

1 数学通論 II (2012/10/02): 位相空間の定義

距離空間から開集合という概念を抽出したものが位相空間である.

ユークリッド空間から距離空間へ

定義 1.1. ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 上の 自然な距離 を次で定義する:

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

命題 1.2. ユークリッド空間 $X := \mathbb{R}^n$ 上の自然な距離は, 次の (D1)–(D3) を満たす:

(D1) $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$ かつ “ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ”.

(D2) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$.

(D3) $\forall x, y, z \in X, d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

定義 1.3. X を集合, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を写像とする. (X, d) が 距離空間 であるとは, d が命題 1.2 の条件 (D1)–(D3) を満たすこと.

距離空間から位相空間へ

定義 1.4. (X, d) を距離空間とする. このとき,

(1) $a \in X, \varepsilon > 0$ に対して, $U(a; \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$ を ε -近傍 と呼ぶ.

(2) $X \supset O$ が 開集合 とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in O, \exists \varepsilon > 0: U(a; \varepsilon) \subset O$.

(3) $\mathcal{O} := \{O \subset X \mid O \text{ は開集合}\}$ を 開集合族 と呼ぶ.

命題 1.5. 距離空間 (X, d) の開集合族 \mathcal{O} に対して, 次が成り立つ:

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(T2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}, O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(T3) $\forall O_\lambda \in \mathcal{O} (\lambda \in \Lambda), \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

定義 1.6. X を集合, \mathcal{O} を X の部分集合族とする. (X, \mathcal{O}) が 位相空間 であるとは, \mathcal{O} が命題 1.5 の条件 (T1)–(T3) を満たすこと.

例 1.7. \mathbb{R}^2 に自然な距離 d を入れた距離空間に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ は開集合,

(2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ は開集合でない.

問題 1.8 (小テスト問題). \mathbb{R} に自然な距離 d を入れた距離空間に対して, 以下を示せ:

(1) $(0, +\infty)$ は開集合,

(2) $[0, +\infty)$ は開集合でない.

2 数学通論 II (2012/10/09): 位相空間の例・開集合

(X, \mathcal{O}) を位相空間とするとき, \mathcal{O} を X 上の 位相 と呼ぶ.

位相空間の例

例 2.1. 次は位相である:

- (1) 距離空間 (X, d) に対して, その開集合族 $\mathcal{O}_d := \{O \subset X \mid O \text{ は開集合}\}$.
- (2) 集合 X に対して, その巾集合 $\mathcal{O}^d := \mathfrak{P}(X)$ (これを 離散位相 と呼ぶ).
- (3) 集合 X に対して, $\mathcal{O}^t := \{\emptyset, X\}$ (これを 密着位相 と呼ぶ).
- (4) \mathbb{R} に対して, $\mathcal{O}^+ := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ (これを 右半直線の位相 と呼ぶ).

密着位相および右半直線の位相は, 距離から定まる位相ではない. このことは, 後日に証明を与える. 上級者向けの演習問題: どのような考え方で証明すれば良いかを考えよ.

開集合

以下では (X, \mathcal{O}) を位相空間とする.

定義 2.2. $X \supset A$ が 開集合 とは, 次が成り立つこと: $A \in \mathcal{O}$.

定義 2.3. 点 $x \in X$ に対して, $X \supset O$ が x の 開近傍 とは, 次が成り立つこと: $x \in O \in \mathcal{O}$.

距離空間では, ε -近傍を用いて諸概念を定義した. 位相空間でも, ε -近傍の代わりに開近傍を用いると, 殆ど同様のことができる. ここでは内部や内点を扱い, 触点や閉包は次回に紹介する.

定義 2.4. $A \subset X$ に対して,

- (1) $X \ni x$ が A の 内点 とは, 次が成り立つこと: $\exists O (x \text{ の開近傍}) : O \subset A$.
- (2) $A^\circ := \{x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の内点}\}$ を A の 内部 と呼ぶ.

内点であるための条件は, 次のようにまとめて書くこともできる: $\exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subset A$.

