「等質な空間について」

田丸 博士 (広島大学)

先端数学 (2012/06/08) 講義資料

1 導入

- 等質空間とは:
  - 空間　　集合, 距離空間, 位相空間, (可微分) 多様体, . . .
  - 等質　　どの点の周りでも性質が等しい.
  - 等質空間は, 群と関係する.
  - ちなみに, 田丸の専門分野です.
- 本講義でやること:
  - 等質空間の紹介.
  - 「等質な集合」に話を限定して, 概要を簡単に紹介する.

2　群作用

2.1　群作用の定義

▼ **記号**:

- 以下, G : 群 (単位元 e), M : 集合.

▼ **定義**:

- $\Phi : G \times M \longrightarrow M : (g, p) \mapsto g.p$ が **群作用**

$$:\Leftrightarrow \quad \text{(i)} \ \ \forall g, h \in G, \ \ \forall p \in M, \ \ (gh).p = g.(h.p),$$
$$\text{(ii)} \ \ \forall p \in M, \ \ e.p = p.$$

▼ **記号**:

- 群作用 $\Phi : G \times M \to M$ が存在することを「$G \curvearrowright M$」で表し,
「G は M に作用する」と言う.

2.2 群作用の例

▼ **例**:

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\} \curvearrowright \mathbb{R}^n$.

  $(\because)$ $\Phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (g, p) \mapsto gp$ **(行列の積) より**. $\square$

▼ **例**:

- $\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t gg = I_n\} \curvearrowright S^{n-1}$.

  $(\because)$ $\Phi : \mathrm{O}(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1} : (g, p) \mapsto gp$ **(行列の積) より**. $\square$

▼ **レポート問題** (1): **次を示せ**.

- $\forall g \in \mathrm{O}(n),\ \forall p \in S^{n-1},\ gp \in S^{n-1}$.
- **(ヒント)** $S^{n-1} := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\|^2 = 1\},\ \|p\|^2 = {}^t pp$.

2.3 推移的な作用

▼ **定義:**

- $G \curvearrowright M$ が **推移的**

  $:\Leftrightarrow \ \forall p, q \in M, \ \exists g \in G \ : \ g.p = q.$

  (i.e., **どこからどこへでも移れる**)

▼ **例:**

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ **は推移的でない.**

  $(\because)$ $0 \in \mathbb{R}^n$ **は動かないから.** $\square$

▼ **例:**

- $\mathrm{O}(n) \curvearrowright S^{n-1}$ **は推移的.**

  $(\because)$ **線型代数の知識を使うとできる. 省略.** $\square$

3　等質集合の基礎

3.1　等質集合の定義のアイデア

- 粗く言うと:
  - 等質　　どの点の周りでも性質が等しい.
- 具体例で考察:
  - 円 S^1 は, どの点の周りでも同じ (楕円はそうではない).
  - その理由:
    $\forall p, q \in S^1$ をとる. すると, S^1 を回転させて p を q に移せる.
  - 群作用の言葉を使うと:
    回転群 $\curvearrowright S^1$ が推移的.

3.2 等質集合の定義

▼ **定義:**

- **集合 M が 等質 (正確に言うと G に関して等質)**

  $:\Leftrightarrow\ \exists G \curvearrowright M$: **推移的.**

▼ **例:**

- **球面 S^{n-1} は $\mathrm{O}(n)$ に関して等質.**

  $(\because)$ **前に述べた通り, $\mathrm{O}(n) \curvearrowright S^{n-1}$ が推移的だから.** $\square$

3.3 群の剰余集合

▼ **記号**:

- **以下**, G : **群**, K : G **の部分群**.

▼ **定義**:

- **次を** **K から定まる同値関係**: $g \sim h \ :\Leftrightarrow \ g^{-1}h \in K$.
- **商集合** $G/\sim$ **を** **剰余集合** **と呼び**, G/K **で表す**.

▼ **注意**:

- G/K **の元 (すなわち同値類) を** $[g] = gK$ **などと表す**.
- K : **正規部分群** $\Rightarrow$ G/K : **剰余群 (または商群)**.
- **ここでは**, K **は単なる部分群なので**, G/K **は群とは限らない**.

3.4 等質集合の性質 (1)

▼ **定理** ($G/K \Rightarrow$ **等質**):

- **次で定義される** $G \curvearrowright G/K$ **は推移的**:

$$\Phi : G \times (G/K) \to G/K : (g, [h]) \mapsto g.[h] := [gh].$$

($\because$) **示すことは, 以下の** 3 **つ**:

Φ : well-defined, **作用であること**, **推移的であること**.

