非コンパクト対称空間への群作用とその応用

田丸 博士 (広島大学大学院理学研究科)

第 59 回幾何学シンポジウム
九州大学
2012/08/27

1　イントロ

1.1　概要

- 本講演で話すこと:
  - §2: 非コンパクト対称空間への群作用: 余等質性 1 作用
    - 具体例と性質,
    - “ラフな” 分類結果,
  - §3: その応用: リー群上の左不変計量
    - モジュライ空間,
    - Milnor frame の高次元版,
    - 左不変計量に対応する部分多様体.

1.2　面白いと思われるところ

- **非コンパクト対称空間への群作用それ自身:**
  - 興味深い群作用や部分多様体の例を供給,
  - コンパクト対称空間とは様相が全く異なる.

- **応用上:**
  - G : n 次元リー群 with リー代数 $\mathfrak{g}$

    $\Rightarrow\ \widetilde{\mathfrak{M}} := \{G$ 上の左不変計量 $\} \cong \{\mathfrak{g}$ 上の内積 $\} \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$.
  - $\widetilde{\mathfrak{M}}$ は非コンパクト対称空間.
  - $\widetilde{\mathfrak{M}}$ への群作用の幾何と, G 上の左不変計量の幾何が, 密接に関連.

2　非コンパクト型対称空間への余等質性 1 作用

2.1　概要

▼ **定義:**

- リーマン多様体への等長的作用が **余等質性 1** (**cohomogeneity one**)

  :⇔ 最大次元の軌道 (= 非特異軌道) が余次元 1

  ⇔ 軌道空間が 1 次元.

- H, H' の作用が **軌道同値**

  :⇔ $\exists f \in \mathrm{Isom}(M) : \forall p \in M,\ f(H.p) = H'.f(p)$.

▼ **あらすじ: 非コンパクト型対称空間への余等質性 1 作用の**

- 具体例と性質 (6pp.)
- ラフな分類 (6pp.)

2.2 参考: コンパクトな場合

- 例:
  - $\mathrm{SO}(2) \curvearrowright S^2$
    - $\Rightarrow$
      - 余等質性 1,
        - 軌道空間 $\cong [0, 1]$,
        - 特異軌道は 2 つ.

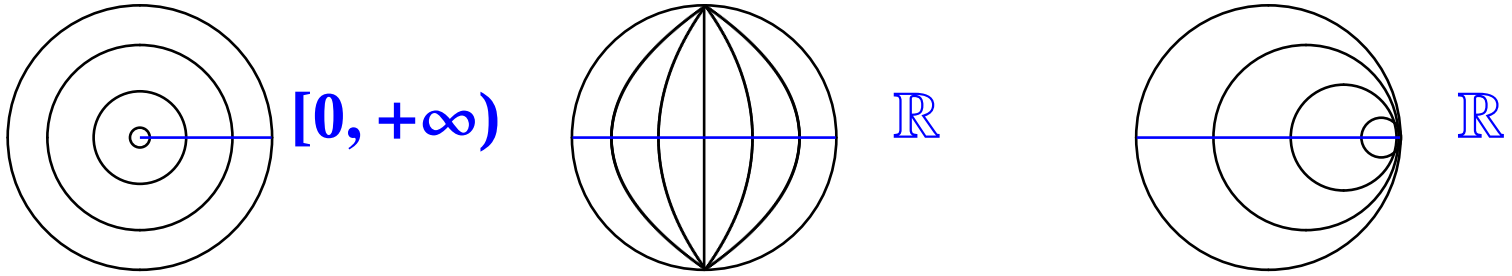
- 事実:
  - M : コンパクト既約単連結対称空間,

    $H \curvearrowright M$: 余等質性 1
    - $\Rightarrow$
      - 軌道空間 $\cong [0, 1]$,
        - 特異軌道は常に 2 つ.
        - 各 M に対して余等質性 1 作用は有限個,
        - 分類済み (Hsiang-Lawson (1971), ... , Kollross (2002)),

