- (1) $S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ は n 次元可微分多様体である。
- (2) U を \mathbb{R}^2 の開集合、 $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ を写像とし、 $F(x, y) = 0$ をなめらかな曲線の陰関数表示とする。このとき、 $M := \{(x, y) \in U \mid F(x, y) = 0\}$ は 1 次元可微分多様体である。
- (3) U を \mathbb{R}^3 の開集合、 $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ を写像とし、 $F(x, y, z) = 0$ をなめらかな曲面の陰関数表示とする。このとき、 $M := \{(x, y, z) \in U \mid F(x, y, z) = 0\}$ は 2 次元可微分多様体である。

8 幾何学 A (2012/06/07): 多様体の定義 (4)

陰関数表示と可微分多様体 (続き)

定理 7.3 の証明には、陰関数定理を用いる。陰関数表示された曲線や曲面の場合には、陰関数定理を用いて、局所的には陽関数 (グラフ) 表示できることを既に示していた。グラフならば、自然に座標近傍が定義される。定理 7.3 は、このようなアイデアで証明できる。

射影空間

定義 8.1. $\mathbb{RP}^n := \{\ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \in \ell: \text{直線}\}$ を n 次元実射影空間 と呼ぶ。

命題 8.2. $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の上の同値関係を次で定める: $x \sim y \Leftrightarrow \exists c \neq 0 : x = cy$. このとき、商集合 X/\sim と \mathbb{RP}^n の間に全単射が存在する。

以下では $\mathbb{RP}^n = X/\sim$ と同一視する。 X には \mathbb{R}^{n+1} の標準的な位相から決まる相対位相を入れ、 X/\sim には自然な射影 $\pi : X \rightarrow X/\sim$ を通して商位相を入れる。

補題 8.3. \mathbb{RP}^n は上の位相に関してハウスドルフである。

各点 $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in X$ に対して、次のように表す (これを 同次座標 と呼ぶ):

$$\pi(x) = [x] = [x_1 : \dots : x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n.$$

補題 8.4. 次で与えられる $\{(U_i, \varphi_i)\}$ によって \mathbb{RP}^n は n 次元位相多様体になる:

$$U_i := \{[x_1 : \dots : x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0\},$$
$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n : [x_1 : \dots : x_{n+1}] \mapsto (1/x_i)(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}).$$

ここで \hat{x}_i は「 x_i を抜く」ことを意味する記号である。例えば、簡単のために $n = 2$ とすると、次が成り立つ: $\varphi_2([x_1 : x_2 : x_3]) = (1/x_2)(x_1, x_3)$.

命題 8.5. 実射影空間 \mathbb{RP}^n は n 次元可微分多様体である。

9 幾何学 A (2012/06/08): 中間試験

注意

- 証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.
- また, 写像を書くときには, 定義域と値域を明記すること.

定義や用語など

- $F(x, y, z) = 0$ がなめらかな曲面の陰関数表示 $:\Leftrightarrow$ (i) $\exists(x, y, z) : F(x, y, z) = 0$, (ii) F は C^∞ -級, (iii) $\forall(x, y, z) (F(x, y, z) = 0), (JF)_{(x, y, z)} \neq (0, 0, 0)$.
- (U, φ) が座標近傍 $:\Leftrightarrow \exists U' \subset \mathbb{R}^m$ (開集合) s.t. $\varphi : U \rightarrow U' : \text{同相}$.
- (U, φ) から (V, ψ) への座標変換は, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$.
- $A \subset X$ の相対位相とは, $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}_X\}$.
- 位相空間がハウスドルフとは, 任意の 2 点が開集合で分離できること.

中間試験問題

[1] 以下が成立する理由を, それぞれできるだけ簡潔に (一文程度で) 述べよ.

