1　幾何学 D (2012/10/03): 平面曲線 (1)

平面曲線の定義

定義 1.1. I を $\mathbb{R}$ の開集合とする. 写像 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が **なめらかな曲線の助変数表示** とは, 次が成り立つこと:

(i) c は C^∞-級,

(ii) $\forall t \in I$, $c'(t) \neq (0,0)$.

微分 $c'(t)$ を, t における **速度ベクトル** と呼ぶ. 条件 (ii) は, 速度が 0 にならない (すなわち, 点の運動だと思うと止まらない) ことを意味する.

例 1.2. 以下はなめらかな曲線の助変数表示である:

(1) 直線 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto t\vec{a} + \vec{b}$ (ただし $\vec{a} \neq \vec{0}$).

(2) 円 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t))$ (ただし $r > 0$).

(3) C^∞-関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフ $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, f(t))$.

例 1.3. 以下はなめらかな曲線の助変数表示ではない:

(1) 一点 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (0,0)$.

(2) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2, t^3)$.

助変数表示 c の像 $c(I)$ をなめらかな曲線と呼ぶ. なめらかな曲線 $c(I)$ は, 自己交叉を許容するので, 多様体になるとは限らない.

平面曲線の曲率の定義

定義 1.4. なめらかな曲線の助変数表示 $c : I \to \mathbb{R}^2$ に対して, 次で定義される関数 $\kappa_c : I \to \mathbb{R}$ を **曲率関数**, あるいは単に **曲率** と呼ぶ:

$$\kappa_c(t) := \det(c'(t), c''(t))/|c'(t)|^3.$$

上記の式の分子は, $c(t) = (x(t), y(t))$ を縦ベクトルだと思って作られる行列の行列式である:

$$\det(c', c'') = \det \begin{bmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{bmatrix} = x'y'' - x''y'.$$

例 1.5. 以下のなめらかな曲線の曲率は, 次で与えられる:

(1) 直線 $c(t) = (t, 0)$ に対して, $\kappa_c(t) = 0$.

(2) 円 $c(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$ に対して, $\kappa_c(t) = 1/r$.

(3) 楕円 $c(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$ に対して, $\kappa_c(t) = ab/(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}$.

2　幾何学 D (2012/10/10): 平面曲線 (2)

曲率の性質: 合同での不変性

曲線の曲率は, 回転や平行移動をしても変わらない.

定義 2.1. $c_1 : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線の助変数表示とする. このとき, $c_2 : I \to \mathbb{R}^2$ が c_1 と **向きを保つ合同** であるとは, 次が成り立つこと: $\exists g \in \mathrm{SO}(2), \exists v \in \mathbb{R}^2 : \forall t \in I, c_2(t) = gc_1(t)+v$.

これは要するに c_1 を回転と平行移動で移している. 回転と平行移動と折り返しの合成で移りあう場合は, 単に **合同** と呼ぶ. 合同の条件式は, 上の $\mathrm{SO}(2)$ を $\mathrm{O}(2)$ に代えたものになる.

命題 2.2. $c_1 : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線の助変数表示とし, $c_2 : I \to \mathbb{R}^2$ は c_1 と向きを保つ合同であるとする. このとき以下が成り立つ:

(1) c_2 もなめらかな曲線の助変数表示である.

(2) c_1 と c_2 の曲率は等しい. すなわち, 次が成り立つ: $\kappa_{c_1} = \kappa_{c_2}$.

容易に分かるように, 曲線を折り返すと, その曲率は -1 倍される.

曲率の性質: パラメータ変換での不変性

曲線の曲率は, 助変数表示の取り方に依存しない. 直感的には, 道路の曲がり具合は車でどう走ろうが変わらない, ということと同様.

定義 2.3. $c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線の助変数表示, $t : I' \to I$ を全単射な C^∞-写像とする. このとき, $c \circ t$ が c の **パラメータ変換** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall s \in I'$, $t'(s) > 0$.

このときの関数 $t = t(s)$ も **パラメータ変換** と呼ぶこともある.

命題 2.4. $c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線の助変数表示とし, $c \circ t : I' \to \mathbb{R}^2$ をパラメータ変換とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) パラメータ変換 $c \circ t : I' \to \mathbb{R}^2$ もなめらかな曲線の助変数表示である.