例 2.5. \mathbb{R} について, 次が成り立つ:

- (1) 自然な距離から定まる位相に関して, $[0, 1)^\circ = (0, 1)$, $[0, +\infty)^\circ = (0, +\infty)$.
- (2) 右半直線の位相 \mathcal{O}^+ に関して, $[0, 1)^\circ = \emptyset$, $[0, +\infty)^\circ = (0, +\infty)$.

問題 2.6 (小テスト問題). \mathbb{R} 上の右半直線の位相 \mathcal{O}^+ に関して, 次を示せ: $1 \notin [0, 2]^\circ$.

補題 2.7. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ: $A^\circ \subset A$.

定理 2.8. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ: $A \in \mathcal{O} \Leftrightarrow A = A^\circ$.

3 数学通論 II (2012/10/16): 閉集合

以下, (X, \mathcal{O}) を位相空間とする.

閉集合

定義 3.1. $X \supset A$ が 閉集合 とは, 次が成り立つこと: $X - A \in \mathcal{O}$.

ここで $X - A$ は X における A の補集合を表す. 補集合は, 全体集合 X を明示する必要がない場合には A^c と表すことが多い.

定義 3.2. $A \subset X$ に対して,

- (1) $X \ni x$ が A の 触点 とは, 次が成り立つこと: $\forall U$ (x の開近傍), $A \cap U \neq \emptyset$.
- (2) $\bar{A} := \{x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の触点}\}$ を A の 閉包 と呼ぶ.

例 3.3. \mathbb{R} について, 次が成り立つ:

- (1) 自然な距離から定まる位相に関して, $\overline{[0, 1]} = [0, 1]$, $\overline{(0, +\infty)} = [0, +\infty)$.
- (2) 右半直線の位相 \mathcal{O}^+ に関して, $\overline{[0, 1]} = (-\infty, 1]$, $\overline{(0, +\infty)} = \mathbb{R}$.

補題 3.4. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ:

- (1) $A \subset \bar{A}$.
- (2) $x \notin \bar{A} \Leftrightarrow x \in (X - A)^\circ$.

この補題の (2) は, $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$ と書くこともできる.

定理 3.5. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ: A が閉集合 $\Leftrightarrow A = \bar{A}$.

問題 3.6 (小テスト問題). \mathbb{R} 上の離散位相を \mathcal{O}^d , 密着位相を \mathcal{O}^t とする. それぞれの位相に関して, 一点集合の閉包 $\overline{\{0\}}$ が何になるかを予想し, それを示せ.

閉包に関する性質を示すためには, 定義に従って示す方法と, 性質 $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$ を使って内部の性質に帰着させる方法がある. 例えば, 次の命題は, 定義に従って示すこともできるが, 内部の性質 ($A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$) を使って示すこともできる:

命題 3.7. $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$.

4 数学通論 II (2012/10/23): 連続写像・同相

以下では (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) , (Z, \mathcal{O}_Z) を位相空間とする. 定義域と値域に入っている位相を強調する時には, 写像を $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ のように表す.

連続写像

定義 4.1. $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ が 連続 とは, 次が成り立つこと: $\forall O \in \mathcal{O}_Y, f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$.

例 4.2. \mathbb{R} の密着位相を \mathcal{O}^t , 離散位相を \mathcal{O}^d で表す. また id は恒等写像を表す. このとき,

- (1) $\text{id}: (\mathbb{R}, \mathcal{O}^d) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{O}^t)$ は連続,
- (2) $\text{id}: (\mathbb{R}, \mathcal{O}^t) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{O}^d)$ は連続でない.

命題 4.3. 連続写像と連続写像の合成は連続である. すなわち, $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ および $g: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続ならば, $g \circ f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ も連続.

命題 4.4. 写像 $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ が連続であることと次は同値: 閉集合の逆像は閉集合である, すなわち, $\forall F \in \mathfrak{A}_Y, f^{-1}(F) \in \mathfrak{A}_X$.

