複素双曲空間内の等質部分多様体に関するいくつかの話題

田丸 博士 (広島大学大学院理学研究科)

部分多様体の微分幾何学及び関連課題
—前田定廣先生還暦記念研究集会—
佐賀大学
2012/08/05

1　はじめに

1.1　概要

▼ 研究対象:

- 複素双曲空間 $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の等質部分多様体.

▼ $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の等質部分多様体を調べる動機:

- $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の一般の部分多様体の “雛形”.
  (等質な場合に限定しても興味深い例が数多くある)
- 一般の非コンパクト型対称空間内の部分多様体の “雛形”.
  (実双曲空間 $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ だと状況が特殊...)

1.2 目次

- **紹介したいこと:**
  - $\mathbb{C}H^n$ 内の等質超曲面の分類 (Berndt-T., 2007) 以降の話.
  - 最近得られた結果 + いくつかの途中経過報告.

- **本講演の目次:**
  - §2: $\mathbb{C}H^n$ 内の Ricci soliton 超曲面.
  - §3: $\mathbb{C}H^2$ 内の等質な曲面.
  - §4: $\mathbb{C}H^n$ 内の弱鏡映部分多様体.

2　$\mathbb{C}H^n$ 内の Ricci soliton 超曲面

2.1　概要

▼ **前置き:**

- $\nexists$ Einstein 超曲面 in $\mathbb{C}H^n$.
- Einstein $\Rightarrow$ Ricci soliton.
- $\exists$ Ricci soliton 超曲面 in $\mathbb{C}H^n$.

▼ **概要:**

- $\mathbb{C}H^n$ 内の Ricci soliton な “リー超曲面” を分類した.
- joint work with 橋永-久保.

2.2 準備: リー超曲面

▼ **定理 (Berndt-T. 2007):**

- $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の等質超曲面は次のいずれかと合同:

  (A) 全測地的 $\mathbb{C}\mathrm{H}^k$ の tube,

  (B) 全測地的 $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ の tube,

  (N) ホロ球面,

  (S) 等質極小線織超曲面, またはその等距離超曲面,

  (W) 等質極小線織部分多様体 W_{φ}^{2n-k} の tube.

▼ **定義 / 命題:**

- $\mathbb{C}\mathrm{H}^n \supset M$ が **リー超曲面**

  :⇔ 上記の (N) または (S) 型の等質超曲面

  ⇔ 焦部分多様体を持たない等質超曲面

  ⇔ 岩澤分解の可解部分 S の余次元 1 部分群の軌道.

2.3 準備: Ricci soliton

- **定義:**
  - リーマン多様体 (M, g) が **Ricci soliton**
    $:\Leftrightarrow \ \exists c \in \mathbb{R}, \exists X \in \mathfrak{X}(M) \ : \ \mathrm{Ric}_g = cg + \mathfrak{L}_X g.$

- **注意:**
  - Einstein $\Rightarrow$ Ricci soliton.
  - $\nexists$ Einstein 超曲面 in $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$.
  - Leuret (2001, 2011):
    - 冪零 or 可解リー群上の左不変 Ricci soliton の研究,
    - 簡単な系: ホロ球面は Ricci soliton.
  - Cho-木村 (2011):
    - 複素空間形内の Ricci soliton 超曲面の研究. (後述)

2.4 主定理

- **定理 (橋永-久保-T., in preparation):**
  - $n > 2$ のとき, $\mathbb{C}\mathrm{H}^n \supset M$: リー超曲面が Ricci soliton
    $\Leftrightarrow$ $M \cong$ ホロ球面.
  - $n = 2$ のとき, $\mathbb{C}\mathrm{H}^2 \supset M$: リー超曲面が Ricci soliton
    $\Leftrightarrow$ $M \cong$ ホロ球面 or 等質極小線織超曲面.

- **注意:**
  - $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内のリー超曲面 $\cong$ 単連結可解リー群 + 左不変計量.
  - 濱田-星川-T. (to appear):
    - リー超曲面の Ricci 曲率の決定.

2.5 証明の方針

▼ **定義:**

- $(G, \langle , \rangle)$ (リー群 + 左不変計量) が **代数的 Ricci soliton**

  $:\Leftrightarrow\ \exists c \in \mathbb{R}, \exists D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})\ :\ \mathrm{Ric}_{\langle , \rangle} = c\langle , \rangle + D.$

▼ **補題:**

- リー超曲面が Ricci soliton $\Leftrightarrow$ 代数的 Ricci soliton.

(∵) Lauret (2011) の結果から従う. 細かく言うと,

$(\Leftarrow)$ は常に成り立つ.

$(\Rightarrow)$ は, リー超曲面が完全可解リー群であるので, 成り立つ.

▼ **証明の方針:**

- 代数的 Ricci soliton の条件を check すれば良い.
- Ricci 曲率は分かっているので, 後は $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ を計算して, 頑張る.