- (1) $xy = 0$ で表される \mathbb{R}^2 の部分集合は多様体でない. (10 点)
- (2) 助変数表示されたなめらかな曲線は多様体になるとは限らない. (10 点)

[2] 曲線 $c(t) = (t^2, t^3)$ の概形を描け. ただし凹凸も調べること. (20 点)

[3] U を \mathbb{R}^2 の空でない開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ -級関数とする. 次の集合 M に対して, 以下の間に答えよ:

$$M := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U\}.$$

- (1) M はなめらかな曲面の陰関数表示を持つことを示せ. (20 点)
- (2) 写像 $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ を適切に定義し, (M, φ) が座標近傍となることを示せ. (20 点)

[4] $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に対して,

$$U_x^+ := \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\}, \quad \varphi_x^+ : U_x^+ \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (y, z),$$
$$U_y^+ := \{(x, y, z) \in S^2 \mid y > 0\}, \quad \varphi_y^+ : U_y^+ \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, z)$$

と定義する. このとき, (U_x^+, φ_x^+) から (U_y^+, φ_y^+) への座標変換を求めよ. (20 点)

[5] (X, \mathcal{O}_X) をハウスドルフ位相空間とし, A を X の部分集合とする. このとき, A に相対位相 \mathcal{O}_A を入れた空間もハウスドルフであることを示せ. (20 点)

[6] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.

10 幾何学 A (2012/06/14): 多様体上の可微分写像 (1)

射影空間 (続き)

問題 10.1 (第 6 回小テスト問題). 射影空間 \mathbb{RP}^2 の座標近傍 (U_1, φ_1) を考える. 写像 φ_1 が well-defined であることを示せ. ただしここで,

$$U_1 := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{RP}^2 \mid x_1 \neq 0\}, \quad \varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto (1/x_1)(x_2, x_3).$$

C^∞ -級関数

以下では M を可微分多様体とする.

定義 10.2. 連続関数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ が $p \in M$ で C^∞ -級 とは, 次が成り立つこと: $\exists(U, \varphi) : p$ を含む局所座標 s.t. $f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ -級.

命題 10.3. 連続関数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ が $p \in M$ で C^∞ -級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall(U, \varphi) : p$ を含む局所座標, $f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ -級.

定義 10.4. 連続関数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ が C^∞ -級 とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M, f$ は p で C^∞ -級.

命題 10.5. 連続関数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ が C^∞ -級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall(U, \varphi) : \text{局所座標}, f \circ \varphi^{-1}$ は C^∞ -級.

例 10.6. U を \mathbb{R}^m の開集合とする (U は自然に可微分多様体となる). このとき, 関数 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ が, 定義 10.2 の意味で C^∞ -級であることと, 通常の (微積分の) 意味で C^∞ -級であることは同値.

例 10.7. 円周 S^1 上の関数 $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$ を考える.

(1) S^1 をグラフによって局所座標系を定めた多様体としたとき, f は C^∞ -級関数.

(2) S^1 を立体射影によって局所座標系を定めた多様体としたとき, f は C^∞ -級関数.

11 幾何学 A (2012/06/21): 多様体上の可微分写像 (2)

以下では M, N を可微分多様体とする.

C^∞ -級写像

定義 11.1. 写像 $f: M \rightarrow N$ が連続であるとする.

- (1) f が $p \in M$ で C^∞ -級 とは, 次が成り立つこと: $\exists(U, \varphi): p$ を含む M の座標近傍, $\exists(V, \psi): f(p)$ を含む N の座標近傍 s.t. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ -級.
- (2) f が C^∞ -級 とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M, f$ は p で C^∞ -級.

正確に言うと, 合成写像が定義できるように, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ の定義域は小さく取り直す必要がある.

命題 11.2. 写像 $f: M \rightarrow N$ が連続であるとする. このとき, f が $p \in M$ で C^∞ -級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall(U, \varphi): p$ を含む M の座標近傍, $\forall(V, \psi): f(p)$ を含む N の座標近傍, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ -級.

例 11.3. $a, b > 0$ に対して, 楕円 $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}$ を考える. このとき, 次は C^∞ -級写像: $f: S^1 \rightarrow M: (x, y) \mapsto (ax, by)$.

例 11.4. S^1 に, グラフを用いて局所座標系を定義した多様体を $(S^1)_1$, 立体射影を用いて局所座標系を定義した多様体を $(S^1)_2$ と便宜的に表す. このとき, $\text{id}: (S^1)_1 \rightarrow (S^1)_2$ は C^∞ -級.

問題 11.5 (第 7 回小テスト問題). $(x_0, y_0) \in S^1, x_0 > 0$ とする. 恒等写像 $\text{id}: (S^1)_2 \rightarrow (S^1)_1$ が (x_0, y_0) で C^∞ -級であることを示せ.