ただしここで, \mathfrak{A}_X は X の閉集合系 (閉集合全体の成す集合族) を表す.

問題 4.5 (小テスト問題). 命題 4.4 を示せ. ただしここで, 次が成り立つことは, 証明せずに用いて良い: 写像 $f: X \rightarrow Y$ および部分集合 $V \subset Y$ に対して, $X - f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - V)$.

同相

定義 4.6. $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ が 同相写像 とは, 次が成り立つこと:

- (i) f は全単射, (ii) f は連続, (iii) f^{-1} も連続.

定義 4.7. (X, \mathcal{O}_X) と (Y, \mathcal{O}_Y) が 同相 とは, 次が成り立つこと: $\exists f: X \rightarrow Y$: 同相写像.

命題 4.8. 同相を \cong で表す. このとき \cong は同値関係である. すなわち,

- (1) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (X, \mathcal{O}_X)$,
- (2) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y) \Rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y) \cong (X, \mathcal{O}_X)$,
- (3) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y), (Y, \mathcal{O}_Y) \cong (Z, \mathcal{O}_Z) \Rightarrow (X, \mathcal{O}_X) \cong (Z, \mathcal{O}_Z)$.

この講義で紹介する位相空間論の中心的なテーマは, “2 つの位相空間が同相かどうかを判定せよ” というものである. 特に, 同相でないことを示す際に, 定義通りに行くことは (全ての写像を考えなくてはならないので) ほぼ不可能である. そこで, 位相空間の性質に着目する.

5 数学通論 II (2012/10/30): 相対位相

相対位相

定義 5.1. 位相空間 (X, \mathcal{O}) , 部分集合 $A \subset X$ に対して, $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$ を, (X, \mathcal{O}) から決まる A の 相対位相 と呼ぶ.

定義より, 次が成り立つことに念のために注意: “ $W \in \mathcal{O}_A \Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{O} : W = O \cap A$ ”.

命題 5.2. 相対位相 \mathcal{O}_A は A の位相である.

問題 5.3 (小テスト問題). 相対位相 \mathcal{O}_A が条件 (T2) を満たすことを示せ.

例 5.4. $A := [0, 2)$ に \mathbb{R} の標準的な位相から決まる相対位相を入れる. このとき $[0, 1)$ は A の開集合.

相対位相の性質

命題 5.5. 連続写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して, 次が成り立つ:

- (1) $A \subset X$ に対して, \mathcal{O}_A を相対位相とすると, 制限写像 $f|_A : (A, \mathcal{O}_A) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ は連続.
- (2) 値域を制限した写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ は連続. ただしここで, $\mathcal{O}_{f(X)}$ は $f(X)$ の相対位相.

系 5.6. 同相写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ および部分集合 $A \subset X$ に対して, $f|_A : A \rightarrow f(A)$ も同相写像である. ただしここで, A にも $f(A)$ にも相対位相が入っているものとする.

この系は, 後にいくつかの位相空間が同相でないことの証明に用いられる.

離散位相について

補題 5.7. (X, \mathcal{O}) を位相空間とし, 次が成り立つと仮定する: $\forall x \in X, \{x\} \in \mathcal{O}$. このとき \mathcal{O} は離散位相である.

例 5.8. \mathbb{R} の標準的な位相から決まる \mathbb{Z} の相対位相は, 離散位相である.

6 数学通論 II (2011/11/06): 連結

連結性の定義と例

定義 6.1. 位相空間 (X, \mathcal{O}) に対して,

- (1) (X, \mathcal{O}) が 非連結 とは, 次が成り立つこと: $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : O_1 \cup O_2 = X, O_1 \cap O_2 = \emptyset, O_1 \neq \emptyset, O_2 \neq \emptyset$.
- (2) (X, \mathcal{O}) が 連結 とは, 次が成り立つこと: (X, \mathcal{O}) は非連結でない.

例 6.2. \mathbb{R} の標準的な位相から決まる相対位相に関して, $(0, 1) \cup [2, 3), \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ は非連結.