2.3　余等質性 1 作用の例と性質 (1/6) - 上半平面

- **定理 ($\mathbb{R}H^2 = SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$):**
  - **$\mathbb{R}H^2$ への余等質性 1 作用は, 次のいずれかと軌道同値:**

$SO(2) \curvearrowright \mathbb{R}H^2$　　$A \curvearrowright \mathbb{R}H^2$　　$N \curvearrowright \mathbb{R}H^2$



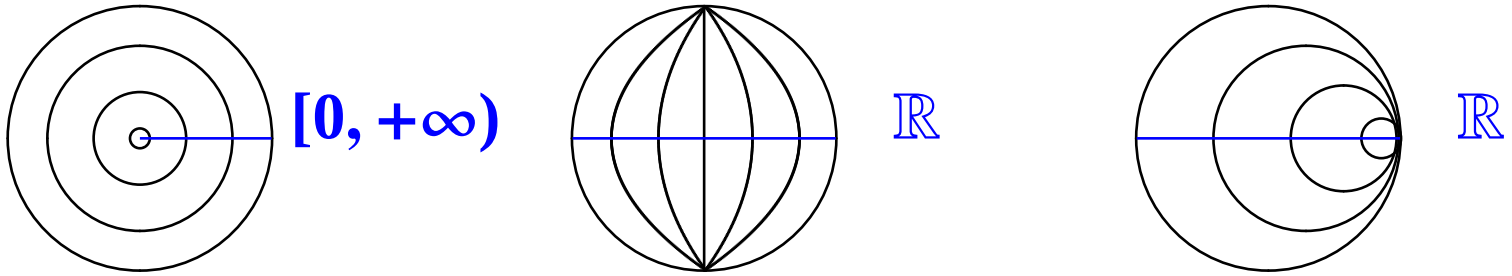
  - **ただしここで,** $\mathfrak{a} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & -a \end{array}\right] \right\}$, $\mathfrak{n} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \right\}$

- **性質:**
  - **$A.o$ は唯一の極小軌道 (測地線).**
  - **N-軌道は全て合同 (ホロ円).**

2.4　余等質性 1 作用の例と性質 (2/6) - 軌道空間

▼ 再掲:

$SO(2) \curvearrowright \mathbb{R}H^2$　　$A \curvearrowright \mathbb{R}H^2$　　$N \curvearrowright \mathbb{R}H^2$



▼ 定理 (Berndt-Brück, 2001):

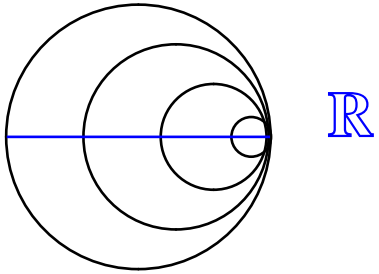
- M : 非コンパクト型対称空間, $H \curvearrowright M$: 余等質性 1

⇒
- 軌道空間 ≅ [0, +∞) or $\mathbb{R}$.
- 軌道空間 ≅ [0, +∞) のとき ∃1 特異軌道 (0 のところ),
- 軌道空間 ≅ $\mathbb{R}$ のとき ∄ 特異軌道.

2.5　余等質性 1 作用の例と性質 (3/6) - 例

▼ やること:

- $N \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の一般化.



▼ 記号:

- $M = G/K$: 非コンパクト型既約対称空間,
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$: 岩澤分解.

▼ 命題 (Berndt-T., 2003):

- $\mathfrak{a} \supset \ell$: 1 次元部分空間

  $\Rightarrow$ ∘ $\mathfrak{s}_\ell := (\mathfrak{a} \ominus \ell) \oplus \mathfrak{n}$: 部分リー代数,

  ∘ $S_\ell \curvearrowright M$: 余等質性 1, 特異軌道なし, 全ての軌道が合同.