[**ここでは推移的であることだけ示す**]

[**示すこと**: $\forall [h], [k] \in G/K, \ \exists g \in G \ : \ g.[h] = [k]$]

$\forall [h], [k] \in G/K$ **をとる**.

$g := kh^{-1} \in G$ **とおく**.

すると $g.[h] = [gh] = [kh^{-1}h] = [k]$. $\square$

3.5　等質集合の性質 (2)

- **定理 (等質 $\Rightarrow G/K$):**
  - **集合** M **が** G **に関して等質**, $o \in M$, $K := \{g \in G \mid g.o = o\}$
    $\Rightarrow$ M **と** G/K **の間に全単射が存在.**

    ($\because$) **写像** f **を次で定める:** $f : G/K \to M : [h] \mapsto h.o.$
    この f **が** well-defined **かつ全単射を示せば良い.** $\square$

- **レポート問題** (2):
  - **上の定理の証明を完成させよ.**

- **用語:**
  - **上で定義した** $\{g \in G \mid g.o = o\}$ **を** <u>o **での固定部分群**</u> **と呼ぶ.**

3.6 例

▼ **例:**

- $S^{n-1} = \mathrm{O}(n)/B$, **ただし** $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(n-1) \right\}$.

  $(\because)$ $o := e_1 \in S^{n-1}$ **とおく**.

  [**示すこと**: $B = \{g \in \mathrm{O}(n) \mid go = o\}$]

  $(\subset)$ **の証明は簡単**.

  $(\supset)$ **の証明には**, $\mathrm{O}(n)$ **の定義の条件を用いる**. $\square$

▼ **注意:**

- **次のように略記することが多い**: $S^{n-1} = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1)$.

▼ **レポート問題** (3):

- **上の** $(\supset)$ **の部分を示せ**.

3.7 補足

▼ まとめ:

- 集合 M が等質 $\Leftrightarrow G/K$ と表示できる.
- 等質集合は, G と K の情報で完全に決まる.

▼ 等質な位相空間の場合:

- 位相群 (群 + 位相空間) を考える.
- G/K も位相空間になる (商位相).

▼ 等質な多様体の場合:

- リー群 (群 + 多様体) を考える.
- G/K も (しかるべき条件下で) 多様体になる.

4　等質集合の応用

4.1　射影空間

▼ **定義:**

- $\mathbb{RP}^n := \{\ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \in \ell : \text{直線}\}$ を n **次元実射影空間**という.
- $0 \neq x \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して, $[x] := \{cx \mid c \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{RP}^n$ と表す.

▼ **命題:**

- $\mathbb{RP}^n = \mathrm{O}(n+1)/(\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n))$,

  ただし $\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(1), \beta \in \mathrm{O}(n) \right\}$.

  $(\because)$ $\mathrm{O}(n+1) \curvearrowright \mathbb{RP}^n$ は次で与えられる: $g.[x] = [gx]$.

  推移的であることは, 球面の場合を考えれば示せる.

  あとは $o = [e_1]$ での固定部分群を求めれば良い.　$\square$

4.2　応用例: 部分多様体

▼ **命題**:

∘ $\mathbb{RP}^2 = \mathrm{O}(3)/(\mathrm{O}(1)\times\mathrm{O}(2)) \subset \mathbb{R}^5$.

(∵) $V := \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0,\ {}^tX = X\}$ **とおく**.

このとき $V = \mathbb{R}^5$.

次によって $\mathrm{O}(3) \curvearrowright V$: $g.X := gXg^{-1}$.

[step 1: V **の部分集合** M **を定める**]

$$A := \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \in V$$ **とおく**.

$M := \mathrm{O}(3).A = \{g.A \in V \mid g \in \mathrm{O}(3)\}$ **とおく (これを 軌道)**.

[step 2: $M = \mathbb{RP}^2$ **を示す**]

$\mathrm{O}(3) \curvearrowright M$ **が推移的なことは容易**.

A **における固定部分群** $= \mathrm{O}(1)\times\mathrm{O}(2)$ **を確かめれば良い**. □

4.3 補足

▼ 命題:

- 先の命題と同様に次が成り立つ:

  $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \subset \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2-1} = \{X \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0,\ {}^tX = X\}$.

4.4 まとめ

▼ まとめ:

- 等質空間 G/K (幾何) は, 群 G, K (代数) を使って研究可能.
- 行列群 (例えば $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ や $\mathrm{O}(n)$) は重要な例.
- 「等質空間の幾何 = 群論と線型代数を使った幾何」

  (注: イメージです)