(2) 曲線の曲率はパラメータ変換で不変である. すなわち, $\forall s \in I'$, $\kappa_c(t(s)) = \kappa_{c\circ t}(s)$.

3　幾何学 D (2012/10/24): 平面曲線 (3)

曲率の意味: 加速度

助変数表示を車の走行と考えると, 曲率は「一定の速度で走ったときの加速度」とみなせる.

定義 3.1. なめらかな曲線の助変数表示 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が **弧長パラメータ表示** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall t \in I$, $|c'(t)| = 1$.

弧長パラメータ表示することが,「一定の速度で走る」ことに対応する. 次に,「どんな道路でも一定の速度で走ることができる」ことを示す.

命題 3.2. $c : I \to \mathbb{R}^2$ を助変数表示とする. このとき c をパラメータ変換して, 弧長パラメータ表示することができる. すなわち, $\exists t = t(s)$ (パラメータ変換) : $c \circ t$ は弧長パラメータ表示.

最後に「一定の速度で走ったときの加速度」を求める. そのためには次が必要である.

定義 3.3. 弧長パラメータ表示 $c(t) = (x(t), y(t))$ に対して, ベクトル $n(t) := (-y'(t), x'(t))$ を (左向きの) **単位法ベクトル** と呼ぶ.

命題 3.4. $c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とすると, 次が成り立つ: $\forall t \in I$, $c''(t) = \kappa_c(t) n(t)$.

曲率の意味: 単位法ベクトルの微分

曲率は, 単位法ベクトル $n(t) = (-y'(t), x'(t))$ の微分と考えることができる.

定義 3.5. 弧長パラメータ表示 $c(t)$ に対して, $e(t) := c'(t)$ とおく. このとき, $\{e(t), n(t)\}$ を **フルネ標構** (**Frenet frame**) と呼ぶ.

命題 3.6. 弧長パラメータ表示 $c(t)$ に対して, 次が成り立つ: $n'(t) = -\kappa_c(t) e(t)$.

平面曲線の基本定理

前節で, 回転と平行移動の合成で移りあうならば曲率は同じであることを示した. 逆に, 曲率が同じならばそれらは回転と平行移動で移りあう, ということも言える.

命題 3.7 (フルネの公式). フルネ標構に対して, 次が成り立つ:

$$\begin{pmatrix} e & n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} e & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_c(t) \\ \kappa_c(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 3.8 (平面曲線の基本定理). 任意の C^∞-関数 $\kappa : I \to \mathbb{R}$ に対して, κ を曲率とする曲線の弧長パラメータ表示が, 向きを保つ合同を除いて一意的に存在する.

4　幾何学 D (2012/10/31): 曲面 (1)

問題 4.1 (第 1 回レポート問題). このプリントに記載されていない適当な平面曲線を選んで, その曲率を求めよ. また, 曲率の最大値と最小値も調べること. 可能であれば, 高校生でも計算できる程度に簡単で, しかも面白いものであることが望ましい.

曲面の助変数表示

定義 4.2. D を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. 写像 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ が **なめらかな曲面の助変数表示** とは, 次が成り立つこと: (1) φ は C^∞-級, (2) $\forall (u,v) \in D$, $\mathrm{rank}(J\varphi)_{(u,v)} = 2$.

ここで $(J\varphi)_{(u,v)}$ は Jacobi 行列である. 偏微分を φ_u, φ_v で略記すると, $J\varphi = (\varphi_u, \varphi_v)$ である.

例 4.3. 以下はなめらかな曲面の助変数表示:

(1) 平面 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto u\vec{a} + v\vec{b} + \vec{c}$ (ただし $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立),
(2) C^∞-関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ のグラフ $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (u, v, f(u,v))$.

例 4.4. 以下はなめらかな曲面の助変数表示でない:

(1) 一点 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (0,0,0)$.
(2) 曲線 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (x(u), y(u), z(u))$.
(3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (u^2, u^3, v)$.