命題 6.3. $X \subset \mathbb{R}$ とし, \mathcal{O}_X を \mathbb{R} の標準的な位相から決まる X の相対位相とする. このとき (X, \mathcal{O}_X) が連結であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall a, b \in X (a < b), [a, b] \subset X$.

例 6.4. \mathbb{R} の標準的な位相から決まる相対位相に関して, $\mathbb{R}, (a, +\infty), [a, b], [a, b), \dots$ は連結.

連結の同相不変性

補題 6.5. 位相空間 (X, \mathcal{O}) に対して, 以下は互いに同値:

- (1) (X, \mathcal{O}) は非連結.
- (2) $\exists A \subset X : A$ は開かつ閉, $\emptyset \neq A \neq X$.
- (3) $\exists \varphi : X \rightarrow \{1, 2\} : \text{連続かつ全射}$.

問題 6.6 (小テスト問題). 上の命題の (2) の条件をみたす A に対して, $\varphi : X \rightarrow \{1, 2\}$ を次で定める: $\varphi(x) = 1$ (for $x \in A$), $\varphi(x) = 2$ (for $x \notin A$). この φ が全射かつ連続であることを示せ.

命題 6.7. 連結な位相空間の連続写像による像は連結である. すなわち, $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像, (X, \mathcal{O}_X) を連結とすると, $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ は連結.

定理 6.8. 連結性は同相で不変である. すなわち, (X, \mathcal{O}_X) と (Y, \mathcal{O}_Y) が同相, (X, \mathcal{O}_X) が連結のとき, (Y, \mathcal{O}_Y) は連結.

例 6.9. \mathbb{R} の標準的な位相から決まる相対位相に関して, $[0, 1)$ と $(0, 1)$ は同相でない.

連結性の応用

系 6.10 (中間値の定理). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を連続写像とし, $f(a) < m < f(b)$ とする. このとき次が成立: $\exists c \in [a, b] : m = f(c)$.

7 数学通論 II (2012/11/13): 弧状連結

位相空間が連結であるとは、直感的には「分けられない」ことである。ここで扱う弧状連結性は、「つながっている」ことを表している。

弧状連結の定義

定義 7.1. 位相空間 (X, \mathcal{O}) が 弧状連結 とは、次が成り立つこと: $\forall x_0, x_1 \in X, \exists c: [0, 1] \rightarrow X$: 連続, $c(0) = x_0, c(1) = x_1$.

ここで $[0, 1]$ には標準的な位相を入れる。上の条件を満たす c を、 x_0 と x_1 を結ぶ 道 と呼ぶ。

例 7.2. 以下は、標準的な位相に関して弧状連結である: \mathbb{R}^n , \mathbb{R} の区間, 円周 S^1 , $\mathbb{R}^n - \{0\}$, ...

命題 7.3. 位相空間 (X, \mathcal{O}_X) は、弧状連結ならば連結である。

この命題の逆は成り立たない。すなわち、連結だが弧状連結でない位相空間が存在する。例えば、

$$A := \{(x, 0) \mid 0 < x \leq 1\}, \quad B := \{(0, y) \mid 0 < y \leq 1\}, \quad A_n := \{(x, 1/n) \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

としたとき、 \mathbb{R}^2 内の次で与えられる部分空間 X が反例を与える:

$$X := A \cup B \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right).$$

弧状連結の性質

命題 7.4. 弧状連結な位相空間の連続写像による像は弧状連結である。すなわち、 $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像、 (X, \mathcal{O}_X) を弧状連結とすると、 $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ は弧状連結。

定理 7.5. 弧状連結性は同相で不変である。すなわち、 (X, \mathcal{O}_X) と (Y, \mathcal{O}_Y) が同相、 (X, \mathcal{O}_X) が弧状連結のとき、 (Y, \mathcal{O}_Y) は弧状連結。

例 7.6. 直線 \mathbb{R} と平面 \mathbb{R}^2 も同相ではない。

例 7.7 (余談). メビウスの帯は、帯の方向に沿った線で切っても弧状連結。

8 数学通論 II (2012/11/20): コンパクト

コンパクトの定義

定義 8.1. 位相空間 (X, \mathcal{O}) に対して, $\mathfrak{U} (\subset \mathcal{O})$ が X の **開被覆 (open cover)** とは, 次が成り立つこと: $X = \bigcup \mathfrak{U}$.