2.6　余等質性 1 作用の例と性質 (4/6) - 個数

- 再掲:
  - M : コンパクト型単連結既約対称空間,

    $\Rightarrow$ M への余等質性 1 作用は有限個 (up to 軌道同値).

- 再掲:
  - $\mathfrak{a} \supset \ell$: 1 次元部分空間

    $\Rightarrow$ $S_\ell \curvearrowright M$: 余等質性 1, 特異軌道なし, 全ての軌道が合同.

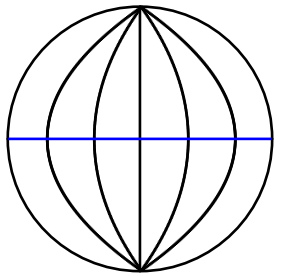
- 注意:
  - $\mathrm{rank}(M) = 1 \Rightarrow S_\ell = N$, 軌道はホロ球面.
  - $\mathrm{rank}(M) > 1 \Rightarrow S_\ell$ の取り方は連続的に存在.

    (余等質性 1 作用も連続的に存在 (up to 軌道同値))

2.7　余等質性 1 作用の例と性質 (5/6) - 例

▼ やること:

- $A \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の一般化.
- 復習: $A.o$ は唯一の極小軌道 (測地線).



$\mathbb{R}$

▼ 記号:

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$: 岩澤分解,
- $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$: 制限ルート系, $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$.

▼ 命題 (Berndt-T., 2003):

- α_i : 単純ルート, $0 \neq X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$

  $\Rightarrow$
  - $\mathfrak{s}_i := \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{n} \ominus \mathbb{R}X_i)$: 部分リー代数,
    - $S_i \curvearrowright M$: 余等質性 1, 特異軌道なし,
    - 原点軌道 $(S_i).o$ が唯一の極小軌道.

2.8　余等質性 1 作用の例と性質 (6/6) - コメント

▼ 定理 (Berndt-T., 2003):

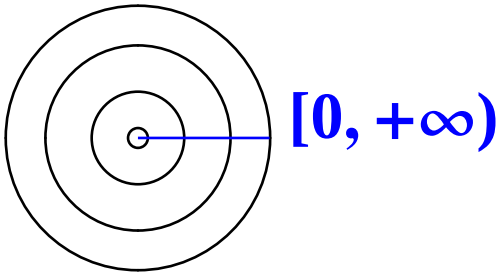
- $H \curvearrowright M$: 余等質性 1, 特異軌道なし

  $\Rightarrow$ 先の S_ℓ or S_i のいずれかの作用に軌道同値.

▼ 次にやること:

- 特異軌道を持つ余等質性 1 作用

  i.e., $SO(2) \curvearrowright \mathbb{R}H^2$ の一般化.



▼ ここまでのまとめ:

- M : 非コンパクト型対称空間,
- $H \curvearrowright M$: 余等質性 1

  $\Rightarrow$ “特別な軌道が一つだけ” という状況がしばしば起こる.

  (特異軌道があればそれ, なくても唯一の極小軌道をもつ場合)

2.9　余等質性 1 作用のラフな分類 (1/6) - 前置き

- **概要:**
  - M : 非コンパクト型既約対称空間, $H \curvearrowright M$: 余等質性 1
    - $\Rightarrow$ 特異軌道を持たない場合は分類できていた.
      - 特異軌道を持つものを分類したい.

- **定理 (Berndt-T., 2004):**
  - 余等質性 1 作用の特異軌道となる全測地的 $F \subset M$ の分類.

- **ということで:**
  - 全測地的でない特異軌道を持つ余等質性 1 作用を分類したい.

- **主結果 (Berndt-T., to appear):**
  - “canonical extension” or “nilpotent construction” により, そのような作用は全て得られる.