命題 4.5. $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), z(t))$ をなめらかな曲線の助変数表示とし, $x(t) > 0$ $(\forall t \in I)$ と仮定する. このとき, 次で定義される $\varphi : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3$ はなめらかな曲面の助変数表示 (これを z-軸を中心とする **回転面** と呼ぶ):

$$\varphi(u,v) := \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u)x(v) \\ \sin(u)x(v) \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

例 4.6. 以下は回転面である:

(1) 円柱 $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$,
(2) 球面の一部 $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus \{(0,0,\pm 1)\}$
(3) トーラス

5　**幾何学** D (2012/10/31): **曲面** (2)

曲面の曲率の定義

定義 5.1. なめらかな曲面の助変数表示 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ に対して, 次で定義される $n : D \to \mathbb{R}^3$ を **単位法ベクトル** と呼ぶ:

$$n(u,v) := \varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v) / |\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)|.$$

ここで $p_u \times p_v$ は, p_u と p_v のベクトル積である. 定義より, $p_u \times p_v$ は p_u, p_v の両方に直交するベクトル. 助変数表示の定義より $|p_u \times p_v| \neq 0$ が成り立つことに注意.

定義 5.2. なめらかな曲面の助変数表示 $p : D \to \mathbb{R}^3$ に対して,

(1) $E := \langle p_u, p_u \rangle$, $F := \langle p_u, p_v \rangle$, $G := \langle p_v, p_v \rangle$ を **第一基本量** と呼ぶ,

(2) $L := \langle p_{uu}, n \rangle$, $M := \langle p_{uv}, n \rangle$, $N := \langle p_{vv}, n \rangle$ を **第二基本量** と呼ぶ,

(3) 次の行列 A を **形作用素** と呼ぶ:

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

(4) $K := \det(A)$ を **ガウス曲率**, $H := (1/2)\mathrm{tr}(A)$ を **平均曲率** と呼ぶ.

形作用素の定義に登場する E, F, G を並べた行列に対して, 逆行列は必ず存在する. このことは, 後で述べる.

例 5.3. ガウス曲率 K および平均曲率 H に対して, 以下が成り立つ:

(1) 平面に対して, $K = 0$, $H = 0$.

(2) 半径 $r > 0$ の円柱に対して, $K = 0$, $H = -1/(2r)$.

(3) 半径 $r > 0$ の球面に対して, $K = 1/r^2$, $H = -1/r$.

6　幾何学 D (2012/11/07): 曲面 (3)

曲率の性質: 合同での不変性

曲線の曲率と同様に, 曲面のガウス曲率および平均曲率は回転や平行移動で不変である.

定義 6.1. $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}^3$ を曲面の助変数表示とする. これらが **合同** (または **向きを保つ合同**) であるとは, 次が成り立つこと:
$\exists g \in \mathrm{O}(3)$ (または $\exists g \in \mathrm{SO}(3)$), $\exists w \in \mathbb{R}^3$ s.t. $\forall p \in D$, $\varphi_2(p) = g\varphi_1(p) + w$.

命題 6.2. $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}^3$ を曲面の助変数表示とし, それぞれのガウス曲率と平均曲率を K_1, K_2, H_1, H_2 で表す. このとき,

(1) φ_1 と φ_2 が合同なら, $K_1 = K_2$, $H_1 = \pm H_2$.
(2) φ_1 と φ_2 が向きを保つ合同なら, $H_1 = H_2$.

証明には, 第一基本量, 第二基本量などが合同によってどう変化するかを調べれば良い.

曲率の性質: パラメータ変換での不変性

曲線の曲率と同様に, 曲面のガウス曲率および平均曲率はパラメータ変換で不変である.

定義 6.3. $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ を曲面の助変数表示, $\xi : D' \to D$ を全単射な C^∞-写像とする. このとき, $\varphi \circ \xi$ が φ の **パラメータ変換** (または **正のパラメータ変換**) であるとは, 次が成り立つこと: $\forall q \in D'$, $\det(J\xi)_q \neq 0$ (または $\det(J\xi)_q > 0$).

このときの写像 $\xi = \xi(q)$ も **パラメータ変換** と呼ぶことがある.

命題 6.4. $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ を曲面の助変数表示, $\xi : D' \to D$ を全単射な C^∞-写像とする. このとき, $\varphi \circ \xi : D' \to \mathbb{R}^3$ も曲面の助変数表示である.

命題 6.5. $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ を曲面の助変数表示とし, $\varphi \circ \xi : D' \to \mathbb{R}^3$ をパラメータ変換とする. それぞれのガウス曲率と平均曲率を K, K', H, H' で表す. このとき,

(1) $K' = K$, $H' = \pm H$.
(2) パラメータ変換が正のときには, $H' = H$.