命題 11.6. C^∞ -級写像と C^∞ -級写像の合成は, C^∞ -級写像である.

C^∞ -同相

定義 11.7. 写像 $f: M \rightarrow N$ が C^∞ -同相写像 であるとは, 次が成り立つこと:

- (i) f は同相写像,
- (ii) f と f^{-1} は C^∞ -級写像.

M と N の間に C^∞ -同相写像が存在するときに, M と N は C^∞ -同相 であるという.

例 11.8. 次が成り立つ:

- (1) 円と楕円は C^∞ -同相,
- (2) $(S^1)_1$ と $(S^1)_2$ は C^∞ -同相.

12 幾何学 A (2012/06/28): 多様体の接空間 (1)

曲線の接線

定義 12.1. M をなめらかな平面曲線とし, $p \in M$ とする. このとき,

(1) $v \in \mathbb{R}^2$ が M の p での 接ベクトル とは, 次が成り立つこと:

$$\exists \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2: C^\infty\text{-級 s.t. } \gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M, \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v.$$

(2) $T_p M := \{p + v \in \mathbb{R}^2 \mid v \text{ は } p \text{ での接ベクトル}\}$ を M の p での 接線 と呼ぶ.

例 12.2. 円周 S^1 に対して次が成り立つ: $\forall a \in \mathbb{R}, (0, a)$ は $p = (1, 0)$ における接ベクトル.

命題 12.3. 曲線 M に対し, $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ をその助変数表示, $F(x, y) = 0$ を陰関数表示とする. このとき, $p = c(t_0)$ に対して次が成り立つ:

$$\{p + sc'(t_0) \mid s \in \mathbb{R}\} = T_p M = \{p + u \mid (JF)_p u = 0\}.$$

多様体の接ベクトル

可微分多様体 M に対して, $C^\infty(M) := \{f: M \rightarrow \mathbb{R} : C^\infty\text{-級}\}$ と定める.

定義 12.4. M を可微分多様体とする. このとき,

(1) C^∞ -級写像 $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ に対し, 次の $c'(0)$ を c の 0 における 速度ベクトル (または c に沿う 方向微分) と呼ぶ:

$$c'(0): C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}: f \mapsto \frac{d}{dt}(f \circ c)(0).$$

(2) $v: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ が $p \in M$ における 接ベクトル とは, 次が成り立つこと: $\exists c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M: C^\infty\text{-級 s.t. } c(0) = p, c'(0) = v.$

例 12.5. $M = \mathbb{R}^n$ とし, その座標を (x_1, \dots, x_n) と表す. このとき, 次で定義される $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ は p での接ベクトル:

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}: f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

問題 12.6 (第 8 回小テスト問題). $M = \mathbb{R}^n$ とし, 上の記号を用いる. このとき, 次が成り立つ: $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_1(\frac{\partial}{\partial x_1})_p + \dots + a_n(\frac{\partial}{\partial x_n})_p$ は p での接ベクトル.

13 幾何学 A (2012/07/05): 多様体の接空間 (2)

定義 13.1. 可微分多様体 M の $p \in M$ での 接空間 (tangent space) $T_p M$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} T_p M &:= \{v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ は } p \text{ での接ベクトル}\} \\ &= \{c'(0) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M : C^\infty, c(0) = p\}. \end{aligned}$$

接空間と座標近傍

補題 13.2. (U, φ) を M の座標近傍とし, $\varphi : U \rightarrow U'$ が同相写像であるとする. このとき, $\varphi^{-1} : U' \rightarrow M$ は C^∞ -級写像.

命題 13.3. (U, φ) を M の局所座標, $p \in U$ とし, $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ と表す. このとき,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$$

に対して, 次が成り立つ:

- (1) $\text{span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\} \subset T_p M$.
- (2) $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\}$ は一次独立.

接空間と方向微分の空間

定義 13.4. 点 $p \in M$ を考える.

- (1) 次を 積の微分の公式 と呼ぶ: $\forall f, g \in C^\infty(M), v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.
- (2) 次を 方向微分の空間 と呼ぶ: $D_p M := \{v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{線型, 積の微分の公式を満たす}\}$.