ここで, $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ としたとき, $\bigcup \mathfrak{U}$ は次で定義される: $\bigcup \mathfrak{U} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

定義 8.2. 位相空間 (X, \mathcal{O}) が **コンパクト** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: 開被覆, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ s.t. $X = \bigcup U_{\lambda_i}$.

コンパクトの例

例 8.3. 次はコンパクトでない:

- (1) $(0, 2]$ に標準的な位相を入れたもの.
- (2) \mathbb{R} に右半直線の位相 \mathcal{O}^+ を入れたもの.

命題 8.4 (復習). $X \subset \mathbb{R}^n$ とする. X が $(\mathbb{R}^n$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して) コンパクトであるための必要十分条件は, X が有界閉集合であること.

命題 8.5. \mathcal{O}^d を X の離散位相とする. このとき, (X, \mathcal{O}^d) がコンパクトであるための必要十分条件は, X が有限集合であること.

問題 8.6 (小テスト問題). 上の命題の十分性を示せ. すなわち, X が離散位相 \mathcal{O}^d に関してコンパクトならば, X は有限集合であることを示せ.

命題 8.7. (X, \mathcal{O}) がコンパクトであるとし, A を X の閉集合とする. このとき, A は相対位相に関してコンパクトである.

コンパクトの同相不変性

命題 8.8. コンパクトな位相空間の連続写像による像はコンパクト. すなわち, $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像, (X, \mathcal{O}_X) をコンパクトとすると, $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ はコンパクトである.

定理 8.9. コンパクト性は同相で不変である. すなわち, (X, \mathcal{O}_X) と (Y, \mathcal{O}_Y) が同相, (X, \mathcal{O}_X) がコンパクトのとき, (Y, \mathcal{O}_Y) はコンパクト.

系 8.10. (X, \mathcal{O}) がコンパクトであるとし, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を連続写像とする. このとき f は最大値と最小値を持つ.

9 数学通論 II (2012/11/27): 分離公理

以下, (X, \mathcal{O}) を位相空間とし, その閉集合系を \mathfrak{A} で表す.

分離公理の定義

定義 9.1. (X, \mathcal{O}) が (T_1) 空間 であるとは, 次が成り立つこと:

$$(T_1) \forall x_1, x_2 \in X (x_1 \neq x_2), \exists O \in \mathcal{O} : x_1 \in O, x_2 \notin O.$$

定義 9.2. (X, \mathcal{O}) が (T_2) 空間 または ハウスドルフ空間 であるとは, 次が成り立つこと:

$$(T_2) \forall x_1, x_2 \in X (x_1 \neq x_2), \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : x_1 \in O_1, x_2 \in O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

命題 9.3. ハウスドルフ空間は (T_1) 空間である.

例 9.4. 距離から決まる位相 \mathcal{O}_d に対して, (X, \mathcal{O}_d) はハウスドルフである.

命題 9.5. (X, \mathcal{O}) が (T_1) 空間であるための必要十分条件は, 一点集合が閉集合となること, すなわち, 次が成り立つこと: $\forall x \in X, \{x\} \in \mathfrak{A}$.

例 9.6. \mathbb{R} に密着位相 \mathcal{O}^t または右半直線の位相 \mathcal{O}^+ を入れた空間は, いずれも (T_1) でない.

分離公理の同相不変性

定理 9.7. 分離公理は同相で不変である. すなわち, (X, \mathcal{O}_X) と (Y, \mathcal{O}_Y) が同相, (X, \mathcal{O}_X) が (T_1) または (T_2) を満たすとき, (Y, \mathcal{O}_Y) も (T_1) または (T_2) を満たす.

