

曲線の微分幾何入門

第三部 「高速道路のジャンクションは何であんな形なのか」

田丸 博士 (広島大学)

広島大学附属高等学校 SSH 先端研究実習

2012/06/30

1 ここまでのあらすじ

第一部:

- 曲線の曲率の基本事項
 - ・ なめらかな曲線の定義: $c(t) = (x(t), y(t))$
 - ・ 曲線の曲率の定義: $k(t) = \det(c'(t), c''(t)) / |c'(t)|^3$
- いくつかの曲線の曲率に関する実習
 - ・ 放物線や楕円で一番曲がってるのはどこ？

第二部:

- 曲線の曲率のいくつかの性質
 - ・ 曲率の性質: 表示方法を取り換えたら？
 - ・ 曲率の意味: 一定の速さで走ったときの加速度
- いくつかの曲線の曲率に関する実習
 - ・ 性質を具体例で確かめてみましょう

2 第三部へのイントロ

2.1 問題設定 (1)

漠然とした問題:

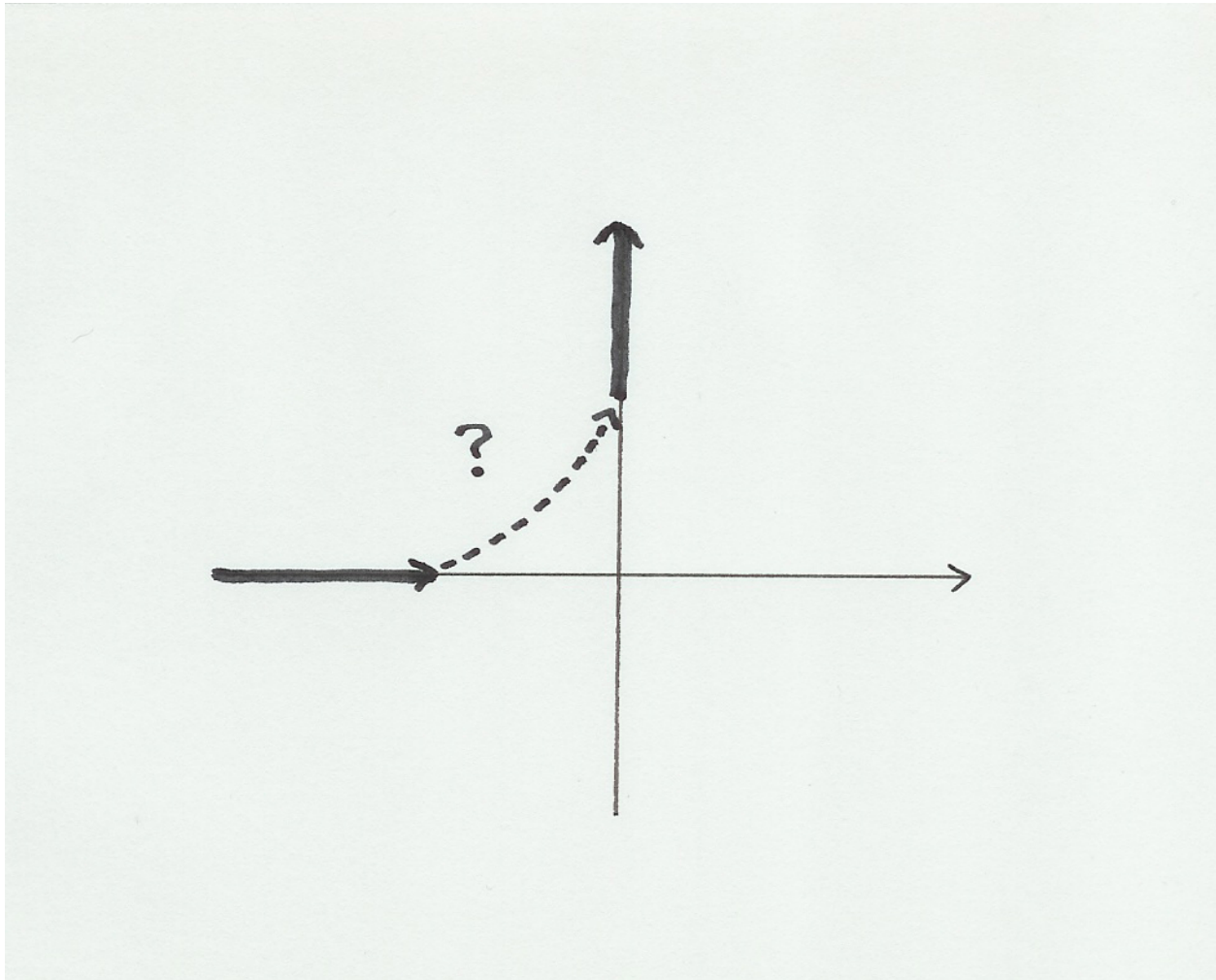
- 道路は, どんな曲線にするのが最適か?