2.6 コメント

▼ **再掲:**

- $n > 2$ のとき, $\mathbb{C}H^n \supset M$: リー超曲面が Ricci soliton
  $\Leftrightarrow$ $M \cong$ ホロ球面.
- $n = 2$ のとき, $\mathbb{C}H^n \supset M$: リー超曲面が Ricci soliton
  $\Leftrightarrow$ $M \cong$ ホロ球面 or 等質極小線織超曲面.

▼ **定理 (Cho-木村, 2011):**

- $\mathbb{C}P^n$ および $\mathbb{C}H^n$ 内の超曲面について,
  - $\nexists$ コンパクト Hopf 超曲面 s.t. Ricci soliton.
  - $\nexists$ 線織超曲面 s.t. gradient Ricci soliton.

▼ **注意:**

- ホロ球面は, 非コンパクト, Hopf 超曲面, Ricci soliton.
- $\mathbb{C}H^2$ 内の等質極小線織超曲面は, Ricci soliton, 非 gradient.

2.7 Ricci soliton 超曲面に関する今後の問題

▼ **問題:**

- $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内に Ricci soliton 超曲面は他にあるか？
  (等質な場合には, Alekseevskii 予想などを勘案すると,
  他には無さそうな感じがする...)

▼ **問題:**

- 一般の非コンパクト型対称空間内のリー超曲面に対して,
  Ricci soliton になるものを分類せよ.
  ($\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の結果から予想できること:
  Ricci soliton かどうかはルート系の型や重複度に依存する...)

3　$\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ 内の等質な曲面

3.1　概要

▼ **概要:**

- **obtained by 松崎 (2012/03 修士論文).**
- **$\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ への余等質性 2 作用を全てリストアップした.**
  (軌道同値性の判定をすれば, 分類できる)

▼ **用語:**

- **等長的作用が 余等質性 2 :⇔ 最大次元の軌道が余次元 2.**
  ($\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ の場合には等質な曲面を考えることに相当)
- **H, H' の作用が 軌道同値**
  $:\Leftrightarrow\ \exists f \in \mathrm{Isom}(M) : \forall p \in M,\ f(H.p) = H'.f(p).$

3.2 準備: 付随するリー代数の構造

用語:

- $\mathbb{C}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SU}(1,2)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(2))$,
- $\mathfrak{su}(1,2) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$: 岩沢分解,
- $\mathfrak{su}(1,2) \supset \mathfrak{q} := \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$: 放物型部分代数.

事実 (岩澤分解):

- $\exists \{X_1, Y_1, Z_0\}$: $\mathfrak{n}$ の基底 s.t. $[X_1, Y_1] = Z_0$,
- $\exists A_0 \in \mathfrak{a}$ s.t.

$$[A_0, X_0] = (1/2)X_0,\ [A_0, Y_0] = (1/2)Y_0,\ [A_0, Z_0] = Z_0.$$

事実 (放物型部分代数):

- $\exists T_0 \in \mathfrak{k}_0$ s.t.

$$[T_0, A_0] = 0,\ [T_0, X_0] = Y_0,\ [T_0, Y_0] = -X_0,\ [T_0, Z_0] = 0.$$

3.3 主結果: 余等質性 2 作用のリストアップ

- **定理 (松崎, 2012/03):**
  - $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ への余等質性 2 作用は,

    以下のリー代数から得られる作用と軌道同値:

    (1) $\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1) = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1)) \subset \mathfrak{k}$,

    (2) $\mathrm{span}\{T_0, A_0\}$,

    (原点軌道 = 測地線)

    (3) $\mathrm{span}\{T_0, Z_0\}$,

    (原点軌道 = horocycle in $\mathbb{C}\mathrm{H}^1$)

    (4) $\mathrm{span}\{X_1, Z_0\}$,

    (5) $\mathrm{span}\{A_0, X_1\}$,

    (原点軌道 = $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$)

    (6) $\mathrm{span}\{A_0 + tT_0, Z_0\}$.

    (原点軌道 = $\mathbb{C}\mathrm{H}^1$)

3.4 証明の方針

▼ **基本方針:**

- $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ への余等質性 1 作用の分類と同じ方針.

▼ **定理 (Alekseevskii-DiScala, 2003):**

- $H \curvearrowright \mathbb{C}\mathrm{H}^n$: 等長的作用

  $\Rightarrow$ $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{q}$, or H は全測地的軌道を持つ.

▼ **証明のあらすじ:**

- $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{q}$ の場合:
  - $\mathfrak{q}$ の部分リー代数を全てリストアップ (up to 共役).
  - ちなみに $\dim \mathfrak{q} = 5$.
- 全測地的軌道を持つ場合:
  - 各全測地的部分多様体ごとにチェック: $\{o\}$, $\mathbb{R}\mathrm{H}^1$, $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$, $\mathbb{C}\mathrm{H}^1$.