2.10　余等質性 1 作用のラフな分類 (2/6) - 例

▼ 命題 (Berndt-T., to appear):

- $H \curvearrowright \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$: 余等質性 1, $\exists$ 非全測地的特異軌道

  $\Rightarrow$ $\mathrm{SO}(2)S_{(2,1)}$ の作用と軌道同値,

$$\text{ここで } \mathfrak{s}_{(2,1)} := \left\{ \left[\begin{array}{cc|c} x & 0 & * \\ 0 & x & * \\ \hline 0 & 0 & y \end{array}\right] \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}.$$

▼ 観察:

- $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \supset \mathfrak{q}_{(2,1)} := \left\{ \left[\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right] \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}$: 放物型部分代数,
- $\mathfrak{q}_{(2,1)} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{s}_{(2,1)}$: Langlands 分解,
- $\mathfrak{s}_{(2,1)}$: その可解部分,
- $\mathrm{SO}(2) \curvearrowright (SL_2(\mathbb{R})).o = \mathbb{R}\mathrm{H}^2$: 余等質性 1 作用, $\exists$ 特異軌道.

2.11　余等質性 1 作用のラフな分類 (3/6) - canonical extension

▼ 再掲:

- $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \supset \mathfrak{q}_{(2,1)} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{s}_{(2,1)} \supset \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{s}_{(2,1)}$.

▼ 設定:

- $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{q}_\Phi$: 放物型部分代数,
- $\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{m}_\Phi \oplus \mathfrak{s}_\Phi$: Langlands 分解.

▼ 事実:

- $[\mathfrak{m}_\Phi, \mathfrak{s}_\Phi] \subset \mathfrak{s}_\Phi$,
- $M \supset (M_\Phi).o$: 全測地的.

▼ 命題 (Berndt-T., to appear)

- $H \curvearrowright (M_\Phi).o$: 余等質性 1 (∃ 特異軌道)

  $\Rightarrow \widetilde{H} := HS_\Phi \curvearrowright M$: 余等質性 1 (∃ 特異軌道).

2.12　余等質性 1 作用のラフな分類 (4/6) - 例

▼ 例 (Berndt-T., to appear):

○ $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{R}) \supset \mathfrak{h} := \left\{ \left[\begin{array}{c|cc|c} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right] \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}.$

$\Rightarrow$ $H \curvearrowright \mathrm{SL}_4(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(4)$: 余等質性 1, $\exists$ 非全測地的特異軌道.

▼ 観察:

○ $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{R}) \supset \mathfrak{q}_{(1,2,1)} = \mathfrak{l}_{(1,2,1)} \oplus \mathfrak{n}_{(1,2,1)}$: Chevalley 分解, ただし,

$$\mathfrak{l}_{(1,2,1)} = \left[\begin{array}{c|cc|c} * & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right], \quad \mathfrak{n}_{(1,2,1)} = \left[\begin{array}{c|cc|c} 0 & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

2.13　余等質性 1 作用のラフな分類 (5/6) - nilpotent construction

- 設定:
  - $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{q}_\Phi$: 放物型部分代数,
  - $\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{l}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$: Chevalley 分解.
- 事実:
  - $\exists$ 自然な gradation : $\mathfrak{n}_\Phi = \mathfrak{n}_\Phi^1 \oplus \mathfrak{n}_\Phi^2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_\Phi^s$.
- 命題 (Berndt-T., to appear):
  - $\mathfrak{n}_\Phi^1 \supset V$: “ある条件” を満たす線型部分空間

    $\Rightarrow$
    - $N_{\mathfrak{l}_\Phi}(\mathfrak{n}_\Phi \ominus V) \oplus (\mathfrak{n}_\Phi \ominus V)$: 部分リー代数,
      - 対応する群の M への作用は余等質性 1, $\exists$ 特異軌道.
- コメント:
  - “ある条件” を満たす線型部分空間の分類は, 一般には難しい.

2.14　余等質性 1 作用のラフな分類 (6/6) - 主定理

▼ **定理 (Berndt-T., to appear):**

- M への余等質性 1 作用は, 以下のいずれかと軌道同値:

  (1) 特異軌道を持たない作用,

  (2) 全測地的な特異軌道を持つ作用,

  (3) “canonical extension” から得られる作用,

  (4) “nilpotent construction” から得られる作用.