証明には, 次の関係式を用いると便利:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = {}^t(J\varphi)(J\varphi), \quad \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -{}^t(J\varphi)(Jn).$$

7　幾何学 D (2012/11/14): 曲面 (4)

曲率の意味: 単位法ベクトルの微分

形作用素 A は, 単位法ベクトル $n(u,v)$ の微分を表している. これを確かめるために, まずは微分の定義を復習する.

定義 7.1. D を $\mathbb{R}^m$ の開集合とする. C^∞-写像 $F: D \to \mathbb{R}^n$ の $p \in D$ での **微分** を次で定義する:

$$(dF)_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : v \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(F(p+tv) - F(p)\right)$$

微分は線型写像である. 線型写像 $(dF)_p$ を標準的な基底に関して行列表示したものが, Jacobi 行列 $(JF)_p$ であった.

補題 7.2. 微分 $(dn)_{(u,v)}$ の像は $\mathrm{span}\{\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v)\}$ に含まれる.

命題 7.3. $-(dn)_{(u,v)}(e_1, e_2) = (\varphi_u, \varphi_v)A$.

すなわち, 形作用素 A は, 単位法ベクトル n の微分を表す. 曲面の曲がり具合は n の動きの激しさに表れるので, この命題は, ガウス曲率および平均曲率が曲面の曲がり具合を表すことの直感的な説明である.

曲率の意味: 第一基本量と内積

形作用素の定義に登場した第一基本量 E, F, G は, 接空間上の内積を表している. 以下では, 曲面の助変数表示 $\varphi: D \to \mathbb{R}^3$ を考える.

定義 7.4. 各 $p \in D$ に対して, $\mathrm{I}_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次で定義する:

$$\mathrm{I}_p(X,Y) := \langle (J\varphi)_p X, (J\varphi)_p Y \rangle.$$

命題 7.5. 任意の $p \in D$ に対して以下が成り立つ:

(1) I_p は $\mathbb{R}^2$ 上の正定値内積.

(2) 任意の $X, Y \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathrm{I}_p(X,Y) = {}^t X \begin{pmatrix} E(p) & F(p) \\ F(p) & G(p) \end{pmatrix} Y.$$

系 7.6. 任意の $p \in D$ に対して以下が成り立つ:

(1) $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ は逆行列を持つ.

(2) 形作用素 A は対角化可能.

8　幾何学 D (2012/11/21): 曲面 (5)

第一基本形式

I_p は $\mathbb{R}^2$ の内積を与えていた. ここでは, この I_p を座標 (から得られる基底) を用いて表す.

定義 8.1. 次を $\mathbb{R}^2$ の **双対空間** と呼ぶ: $(\mathbb{R}^2)^* := \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \text{線型}\}$.

補題 8.2. D 上の座標関数 u, v および $p \in D$ に対して, 次が成り立つ:

$$(du)_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x, \quad (dv)_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y.$$

特に $\{(du)_p, (dv)_p\}$ は $(\mathbb{R}^2)^*$ の基底になる.

定義 8.3. 次を $(\mathbb{R}^2)^*$ の **2 階の対称テンソル空間** と呼ぶ:

$$S^2(\mathbb{R}^2)^* := \{\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \text{対称, 双線型}\}.$$

定義 8.4. $\omega_1, \omega_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$ の **対称テンソル** を次で定義する:

$$\omega_1\omega_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto (1/2)(\omega_1(X)\omega_2(Y) + \omega_1(Y)\omega_2(X)).$$

このとき $\omega_1\omega_2 \in S^2(\mathbb{R}^2)^*$ が成立. 特に $\{(du)_p^2, (du)_p(dv)_p, (dv)_p^2\}$ は $S^2(\mathbb{R}^2)^*$ の基底になる.

命題 8.5. 次が成り立つ: $\mathrm{I}_p = E(p)(du)_p^2 + 2F(p)(du)_p(dv)_p + G(p)(dv)_p^2$.

これらの両辺は $S^2(\mathbb{R}^2)^*$ の元である. このとき自然に $\mathrm{I} : D \to S^2(\mathbb{R}^2)^* : p \mapsto \mathrm{I}_p$ と思うことができる.

定義 8.6. $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ を **第一基本形式** と呼ぶ.

第二基本形式

第二基本量 L, M, N は, 形作用素 A の双対を表している.

定義 8.7. $\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ を **第二基本形式** と呼ぶ.

