

曲線の微分幾何入門

田丸 博士* (広島大学大学院理学研究科)

概要

平面上に描かれたなめらかな曲線に対して、その曲がり具合を表す「曲率」と呼ばれる量を定義し、様々な曲線の曲率を具体的に計算する。また、曲率の性質や意味を紹介し、それらを具体例で確かめる。なお、本稿は、広島大学付属高等学校 SSH 先端研究実習 (2012/06/30 実施) の参考資料である。実習では参加者にその場で様々な計算をして貰うので、本稿には問題の「答え」は書かれていない。

1 曲線の曲率の基本事項

定義 1.1. 写像 $c(t) = (x(t), y(t))$ のことを 曲線 と呼ぶ。

例 1.2. 以下は曲線である:

- (1) 半径 $r > 0$ の円. 例えば $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$ とすれば良い.
- (2) $y = f(x)$ のグラフ. 例えば $c(t) = (t, f(t))$ とすれば良い.

定義 1.3. 曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ が次をみたすときに なめらかな曲線 であると言う:

- (i) 写像 c が (何回でも) 微分可能,
- (ii) 全ての t に対して, $c'(t) \neq (0, 0)$.

ただしここで, c の微分は $c'(t) := (x'(t), y'(t))$ によって定義される. ちなみに, なめらかな曲線 $c(t)$ に対して, $c'(t)$ を 速度ベクトル と呼ぶ。

例 1.4. 上の例 1.2 で挙げた曲線について, 次が成り立つ:

- (1) 半径 $r > 0$ の円は, なめらかな曲線.
- (2) $y = f(x)$ のグラフは, f が何回でも微分可能ならば, なめらかな曲線.
- (3) 例えば $y = |x|$ は, なめらかな曲線ではない.

定義 1.5. なめらかな曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ に対して, 次の $k(t)$ を 曲率 と呼ぶ:

$$k(t) := \det(c'(t), c''(t)) / |c'(t)|^3.$$

* tamaru@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

ただしここで, \det は行列式と呼ばれるものである. 具体的に式で書くと,

$$\det(c'(t), c''(t)) = \det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t).$$

また, $|c'(t)|$ はベクトル $c'(t)$ の大きさを表す. すなわち,

$$|c'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

例 1.6. 半径 $r > 0$ の円 $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$ に対して, 曲率は $k(t) = 1/r$.

問題 1.7. 以下に答えよ:

- (1) x -軸の曲率は 0 であることを示せ.
- (2) 放物線 $y = x^2$ で最も曲がってる点を求めよ.
- (3) 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ で最も曲がっている点と最も曲がっていない点を求めよ. ただし $a > b > 0$ とする.

2 曲線の曲率のいくつかの性質

命題 2.1. なめらかな曲線の曲率について, 以下が成り立つ:

- (1) 曲線の向きを逆向きにすると, 曲率は -1 倍される.
- (2) 向きを変えなければ, どんな表示方法 $c(t)$ を選んでも曲率は同じ.
- (3) 曲率の大きさは, 「速さ 1 で走った時の加速度ベクトルの大きさ」と一致する.

ただしここで, $c(t)$ の速さが 1 とは, 全ての t に対して $|c'(t)| = 1$ が成り立つこと. また, 二階微分 $c''(t)$ を 加速度ベクトル と呼ぶ.

問題 2.2. 上の命題が成り立つことを, 以下の具体例で確かめよ:

- (1) 放物線 $y = x^2$ の曲率を, $c(t)$ を逆向きを選んで計算せよ.
- (2) 半径 $r > 0$ の円の曲率を, $c(t)$ を逆向きを選んで計算せよ.
- (3) 半径 $r > 0$ の円の上半分を $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ のグラフだと考えて $c(t)$ を選んで, 曲率を計算せよ.
- (4) 半径 $r > 0$ の円に対して, $c(t) = (r \cos(t/r), r \sin(t/r))$ とすると, この表示は速さ 1 であり, 曲率の大きさと加速度ベクトルの大きさが一致することを確かめよ.

3 道路の形への応用

道路のカーブは, その形をなめらかな曲線だと考えたときに, 曲率が然るべき性質をみたくように設計されています. このことを, プロジェクターを使って説明します.