問題 13.5 (第 9 回小テスト問題). 次を示せ: $\forall v \in T_p M, v$ は積の微分の公式を満たす.

命題 13.6. 次が成り立つ:

- (1) $T_p M \subset D_p M$,
- (2) $D_p M$ は線型空間.

接空間まとめ

定理 13.7. (U, φ) を M の座標近傍, $p \in U$ とし, $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ と表す. 次が成り立つ:

$$\text{span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\} = T_p M = D_p M.$$

系 13.8. 可微分多様体 M が n 次元のとき, $T_p M$ は n 次元ベクトル空間になる.

14 幾何学 A (2012/07/12): 多様体の接空間 (3)

以下では, 写像 $f: M \rightarrow N$ を C^∞ -級とし, $p \in M$ とする.

微分写像

命題 14.1. 任意の $v \in T_p M$ に対して, $(df)_p v \in D_{f(p)} N = T_{f(p)} N$ が成り立つ. ただし,

$$(df)_p v: C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}: \xi \mapsto v(\xi \circ f).$$

定義 14.2. 次で定義される $(df)_p$ を f の p での 微分写像 と呼ぶ:

$$(df)_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N: v \mapsto (df)_p v.$$

命題 14.3. 曲線 c が $c'(0) \in T_p M$ を満たすとき, 次が成立: $(df)_p(c'(0)) = (f \circ c)'(0)$.

補題 14.4. $c'(0) \in T_p M$ が座標近傍を用いて $c'(0) = \sum a_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ と表せていたとする. このとき, 次が成立: $J(\varphi \circ c)_0 = {}^t(a_1, \dots, a_m)$.

命題 14.5. M の p を含む局所座標を (U, φ) , N の $f(p)$ を含む局所座標を (V, ψ) とする. また, $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$, $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ と表す. このとき, 次が成立:

$$(df)_p(\sum a_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p) = \sum b_j (\frac{\partial}{\partial y_j})_{f(p)},$$

ただし, ${}^t(b_1, \dots, b_n) = J(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot {}^t(a_1, \dots, a_m)$.

系 14.6. 微分写像 $(df)_p$ は線型写像である.

微分写像の性質

問題 14.7 (第 10 回小テスト問題). C^∞ -級写像 $f: L \rightarrow M$, $g: M \rightarrow N$ および $p \in L$ に対して, 次が成り立つことを示せ:

$$d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p.$$

補題 14.8. 恒等写像 $\text{id}: M \rightarrow M$ の微分写像は, 恒等写像である,

命題 14.9. C^∞ -同相写像 $f: M \rightarrow N$ の微分写像は, 線型同型写像である.

系 14.10. M と N が C^∞ -同相ならば, 次元は一致する.

問題 14.11 (期末試験事前レポート問題). 以下のキーワードに関連する期末試験問題を予想せよ. 予想問題をレポートの表紙部分に, 予想問題に対する解答を 2 頁目以降に, それぞれ書け:

(1) 多様体の定義, (2) C^∞ -写像, (3) 接空間, (4) 微分写像, (5) 「理由を一言で述べよ」系の問題.

15 幾何学 A (2012/07/26): ベクトル場・微分形式

ベクトル場

ベクトル場とは、可微分多様体の各点に接ベクトルが付いているような状況を表すものである。

定義 15.1. 可微分多様体 M に対して、

- (1) $TM := \coprod_{p \in M} T_p M$ (ただし \coprod は非交和を表す) を 接束 と呼ぶ、
- (2) $X : M \rightarrow TM$ が M 上の ベクトル場 とは、次が成り立つこと: $\forall p \in M, X_p \in T_p M$.

命題 15.2. (U, φ) を M の座標近傍とし、 $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$ と表す。また X を M 上のベクトル場とする。このとき、次が成立する: $\exists f_i : U \rightarrow \mathbb{R} : X|_U = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

上の各 f_i が C^∞ -級となるとき、 X は C^∞ -級ベクトル場と呼ばれる。

注意 15.3. C^∞ -級ベクトル場 X, Y に対して、新たな C^∞ -級ベクトル場 $[X, Y]$ が定まる (これをベクトル場の 括弧積 と呼ぶ)。

微分形式

定義 15.4. 可微分多様体 M に対して、

- (1) $T_p^* M := \{f : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{線型}\}$ を 余接空間 と呼ぶ、
- (2) $T^* M := \coprod_{p \in M} T_p^* M$ (ただし \coprod は非交和を表す) を 余接束 と呼ぶ、
- (3) $\omega : M \rightarrow T^* M$ が M 上の 1 次微分形式 とは、次が成り立つこと: $\forall p \in M, \omega_p \in T_p^* M$.