第二基本形式も, 第一基本形式と同様に, $\mathrm{II} : D \to S^2(\mathbb{R}^2)^*$ という写像である. 一方で形作用素は $A : D \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ という写像である. 次の命題は, これらの関係を表す.

命題 8.8. 各 $p \in D$ に対して, $\mathrm{II}_p(X, Y) = \mathrm{I}_p(A_pX, Y)$.

テンソルの言葉を使うと, $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2) = (\mathbb{R}^2)^* \otimes \mathbb{R}^2$ と $(\mathbb{R}^2)^* \otimes (\mathbb{R}^2)^*$ を内積 I_p を使って同一視すると, A_p と II_p は同じものと見なせる, ということを意味する.

9　幾何学 D (2012/11/21): 曲面 (6)

ガウス曲率の性質: ガウスの驚異の定理

ガウス曲率と平均曲率は, 第一基本形式 I と第二基本形式 II から決まっていた. しかし実は, ガウス曲率は第一基本形式だけから決まり, 第二基本形式には依存しない. このことを主張するのがガウスの驚異の定理である.

定義 9.1. 内積空間の間の線型写像 $f : (V_1, \langle , \rangle_1) \to (V_2, \langle , \rangle_2)$ が (内積空間としての) **等長写像** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall X, Y \in V_1$, $\langle X, Y \rangle_1 = \langle f(X), f(Y) \rangle_2$.

ここで, ベクトル空間と内積の組 $(V, \langle , \rangle)$ を **内積空間** と呼ぶ.

定義 9.2. $\varphi_1 : D_1 \to R^3$, $\varphi_2 : D_2 \to R^3$ を曲面の助変数表示とする. このとき, C^∞-級写像 $\xi : D_1 \to D_2$ が (曲面の) **等長写像** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall p \in D_1$, $(d\xi)_p : (\mathbb{R}^2, (\mathrm{I}_1)_p) \to (\mathbb{R}^2, (\mathrm{I}_2)_p)$ が内積空間としての等長写像.

このような等長写像が存在するときに, 二つの曲面は **等長的** であると言う.

定理 9.3 (ガウスの驚異の定理). 曲面の助変数表示 $\varphi_1 : D_1 \to R^3$ と $\varphi_2 : D_2 \to R^3$ が等長的ならば, それらのガウス曲率は等しい. すなわち, 等長写像を $\xi : D_1 \to D_2$ とすると, 次が成り立つ: $\forall p \in D_1$, $(K_1)_p = (K_2)_{\xi(p)}$.

証明は, リーマン多様体の曲率を学んだ後で与える.

例 9.4. 平面と円柱は等長的であり, ガウス曲率は共に恒等的に 0 である.

一方で, 平面と円柱の平均曲率は等しくないことに注意する.

問題

問題 9.5 (第 2 回レポート問題). 弧長パラメータ表示された曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ に対して, その各点に z-軸と平行な直線を付け加えた曲面 $\varphi(u, v) = (x(u), y(u), v)$ を考える. このとき, 曲線 c の曲率と, 曲面 φ のガウス曲率および平均曲率の間の関係を調べよ.

10　幾何学 D (2012/11/28): リーマン多様体 (1)

多様体の接空間 - 復習

多様体 M に対して, $C^\infty(M) := \{f : M \to \mathbb{R} : C^\infty\}$ とおく.

定義 10.1. C^∞-級写像 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ のことを, 多様体 M 内の **曲線** と呼ぶ. 曲線に対して, 次で定義される $c'(0)$ を $t = 0$ での **速度ベクトル** と呼ぶ:

$$c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \tfrac{d}{dt}(f \circ c)(0).$$

定義 10.2. $T_pM := \{c'(0) \mid c :$ 曲線, $c(0) = p\}$ を M の p における **接空間** と呼ぶ.

写像 $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ の全体には, $\mathbb{R}$ の演算によりベクトル空間の構造が入ることに注意する.

命題 10.3. 点 $p \in M$ を含む局所座標を (U, φ) とし, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ と表すと, 次が成り立つ:

$$T_pM = \mathrm{span}\{(\tfrac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\tfrac{\partial}{\partial x_n})_p\}.$$

ただしここで, $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$.