▼ **コメント:**

- 上記の (1), (2) の作用は (既約なら) 分類済み.
- よって (3), (4) の作用を分類できれば嬉しい...
- 余等質性 1 作用が完全に分類出来てるもの:

  $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$, $\mathbb{H}\mathrm{H}^2$, $\mathbb{O}\mathrm{H}^2$, $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$, $G_2^*(\mathbb{R}^5)$, $G_2^2/\mathrm{SO}(4)$.

3　左不変計量の幾何への応用

3.1　概要

- 背景:
  - リー群 G 上の左不変 Einstein 計量 / Ricci soliton 計量の研究,
  - 特に, 構成, 存在・非存在の判定.
- あらすじ:
  - G 上の左不変計量の “モジュライ空間” (4pp.)
  - Milnor frame の “高次元版” (3pp.)
  - 左不変計量に “対応する部分多様体” (4pp.)

3.2　左不変計量のモジュライ空間 (1/4) - 定義

▼ **事実:**

- G : n 次元リー群 with リー代数 $\mathfrak{g}$

  $\Rightarrow\ \widetilde{\mathfrak{M}} := \{G$ 上の左不変計量 $\} \cong \{\mathfrak{g}$ 上の内積 $\} \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$.

▼ **定義:**

- $\langle , \rangle_1, \langle , \rangle_2 \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ が **スカラー倍を除いて等長的**

  $:\Leftrightarrow\ \exists c > 0, \exists \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) : \langle \cdot, \cdot \rangle_1 = c\langle \varphi^{-1}(\cdot), \varphi^{-1}(\cdot) \rangle_2$.

- 次を **モジュライ空間** と呼ぶ:

  $\mathfrak{PM} := \widetilde{\mathfrak{M}}/$(スカラー倍を除いて等長的).

▼ **注意:**

- $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle_1)$ と $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle_2)$ がスカラー倍を除いて等長的

  $\Rightarrow$ 対応する単連結な $(G, \langle , \rangle_1)$ と $(G, \langle , \rangle_2)$ も,

  (リーマン多様体として) スカラー倍を除いて等長的.

3.3　左不変計量のモジュライ空間 (2/4) - 性質

- **定義:**
  - $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) := \{c\varphi \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \mid c \in \mathbb{R}^{\times},\ \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\}$.
- **命題 (児玉-高原-T., 2011):**
  - 同値類は次を満たす: $[\langle , \rangle] = \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle , \rangle \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$.
  - $\mathfrak{P}\mathfrak{M} = \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\widetilde{\mathfrak{M}} \cong \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$.

3.4　左不変計量のモジュライ空間 (3/4) - 例

▼ **定理 (Lauret, 2003):**

- $\mathfrak{g}$ に対して, G 上の左不変計量がスカラー倍と等長的を除いて一意

  $\Leftrightarrow$ (1) $\mathbb{R}^n$: 可換リー代数,

  (2) $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n} := \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ with $[e_1, e_j] = e_j$ $(j \geq 2)$,

  (3) $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3} := \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ with $[e_1, e_2] = e_3$.

▼ **命題 (児玉-高原-T., 2011):**

- 上記の (1), (2), (3) のリー代数

  $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \widetilde{\mathfrak{m}}$: 推移的

  $\Rightarrow$ $\mathfrak{P}\mathfrak{M} = \{\mathrm{pt}\}$.

  (これは Lauret の定理の ($\Leftarrow$) の簡単な別証明を与えている)

3.5　左不変計量のモジュライ空間 (4/4) - 例

▼ 例 (児玉-高原-T., 2011):

- $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ with $[e_1, e_2] = e_2$

$\Rightarrow$ - $\mathbb{R} \oplus \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \left\{ \left[\begin{array}{c|ccc} * & 0 & 0 & 0 \\ \hline * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ \hline * & 0 & 0 & * \end{array}\right] \right\}$,

  - $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \widetilde{\mathfrak{m}}$: 余等質性 1 (前述). (よって $\dim \mathfrak{P}\mathfrak{M} = 1$.)
  - $\mathfrak{P}\mathfrak{M} = \{[g_\lambda . \langle , \rangle_0] \mid g_\lambda = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 & 1 \end{array}\right], \ \lambda \geq 0\} \cong [0, +\infty)$.