3.5 コメント

- **再掲:**
  - $\mathbb{C}H^2$ への余等質性 2 作用は (1)–(6) のいずれかと軌道同値.
- **参考 (Berndt-DiazRamos, to appear):**
  - $\mathbb{C}H^2$ への余等質性 2, polar 作用は, (1)–(4) のいずれかと軌道同値.
    (先の定理から, これの別証明を与えることができる)
- **コメント:**
  - 作用 (5), (6) は, まだよく分からない.
  - 再掲: (6) $\mathrm{span}\{A_0 + tT_0, Z_0\}$.
  - 作用は $t \in \mathbb{R}$ に依存して連続的に存在.
  - これらは全て互いに軌道同値でない？

3.6 今後の課題

- **残ってる問題:**
  - 得られた余等質性 2 作用の軌道同値性を確認せよ.
  - (そのためにも) 軌道の幾何を調べよ.
- **調べるべき問題:**
  - $\mathbb{C}\mathrm{H}^2$ 内の等質な曲面を分類せよ.
  - その中で極小曲面になるものを決定せよ.
- **派生する問題:**
  - $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ 内の等質な極小部分多様体を構成 / 分類せよ.

4 $\mathbb{C}H^n$ 内の弱鏡映部分多様体

4.1 概要

▼ **動機:**

- $\mathbb{C}H^n$ 内の等質な極小部分多様体を調べたい.
- 井川-酒井-田崎 (2009): 弱鏡映 $\Rightarrow$ austere ($\Rightarrow$ 極小).

▼ **結果:**

- $\mathbb{C}H^n$ 内の等質な弱鏡映部分多様体を構成した.
- ちなみに, 連続的に存在する.

4.2 準備: 弱鏡映部分多様体

- **定義:**
  - $M \supset N$: **austere**
    $:\Leftrightarrow \ \forall p \in N, \ \forall \xi \in \nu_p(N), \ A_\xi$ の固有値全体は -1 倍で不変.
  - $M \supset N$: **弱鏡映**
    $:\Leftrightarrow \ \forall p \in N, \ \forall \xi \in \nu_p(N), \ \exists \sigma \in \mathrm{Isom}(M)$:
    $$\sigma(p) = p, \ \sigma(M) = M, \ (d\sigma)_p(\xi) = -\xi.$$

- **命題 (井川-酒井-田崎, 2009):**
  - 弱鏡映 $\Rightarrow$ austere ($\Rightarrow$ 極小).

- **例:**
  - 余等質性 1 作用の特異軌道は弱鏡映.

4.3 主結果

▼ 復習:

- $\mathfrak{su}(1,n) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \supset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \supset \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$.

▼ 定理 (T.):

- $\mathfrak{g}_\alpha \supset V$: 任意の線型部分空間, $\mathfrak{s}_V := \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{g}_\alpha \ominus V) \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$

  $\Rightarrow$ $\mathfrak{s}_V$ は部分リー代数, 対応する軌道 $(S_V).o$ は弱鏡映.

▼ 証明:

- 法ベクトル $\xi \in V$ を -1 倍できれば良い.
- $\mathbb{C}\mathrm{H}^n \cong S$, ただし $\mathrm{Lie}(S) = \mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.
- $\mathrm{Aut}(\mathfrak{s}) \ni f : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}$ を次で定義: $f|_{\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g}_{2\alpha}} = \mathrm{id}$, $f|_{\mathfrak{g}_\alpha} = -\mathrm{id}$.
- $\mathrm{Aut}(S) \ni \exists F : S \to S$: $(dF)_e = f$.
- この F が欲しい条件をみたす. $\square$

4.4 コメント

- **再掲:**
  - $\mathfrak{g}_\alpha \supset V \;\Rightarrow\; (S_V).o$ は弱鏡映 $(\mathfrak{s}_V := \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{g}_\alpha \ominus V) \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha})$.

- **例 1:**
  - $\dim V = 1$

    $\Rightarrow\; (S_V).o$ は等質極小線織超曲面.

    (austere は知られていた. 弱鏡映は新しい結果.)

- **例 2:**
  - $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}^{n-1} \supset V$: Kähler 角度一定, $\dim V \geq 2$

    $\Rightarrow\; (S_V).o$ は余等質性 1 作用の特異軌道.

    (こちらは既知の事実の別証明)

4.5 今後の課題

▼ **問題:**

- $\mathbb{C}H^n$ 内の等質な弱鏡映部分多様体はどのくらいあるか？
- $\mathbb{C}H^n$ 内の等質な極小部分多様体と, どの程度違うか？
- ……まずは $\mathbb{C}H^2$ 内の等質な極小部分多様体を分類して, 弱鏡映がどのくらいあるかを観察せよ.

▼ **補足:**

- 非コンパクト型対称空間内の弱鏡映部分多様体も, 全く同様にして構成できる.

5　まとめ

▼ **本講演の目次:**

- §2: $\mathbb{C}H^n$ 内の Ricci soliton 超曲面.
- §3: $\mathbb{C}H^2$ 内の等質な曲面.
- §4: $\mathbb{C}H^n$ 内の弱鏡映部分多様体.

▼ **これからやりたいこと:**

- $\mathbb{C}H^n$ 内の等質部分多様体をさらに詳しく調べる.
- それらを基本として,
  非コンパクト型対称空間内の等質部分多様体を調べる.