命題 10.4. M が $\mathbb{R}^n$ またはその開集合のとき, 座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ を用いて以下が同一視できる:

$$T_pM \ni \textstyle\sum a_i(\frac{\partial}{\partial x_i})_p \longleftrightarrow {}^t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

多様体の微分写像 - 復習

定義 10.5. 多様体間の C^∞-級写像 $F : M \to N$ の $p \in M$ での **微分写像** $(dF)_p$ を次で定義する:

$$(dF)_p : T_pM \to T_{F(p)}N : c'(0) \mapsto (F \circ c)'(0).$$

微分 $(dF)_p$ は, 曲線 c の取り方に依らないこと, および線型写像であることが分かる.

命題 10.6. $F : M \to N$ を C^∞-級写像とし, $p \in M$ とする. また, p を含む M の座標近傍を $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$, $F(p)$ を含む N の座標近傍を $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_n))$ とする. このとき, 次が成り立つ:

$$(dF)_p(\textstyle\sum a_i(\frac{\partial}{\partial x_i})_p) = (\sum b_j(\frac{\partial}{\partial y_j})_{F(p)}).$$

ただし, ${}^t(b_1, \ldots, b_n) = J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot {}^t(a_1, \ldots, a_m)$.

命題 10.7. $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-級写像とし, $p \in \mathbb{R}^m$ とする. このとき, F の多様体としての微分写像 $(dF)_p : T_p\mathbb{R}^m \to T_{F(p)}\mathbb{R}^n$ と, 通常の微分写像 $(DF)_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ は, 上の同一視の下で一致する.

11　幾何学 D (2012/12/05): リーマン多様体 (2)

ベクトル場 - 復習

定義 11.1. M を多様体とし, $TM := \coprod_{p \in M} T_pM$ とおく. 写像 $X : M \to TM$ が **ベクトル場** であるとは, 次が成立すること: $\forall p \in M$, $X_p \in T_pM$.

以下, (U, φ) を p を含む局所座標とし, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ とおく. M 上のベクトル場 X に対して, 次が成り立つ: $\exists f_i : U \to \mathbb{R}$ s.t. $X|_U = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

定義 11.2. M 上のベクトル場 X が **U 上で C^∞** とは, 次が成り立つこと: $\exists f_i \in C^\infty(U)$ s.t. $X|_U = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

全ての局所座標の上で C^∞ となるベクトル場を, C^∞-級ベクトル場と呼ぶ. M 上の C^∞-級ベクトル場の全体を $\mathfrak{X}(M)$ で表す.

リーマン多様体の定義

定義 11.3. 多様体 M に対して, 次のような対応 g を **リーマン計量** と呼ぶ: 各 $p \in M$ に対して, $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ は内積.

リーマン計量の定義域と値域を正確に述べると, $g : M \to \coprod_{p \in M} S^2(T_p^*M)$. ただし $S^2(T_p^*M)$ は, T_pM 上の対称双線型形式の全体の集合.

例 11.4. $\mathbb{R}^n$ に対して, 次で与えられる g はリーマン計量: $g_p(\sum a_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p, \sum b_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p) := \sum a_i b_i$.

命題 11.5. 曲面の助変数表示 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ に対して, 第一基本形式 $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ は D のリーマン計量.

上と同様に, (U, φ) を p を含む局所座標とし, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ とおく. 曲面の場合と同様に, 対称テンソル $dx_i dx_j$ を定義する. すると, M 上のリーマン計量 g に対して, 次が成り立つ: $\exists g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ s.t. $g|_U = \sum g_{ij} dx_i dx_j$.

定義 11.6. M 上のリーマン計量 g が **U 上で C^∞** とは, 次が成り立つこと: $\exists g_{ij} \in C^\infty(U)$ s.t. $g|_U = \sum g_{ij} dx_i dx_j$.

全ての局所座標の上で C^∞ となるリーマン計量を, C^∞-級リーマン計量と呼ぶ.

例 11.7. $\mathbb{R}^n$ 上の標準的なリーマン計量は $g = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ と表される.

例 11.8. $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ に対して, $g = (1/y^2)(dx^2 + dy^2)$ は M のリーマン計量.

このようなリーマン多様体 (M, g) を **双曲平面** と呼び, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ などで表す.

12　幾何学 D (2012/12/12): リーマン多様体 (3)

ここでは, M を C^∞-級多様体とし, (U,φ) を局所座標, $p \in U$ とし, $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ と表す.