- 他にも $\forall n \geq 3, \ \exists \mathfrak{g} : \dim \mathfrak{g} = n, \ \dim \mathfrak{P}\mathfrak{M} = 1$.

3.6 Milnor 型定理 (1/3) - 3 次元の復習

▼ **定理 (Milnor, 1976):**

- $\mathfrak{g}$: 3 次元 unimodular リー代数, $\langle , \rangle$: 任意の内積

  $\Rightarrow$ $\exists\{x_1, x_2, x_3\}$: 正規直交基底, $\exists\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

  $$[x_1, x_2] = \lambda_3 x_3,\ [x_2, x_3] = \lambda_1 x_1,\ [x_3, x_1] = \lambda_2 x_2.$$

▼ **コメント:**

- 各 $\mathfrak{g}$ ごとに $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の取り得る値は確定している.

  (これを使って左不変 Einstein 計量の存在・非存在などが分かる)

- 証明は $\dim = 3$ に強く依存している.

▼ **観察:**

- $\dim \mathfrak{g} = 3$ なので $\dim \widetilde{\mathfrak{m}} = 6$. なのにパラメータは 3 つ.

  $\rightarrow$ これは $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\widetilde{\mathfrak{m}}$ を表示している.

3.7 Milnor 型定理 (2/3) - 主定理

▼ 定理 (橋永-T.-寺田, preprint):

- $\mathfrak{PM}$ の具体的な表示 → Milnor 型定理が得られる.

▼ 例 (Milonr 型定理):

- $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ with $[e_1, e_2] = e_2$
- $\langle , \rangle$: 任意の内積

  ⇒ $\exists k > 0$, $\exists \lambda \geq 0$, $\exists \{x_1, \ldots, x_4\}$: 正規直交基底 wrt $k\langle , \rangle$

  s.t. $[x_1, x_2] = x_2 + \lambda x_4$.

▼ 系:

- $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ with $[e_1, e_2] = e_2$

  ⇒ ∘ Ricci 曲率の符号は $(+, 0, -, -)$ or $(0, 0, -, -)$.

  ∘ $\nexists$ 左不変 Einstein 計量.

3.8 Milnor 型定理 (3/3) - コメント

- 再掲 (橋永-T.-寺田, preprint):
  - $\mathfrak{PM}$ の具体的な表示 $\to$ Milnor 型定理が得られる.
- コメント:
  - $\mathfrak{PM}$ の表示がきれい (e.g. $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \widetilde{\mathfrak{m}}$ が余等質性 1)

    $\Rightarrow$ 有効な Milnor 型定理.
  - $\mathfrak{PM}$ の表示がきれいでない (e.g. $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ が小さい)

    $\Rightarrow$ Milnor 型定理は得られるが有効でない.

3.9　対応する部分多様体 (1/4) - 定義

- **定義:**
  - 同値類 $[\langle , \rangle]$ を $\langle , \rangle$ に対応する部分多様体.

    (復習: $[\langle , \rangle] = \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle , \rangle \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$)

- **問題:**
  - $\langle , \rangle$: 特別な計量 $\Leftrightarrow$ $[\langle , \rangle]$: 特別な部分多様体？

- **復習:**
  - 非コンパクト型対称空間への余等質性 1 作用

    $\Rightarrow$ “特別な軌道” が唯一つ存在することがしばしば起こる.