命題 15.5. (U, φ) を M の座標近傍とし、 $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$ と表す。

- (1) $\{(dx_1)_p, \dots, (dx_m)_p\}$ は、 $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p\}$ の双対基底、
- (2) ω を M 上の 1 次微分形式とする。このとき、次が成立する: $\exists f_i : U \rightarrow \mathbb{R} : \omega|_U = \sum f_i dx_i$.

上の各 f_i が C^∞ -級となるとき、 ω は C^∞ -級 1 次微分形式と呼ばれる。

注意 15.6. 2 次微分形式 ω も同様に定義できる。ちなみにこのとき、 $\omega_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ となる。各点 p において内積を与える 2 次微分形式を リーマン計量 と呼ぶ。

16 幾何学 A (2012/07/27): 期末試験

注意

- 証明問題の解答を書くときには、まず最初に「示すこと」を書くこと。示すことが正しく書かれていなかったり、答案が著しく読みにくい場合には、採点しないことがあります。

定義や用語など

- (U, φ) から (V, ψ) への座標変換は、 $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$.
- $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ が $p \in M$ で C^∞ とは、 $\exists (U, \varphi) : p$ を含む座標近傍 $: f \circ \varphi^{-1}$ が $\varphi(p)$ で C^∞ .
- $C^\infty(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : C^\infty\}$.
- $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$.
- C^∞ -級曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ に対して、 $c'(0) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \frac{d}{dt}(f \circ c)(0)$.
- $T_p M := \{c'(0) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M : C^\infty, c(0) = p\}$.
- $f : M \rightarrow N : C^\infty$ および $v \in T_p M$ に対して、 $(df)_p v : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R} : \xi \mapsto v(\xi \circ f)$.

期末試験問題

- [1] $X := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ の上の同値関係を次で定める: $x \sim y \Leftrightarrow \exists c \neq 0 : x = cy$. また、商集合を $\mathbb{RP}^2 := X/\sim$ とおく. \mathbb{RP}^2 の座標近傍 $\{(U_i, \varphi_i) \mid i = 0, 1, 2\}$ を、同次座標を用いて定義される標準的なものとする. 例えば、 (U_0, φ_0) は次で与えられている:

$$U_0 := \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{RP}^2 \mid x_0 \neq 0\},$$
$$\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^2 : [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto (1/x_0)(x_1, x_2).$$

- (1) (U_0, φ_0) から (U_1, φ_1) への座標変換を求めよ (定義域と値域も明記すること). (20 点)
(2) 次の写像 f が、 $p := [1 : 0 : 0]$ で C^∞ -級であることを示せ. (20 点)

$$f : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R} : [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto x_0^2 / (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2).$$

- [2] (U, φ) を座標近傍、 $p \in U$ とし、 $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$ と表す. $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p \in T_p M$ を示せ. (20 点)
[3] C^∞ -級写像 $f : M \rightarrow N$ の $p \in M$ における微分写像を $(df)_p$ とする. 曲線 c が $c'(0) \in T_p M$ をみたすとき、 $(df)_p(c'(0)) = (f \circ c)'(0)$ を示せ. (20 点)

- [4] 以下の命題に対して、正しい場合にはその理由を一言で述べ、正しくない場合には反例を簡単に説明せよ.

- (1) $SL_2(\mathbb{R}) := \{g \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ は 3 次元可微分多様体である. (10 点)
(2) なめらかな平面曲線は 1 次元可微分多様体である. (10 点)
(3) 2 つの可微分多様体が C^∞ -同相ならば、次元は等しい. (10 点)
(4) 2 つの可微分多様体の次元が等しいならば、 C^∞ -同相である. (10 点)

- [5] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら、答案に書いて下さい.