ベクトル場の括弧積 - 局所座標を用いて

定義 12.1. $f \in C^\infty(U)$ に対して, 次のように定める:

(1) $X \in \mathfrak{X}(U)$ に対して, $Xf : U \to \mathbb{R} : p \mapsto X_p f$,

(2) $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R} : p \mapsto (\frac{\partial}{\partial x_i})_p f$.

定義 12.2. $X = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{X}(U)$ の **括弧積** $[X,Y] \in \mathfrak{X}(U)$ を次で定義する:

$$[X,Y] = \sum_{i,j} \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

ここではベクトル場の括弧積を局所座標を使って定義したが, 実は括弧積の定義は局所座標系の取り方に依らず, 多様体全体で定義できる. このことは, 後で解説する.

リーマン多様体の曲率

定義 12.3. リーマン多様体 (M,g) に対して, 次で定義される $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) : (X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ を **共変微分** または **Levi-Civita 接続** と呼ぶ:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g(X,[Z,Y]).$$

上記の式を **Koszul 公式** と呼ぶ. ここで $g(Y,Z) \in C^\infty(M)$ であり $(M \ni p \mapsto g_p(Y_p, Z_p) \in \mathbb{R})$, また $Xg(Y,Z)$ は X による関数の微分であることに注意する.

定義 12.4. 次で定義される $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) : (X,Y,Z) \mapsto R(X,Y)Z$ を, リーマン多様体 (M,g) の **リーマン曲率テンソル** と呼ぶ:

$$R(X,Y)Z := \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z.$$

定義 12.5. (M,g) をリーマン多様体, σ を T_pM の 2 次元部分空間とする. このとき σ の **断面曲率** (**sectional curvature**) K_σ を次で定義する: $K_\sigma = g(R(X,Y)X,Y)_p$, ただし $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ は, $\{X_p, Y_p\}$ が σ の正規直交基底を与えるようなもの.

例 12.6. $\mathbb{R}^n$ に標準的なリーマン計量を入れたとき, $R = 0$.

例 12.7. 双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の断面曲率は, 任意の点において -1 である.

断面曲率の計算には, 次のベクトル場を取ればよい:

$$X = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = y\frac{\partial}{\partial y}.$$

このとき, 以下が成り立つ: $[X,Y] = -X$, $\nabla_X X = Y$, $\nabla_Y X = \nabla_Y Y = 0$.

13　幾何学 D (2012/12/18): リーマン多様体 (4)

ベクトル場の括弧積 - 大域的性質

ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ と $\xi \in C^\infty(M)$ に対して, 以下のように定義する: $C^\infty(M) \ni Xf : p \mapsto X_p f$. これにより $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ と考える.

命題 13.1. ベクトル場全体の集合 $\mathfrak{X}(M)$ に対して, 次が成立する:

$$\mathfrak{X}(M) = \{X : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : \text{線型} \mid X(fg) = X(f)g + fX(g)\ (\forall f, g \in C^\infty(M))\}.$$

定義 13.2. $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, 次で定義される $[X, Y]$ をベクトル場の **括弧積** と呼ぶ:

$$[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : f \mapsto X(Yf) - Y(Xf).$$

命題 13.3. 上で定義した括弧積 $[X, Y]$ は, 以前に局所座標を用いて定義したものと一致する.

命題 13.4. ベクトル場の括弧積に対して次が成り立つ:

(1) $[X, Y] = -[Y, X]$,

(2) $[X, [Y, Z] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

(3) $[X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y]\ \ (\forall f \in C^\infty(U))$.

Levi-Civita 接続の性質

命題 13.5. 写像 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ が Levi-Civita 接続となるための必要十分条件は, 以下をみたすこと:

(1) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,

(2) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

命題 13.6. Levi-Civita 接続 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ は次の性質をみたす:

(1) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,

(2) $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f \nabla_X Y$.

レポート問題

問題 13.7 (第 3 回レポート問題). $D := \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ とし, $g = a^2 \cos^2(v) du^2 + a^2 dv^2$ とおく. このとき, リーマン多様体 (M, g) の断面曲率は, 任意の点において $1/a^2$ であることを示せ.

上のリーマン計量は, 半径 $a > 0$ の球面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ の第一基本形式に他ならない. すなわち, この場合の断面曲率は, ガウス曲率と一致する. 実は一般に, 曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ のガウス曲率と, リーマン多様体 (D, I) の断面曲率は一致する. ガウスの驚異の定理は, このことから証明される.