例 9.8. \mathbb{R} 上の密着位相 \mathcal{O}^t または右半直線の位相 \mathcal{O}^+ は, 距離から決まる位相と同相ではない.

その他の分離公理

定義 9.9. 位相空間 (X, \mathcal{O}) に対して, 次を (T_3) -分離公理 および (T_4) -分離公理 と呼ぶ:

$$(T_3) \forall F \in \mathfrak{A}, \forall x \notin F, \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : x \in O_1, F \subset O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

$$(T_4) \forall F_1, F_2 \in \mathfrak{A} (F_1 \cap F_2 = \emptyset), \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : F_1 \subset O_1, F_2 \subset O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

定義 9.10. 位相空間 (X, \mathcal{O}) に対して,

- (1) (X, \mathcal{O}) が 正則空間 であるとは, (T_1) と (T_3) を満たすこと.
- (2) (X, \mathcal{O}) が 正規空間 であるとは, (T_1) と (T_4) を満たすこと.

命題 9.11. 位相空間に対して, 次が成立: 正規 \Rightarrow 正則 \Rightarrow ハウスドルフ $\Rightarrow (T_1)$.

10 数学通論 II (2012/11/27): 中間試験事前救済レポート

レポートについて

- このレポートは, 追試あるいは追加レポートを, 希望者に対して事前に行うものです. 期末試験後の救済措置は, 一切ありません.
- 提出されたレポートは, 中間試験および期末試験の点数が合格ラインに少し足りない場合のみ, 加対象として考慮します.
- 従って, 試験の点数だけで合格ラインに達した学生については, レポートは提出しても提出しなくても成績には全く影響しません.

レポート問題

問題 10.1 (中間試験事前救済レポート, 12/04(火) 講義時に提出). 以下に挙げるそれぞれのキーワードに対して, 関連する中間試験の問題を予想し, それに解答せよ.

- (1) 開集合・閉集合,
- (2) 連続写像,
- (3) 連結・弧状連結,
- (4) コンパクト,
- (5) 分離公理.

レポート作成について

提出されたレポートで予想された問題は, 中間試験問題の作成の参考にさせていただきます. その作業を効率的にするために, レポートは以下の要領に従って作成して下さい:

- 予想した全ての問題は, 上記の (1)–(5) のラベルと一緒に, レポートの 1 ページ目を書いて下さい. 表紙は不要です.
- 予想した問題の解答は, 2 ページ目以降に書いて下さい.

11 数学通論 II (2012/12/07): 中間試験

注意

証明問題の解答を書くときには、まず最初に「示すこと」を書くこと。示すことが正しく書かれていなかったり、答案が著しく読みにくい場合には、採点しないことがあります。

定義や用語など

- 写像が連続とは、任意の開集合の逆像が開集合になること。
- \mathbb{R} 上の右半直線の位相とは、 $\mathcal{O}^+ := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ 。
- 内部とは、 $A^\circ := \{x \in X \mid \exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subset A\}$ 。
- 閉包とは、 $\bar{A} := \{x \in X \mid \forall O \in \mathcal{O} (x \in O), O \cap A \neq \emptyset\}$ 。
- 連結とは、2つの開集合に分けられないこと。
- コンパクトとは、任意の開被覆に対して、有限部分被覆が存在すること。
- ハウスドルフとは、任意の2点が開集合で分離できること。