2.2 問題設定 (2)

もう少し限定して, 次の問題を考える:

- 下図の点線を結ぶ道路は, どんな曲線が最適か?



2.3 考え方

Step 1: 目的を設定する.

- 今の場合は「安全な道路」に設定する.
- 「運転しやすい」「事故が起きにくい」と言っても良い.

Step 2: 上記の目的を数学的に定式化する.

- 問題を「 $f(x)$ の性質をみたす曲線を見付けよ」と言い換える.
- ただし、 $f(x)$ には数学的な用語が入る.

Step 3: 与えられた数学の問題を解く.

- ここが、数学の問題.
- 高校までの数学は、この Step 3 しかやっていない(と思う).

3 Step 2: 目的を数学的に定式化する

3.1 道路と曲率に関する準備

道路の曲がり具合は、実際に曲率を使って表している:

- 半径 r の円の曲率は, $1/r$ だった.
- つまり, 曲率 $k (> 0)$ なら, 半径 $1/k$ の円と同じだけ曲がっている.



3.2 道路と曲率に関する考察

曲率 k の道路を走るには:

- $k = 0 \Leftrightarrow$ ハンドルは真っすぐ.
- $|k|$ が大きい \Leftrightarrow カーブがきつい \Leftrightarrow ハンドルを大きく切る.
- $|k|$ が小さい \Leftrightarrow カーブが緩やか \Leftrightarrow ハンドルを小さく切る.

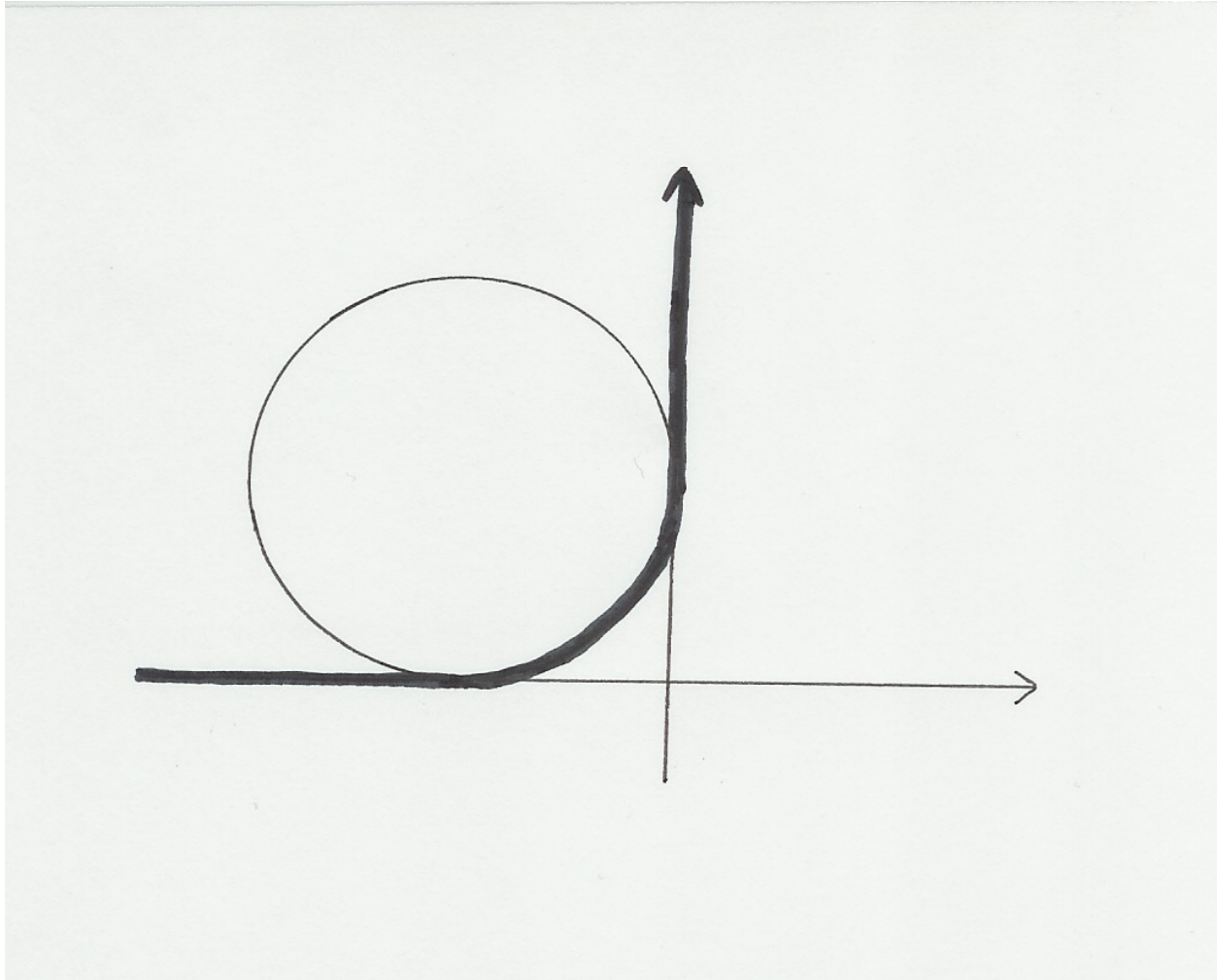
ということで:

- 道路の曲率が急激に変化する
 - \Rightarrow 急ハンドルを切らなくてはいけない
 - \Rightarrow 危険で運転しにくい.

3.3 運転しにくい道路

運転しにくい道路の例:

- 直線を円で繋いだだけの道路は, 急ハンドルが必要.



3.4 運転しやすい道路

運転しやすい道路:

- ハンドルを一定の速さで切れば良いような道路。
(これなら急ハンドルは不要)
- すなわち, 曲率が一定の速さで変化するような道路.
- すなわち, 曲率が $k(t) = at$ (a は定数) となる曲線が良い.

ということで数学の問題になった:

- a を定数とする.
- 曲率が $k(t) = at$ をみたす曲線を描け.

4 Step 3: 与えられた数学の問題を解く

4.1 問題再掲

問題:

- 曲率が $k(t) = at$ (ただし a は定数) をみたす曲線を描け.

具体的には次が問題:

- 上記のような曲線は存在するのか？
- 存在するとしたら, いくつあるのか？

4.2 平面曲線の基本定理

平面曲線の基本定理:

- $k(s)$ が微分可能ならば, 次をみたす曲線 $c(s)$ が存在する:
 - (i) 曲線 $c(s)$ の曲率は $k(s)$,
 - (ii) 全ての s に対して, $|c'(s)| = 1$.
- 上の (i), (ii) をみたす曲線は一つしかない.
(ただし回転と平行移動で移り合う曲線は同じと考える)

証明の雰囲気:

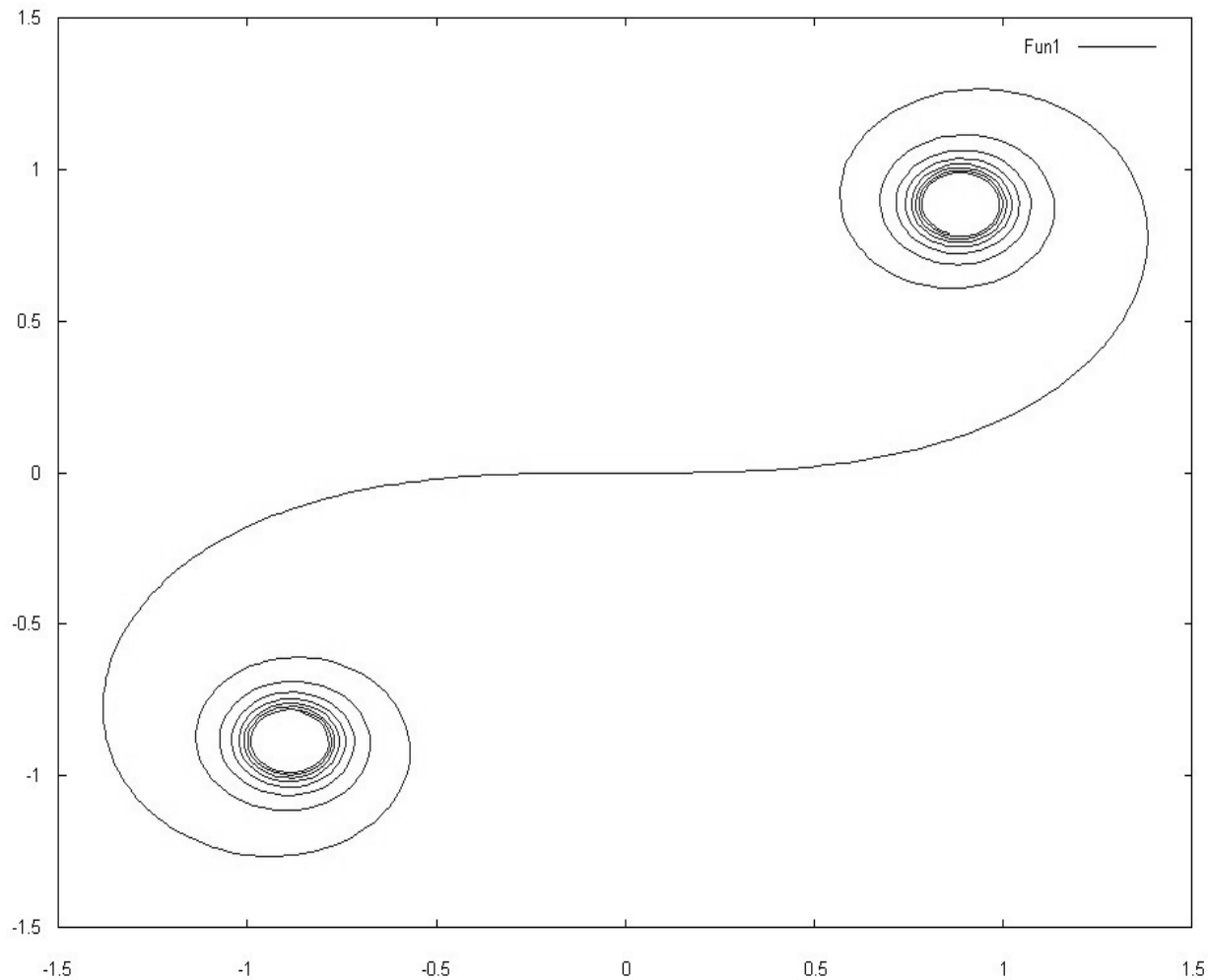
- 曲線 $c(s)$ は具体的に次のように書ける:

$$c(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^t \kappa(u) du\right) dt, \int_0^s \sin\left(\int_0^t \kappa(u) du\right) dt \right)$$

4.3 答: クロソイド曲線

結論:

- $k(s) = as$ をみたす曲線は唯一つ存在 (クロソイド曲線 という).
- この曲線が, 実際に道路のカーブには使われている.



4.4 おまけ (1)

クロソイド曲線に関する雑学:

- クローソー（ギリシャ神話の女神の名前）が由来。
- 殆ど全ての高速道路に利用されている。

（ジャンクションだけでなく、カーブでも、一般道でも）

国土交通省の HP から引用:

- 日本初のクロソイド曲線道路は、昭和 27 年 (1952 年)。
- 場所は三国峠。
- 以前の道路は、直線と円の組み合わせで、非常に事故が多かった。
- クロソイド曲線に変えてから、事故が激減した (らしい)。

4.5 おまけ (2)

クロソイド曲線は, 他にも使われている:

- 鉄道の線路.
- ジェットコースター (直線と円だけだとムチ打ちになる).



5 最後

コメント:

- 車に乗ったときに, 道路の形に注目してみてください.

お疲れさまでした.