14　幾何学 D (2013/01/16): リーマン多様体 (5)

曲率の性質

リーマン曲率テンソル R の性質を調べ, 断面曲率 K_σ が σ のみで決まることを確かめる. 以下, 特に断らなくても, $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ 等はベクトル場を表すものとする.

補題 14.1. リーマン曲率テンソル R は次を満たす:

(1) $R(X,Y) = -R(Y,X)$,

(2) $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$,

(3) $fR(X,Y)Z = R(fX,Y)Z = R(X,fY)Z = R(X,Y)(fZ) \quad (\forall f \in C^\infty(M))$.

補題の (1) の証明は自明. (2) の証明は, 命題 13.5 (2) から従う. (3) の証明は, 括弧積の性質および命題 13.6 から従う.

命題 14.2. リーマン曲率テンソル R は次をみたす: $(R(X,Y)Z)_p$ は X_p, Y_p, Z_p のみで決まる. すなわち, $X_p = X'_p$, $Y_p = Y'_p$, $Z_p = Z'_p$ ならば, $(R(X,Y)Z)_p = (R(X',Y')Z')_p$ が成り立つ.

上記のような性質をみたすものをテンソルと呼ぶ. 例えば, リーマン計量 g はテンソルであるが, 括弧積 $[,]$ や Levi-Civita 接続 ∇ はテンソルではない.

命題 14.3. 断面曲率 K_σ は σ のみで決まる. すなわち, $\{X_p, Y_p\}$, $\{X'_p, Y'_p\}$ が共に $\sigma \subset T_pM$ の正規直交基底であるとき, $g(R(X,Y)X,Y)_p = g(R(X',Y')X',Y')_p$ が成り立つ.

15 幾何学 D (2013/01/23): リーマン多様体 (6)

ガウスの驚異の定理の証明

曲面のガウス曲率は第一基本形式 I にしか依存しない, というガウスの驚異の定理を, これまでに述べてきたリーマン多様体の概念を用いて証明する.

曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ を考える. まずは, リーマン多様体 (D, I) の Levi-Civita 接続 ∇ を表示する. 曲面の単位法ベクトル場を n とする. また, $\mathbb{R}^3$ の標準的リーマン計量を $\langle , \rangle$ で表し, その Levi-Civita 接続を $\widetilde{\nabla}$ とする. 第一基本形式 I は, $\langle , \rangle$ の制限によって与えられていた. 以下では, D と $\varphi(D)$ を同一視し, $\varphi(D)$ 上のベクトル場は適当に拡張して $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場だと思う.

命題 15.1. (D, I) の Levi-Civita 接続 ∇ は次で与えられる:

$$\nabla_X Y := \widetilde{\nabla}_X Y - \langle \widetilde{\nabla}_X Y, n \rangle n \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{X}(D)).$$

すなわち $\nabla_X Y$ は, $\widetilde{\nabla}_X Y$ の接方向 (TD-成分) と一致する. 命題の証明には, この ∇ が命題 13.5 の条件を満たすことを確かめれば良い.

命題 15.2. 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X, Y) n$ (Gauss の公式),

(2) $\widetilde{\nabla}_X n = -A(X)$ (Weingarten の公式).

ただし, II は曲面の第二基本形式, A は形作用素を表す. これらを用いると, 曲面のリーマン曲率テンソル R は第二基本形式で表される.

命題 15.3. 任意の $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(D)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \mathrm{II}(X, Z)\mathrm{II}(Y, W) - \mathrm{II}(Y, Z)\mathrm{II}(X, W).$$

これを Gauss 方程式と呼ぶ. 証明には, $\mathbb{R}^3$ のリーマン曲率が 0 であることを用いる. 一般のリーマン部分多様体に対しても, リーマン曲率の差を第二基本形式で表す同様の公式がある.

定理 15.4 (Gauss の驚異の定理). 曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ のガウス曲率と, リーマン多様体 (D, I) の断面曲率は一致する. よって特に, ガウス曲率は第一基本形式だけから決まる.

断面曲率は正規直交基底を選んで計算するが, 選び方に依存しないので, 形作用素 A の固有ベクトルになるようにして良い (A は対角化可能であった). 行列式 $\det(A)$ が固有値の積であることと, 先の Gauss 方程式から, 証明は従う.