問題

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする。以下の問題に答えよ。

- [1] 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ が定値写像であるとする (すなわち、像は一点集合である)。このとき、 f は連続であることを示せ。(20点)
- [2] \mathbb{R} に右半直線の位相 \mathcal{O}^+ を入れた空間を考える。 $A := [0, +\infty)$ に対して、
- (1) A の内部 A° を予想し、それを定義に従って示せ。(20点)
 - (2) A の閉包 \bar{A} を予想し、それを定義に従って示せ。(20点)
- [3] 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ が全射かつ連続であるとする。このとき、以下の主張が正しいければ証明し、正しくなければ反例を挙げよ。ただし、挙げた反例に対する証明は不要とする。
- (1) (Y, \mathcal{O}_Y) が連結ならば、 (X, \mathcal{O}_X) も連結である。(20点)
 - (2) (X, \mathcal{O}_X) がコンパクトならば、 (Y, \mathcal{O}_Y) もコンパクトである。(20点)
- [4] (X, \mathcal{O}_X) をハウスドルフ空間、 $A \subset X$ とし、 \mathcal{O}_A を相対位相とする。このとき、 (A, \mathcal{O}_A) もハウスドルフであることを示せ。(20点)
- [5] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら、答案に書いて下さい。

12 数学通論 II (2012/12/11): 開基

集合の開基

X を集合とし, \mathcal{O}' を X の部分集合族とする.

定義 12.1. \mathcal{O}' が 集合 X の開基 とは, 次が成り立つこと:

- (1) $\bigcup \mathcal{O}' = X$.
- (2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{O}', \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists V \in \mathcal{O}' : x \in V \subset B_1 \cap B_2$.

例 12.2. (X, d) を距離空間とすると, 次は X の開基: $\mathcal{O}' := \{U(x; \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$.

定義 12.3. 次の $\langle \mathcal{O}' \rangle$ を \mathcal{O}' の生成する部分集合族 と呼ぶ:

$$\langle \mathcal{O}' \rangle := \{\emptyset\} \cup \{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \mid O_\lambda \in \mathcal{O}'\}.$$

命題 12.4. $\langle \mathcal{O}' \rangle$ が位相になるための必要十分条件は, \mathcal{O}' が X の開基であること.

位相の開基

(X, \mathcal{O}) を位相空間とし, $\mathcal{O}^* \subset \mathcal{O}$ とする.

定義 12.5. \mathcal{O}^* が 位相 \mathcal{O} の開基 とは, 次が成り立つこと: $\langle \mathcal{O}^* \rangle = \mathcal{O}$.

命題 12.6. \mathcal{O}^* が位相 \mathcal{O} の開基であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O \in \mathcal{O}, \forall x \in O, \exists V \in \mathcal{O}^* : x \in V \subset O$.

例 12.7. (X, d) を距離空間とし, \mathcal{O}_d を距離から定まる位相とする. このとき, 次は \mathcal{O}_d の開基: $\mathcal{O}^* := \{U(x; \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$.

問題 12.8 (小テスト問題). 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して, \mathcal{O}_Y^* を \mathcal{O}_Y の開基とし, 次が成り立つとする: $\forall O \in \mathcal{O}_Y^*, f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$. このとき, f は連続であることを示せ.

発展: 第二可算公理

定義 12.9. 位相空間 (X, \mathcal{O}) に対して, 次の条件を 第二可算公理 と呼ぶ: $\exists \mathcal{O}^* : \text{開基 s.t. } \mathcal{O}^* \text{ は高々可算}$.

定理 12.10 (Urysohn の距離付け可能定理). 位相空間 (X, \mathcal{O}) は, 正規かつ第二可算公理を満たすならば, 距離空間と同相である.

13 数学通論 II (2012/12/18): 積位相 (1)

以下では, $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 直積集合 $X \times Y$ の上に位相を定義する.

積位相の定義

命題 13.1. 次で定義される $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ は, $X \times Y$ の開基である:

$$\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y := \{O_X \times O_Y \mid O_X \in \mathcal{O}_X, O_Y \in \mathcal{O}_Y\}.$$

定義 13.2. $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ の生成する部分集合族 $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ を, $X \times Y$ の 積位相 と呼ぶ. また, 位相空間 $(X \times Y, \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle)$ を, (X, \mathcal{O}_X) と (Y, \mathcal{O}_Y) の 積空間 と呼ぶ.

積位相の例

例 13.3. \mathbb{R}^n の標準的な位相を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ で表す. このとき, 次が成り立つ: $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \rangle$.