3.10　対応する部分多様体 (2/4) - 代数的 Ricci soliton

▼ **定義:**

- リーマン多様体 (M, g) が **Ricci soliton**

  $:\Leftrightarrow\ \exists c \in \mathbb{R}, \exists X \in \mathfrak{x}(M)\ :\ \mathrm{ric}_g = cg + \mathfrak{L}_X g.$

- $(G, \langle , \rangle)$ (リー群 + 左不変計量) が **代数的 Ricci soliton**

  $:\Leftrightarrow\ \exists c \in \mathbb{R}, \exists D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})\ :\ \mathrm{Ric}_{\langle , \rangle} = c \cdot \mathrm{id} + D.$

▼ **定理 (Lauret, 2011; Jablonski, preprint):**

- 左不変 Einstein

  $\Rightarrow$ 代数的 Ricci soliton

  $\Rightarrow$ Ricci soliton.

- 可解リー群上の左不変 Ricci soliton

  $\Rightarrow$ 代数的 Ricci soliton と等長的.

3.11　対応する部分多様体 (3/4) - 例

▼ **復習:**

- $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ with $[e_1, e_2] = e_2$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{PM} = \{[g_\lambda.\langle , \rangle_0] \mid g_\lambda = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 & 1 \end{array}\right], \lambda \geq 0\} \cong [0, +\infty)$.

- $\langle , \rangle_0$: 代数的 Ricci soliton.
- $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \widetilde{\mathfrak{m}}$: 余等質性 1, $\exists$1 特異軌道.

▼ **観察:**

- $g_\lambda.\langle , \rangle_0$: 代数的 Ricci soliton

$\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$

$\Leftrightarrow$ $[g_\lambda.\langle , \rangle_0]$ が (唯一の) 特異軌道.

3.12　対応する部分多様体 (4/4) - 3 次元の場合の結果

- **定理 (橋永-T., in preparation):**
  - $\mathfrak{g}$: 3 次元可解リー代数のとき,

    $\langle , \rangle$: 代数的 Ricci soliton $\Leftrightarrow$ $\widetilde{\mathfrak{m}} \supset [\langle , \rangle]$: 極小.

    (注: $\widetilde{\mathfrak{m}} = \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ には自然な $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$-不変計量を入れる)

- **もう少し詳しく言うと:**

リー代数	説明	作用	計量
$\mathfrak{h}^3$	Heisenberg	推移的	$\exists$ Ricci soliton
$\mathfrak{r}_{3,1}$	$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^3}$	推移的	$\exists$ 負定曲率
$\mathfrak{r}_3$	可解	$\nexists$ 極小軌道, 合同性	$\nexists$ Ricci soliton
$\mathfrak{r}_{3,a}$	可解	$\exists$ 極小軌道 (非特異)	$\exists$ Ricci soliton
$\mathfrak{r}'_{3,a}$	可解	$\exists$ 極小軌道 (特異)	$\exists$ Einstein

4　まとめ

4.1　まとめ

- 大枠:
  - 非コンパクト対称空間への群作用

    ∪
  - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ への群作用 ↔ リー群上の左不変計量

    (軌道空間 ↔ モジュライ空間, Milnor 型定理)

    (軌道 ↔ 対応する部分多様体)
- 今回紹介したこと:
  - 非コンパクト対称空間への余等質性 1 作用,
  - $\mathbb{R}^\times\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用が余等質性 1 の場合の左不変計量の幾何.

4.2 さらなる課題

- 今後の課題 1:
  - この研究を進める, i.e.,
    - 非コンパクト対称空間への余等質性 1 でない群作用の研究,
    - もっと一般のリー群における左不変計量の研究.
- 今後の課題 2:
  - 同様の枠組みによる他の幾何構造の研究, e.g.,
    - 左不変エルミート計量 $\leftrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{U}(n)$ への群作用,
    - 左不変擬リーマン計量 $\leftrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(p,q)$ への群作用,
    - 左不変概複素構造, 左不変シンプレクティック構造, ...
  - すなわち,
    - 様々な (擬リーマンを含む) 対称空間への群作用の研究,
    - 様々な左不変幾何構造の研究.