例 13.4. 円柱 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と $S^1 \times \mathbb{R}$ は同相である.

念のために, 円柱には \mathbb{R}^3 の標準的な位相から決まる相対位相を入れ, $S^1 \times \mathbb{R}$ にはそれぞれの標準的な位相の積位相を入れている. 次の例も同様.

例 13.5. 次で定義されるトーラス T と $S^1 \times S^1$ は同相である:

$$T := \{(2 + \cos \alpha) \cos \beta, (2 + \cos \alpha) \sin \beta, \sin \alpha\} \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

積位相の基本的な性質

次で定義される写像を $(X \rightarrow Y)$ の 自然な射影 と呼ぶ:

$$\pi : X \times Y \rightarrow X : (x, y) \mapsto x.$$

問題 13.6 (小テスト問題). 自然な射影 $\pi : X \times Y \rightarrow X$ は積位相に関して連続であることを示せ.

補題 13.7. 自然な射影 $\pi : X \times Y \rightarrow X$ に関して, 次が成り立つ:

- (1) π は開写像である, すなわち, 任意の開集合の像は開集合である.
- (2) 各 $y \in Y$ に対して, $\pi|_{X \times \{y\}} : X \times \{y\} \rightarrow X$ は同相写像である.

なお, $X \times \{y\}$ には, $X \times Y$ の積位相から決まる相対位相が入っているものとする.

14 数学通論 II (2013/01/15): 積位相 (2)

積位相と他の性質との関係

定理 14.1.

- (1) $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を弧状連結とすると, 積空間も弧状連結である,
- (2) $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連結とすると, 積空間も連結である,
- (3) $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ をコンパクトとすると, 積空間もコンパクトである.

期末試験事前救済レポート問題

問題 14.2 (期末試験事前救済レポート). 以下に挙げるそれぞれのキーワードに対して, 関連する期末試験の問題を予想し, それに解答せよ.

- (1) 位相空間の基本,
- (2) 位相空間の性質,
- (3) 開基,
- (4) 積位相,
- (5) 商位相.

なお, レポートの目的および作成要領は, 中間試験事前救済レポートと全く同様です. 期末試験の日程およびレポートの締切日は, 後日に案内します.

15 数学通論 II (2013/01/22): 商位相

商集合

定義 15.1. X を集合とし, \sim を X 上の同値関係とする. このとき,

- (1) $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$ を x を含む 同値類 と呼ぶ.
- (2) $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ を X の \sim による 商集合 と呼ぶ.

例 15.2. 実数全体の集合 \mathbb{R} に対して, 以下が成り立つ:

- (1) 次で定義される \sim は同値関係: $x \sim x' :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$.
- (2) 上の同値関係に対して, \mathbb{R}/\sim と円 S^1 との間に全単射が存在する.

商位相の定義

命題 15.3. (X, \mathcal{O}_X) を位相空間, $\pi : X \rightarrow Y$ を全射とする. このとき, 次は Y の位相である:

$$\mathcal{O}^\pi := \{O \subset Y \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}.$$

定義 15.4. 上の命題の \mathcal{O}^π を π による商位相 と呼ぶ.

特に, X 上に同値関係 \sim があるとき, 自然な射影 $\pi : X \rightarrow X/\sim : x \mapsto [x]$ による商位相 \mathcal{O}^π を, 商集合 X/\sim 上の 商位相 と呼ぶ. また, 商位相を入れた位相空間を 商空間 と呼ぶ.

商位相の性質

命題 15.5. (X, \mathcal{O}_X) を位相空間, $\pi : X \rightarrow Y$ を全射とする. このとき, π は \mathcal{O}^π に関して連続.

定理 15.6. (X, \mathcal{O}_X) を位相空間, $\pi : X \rightarrow Y$ を全射とする. このとき,

- (1) (X, \mathcal{O}_X) が連結ならば, 商空間 (Y, \mathcal{O}^π) も連結である.
- (2) (X, \mathcal{O}_X) が弧状連結ならば, 商空間 (Y, \mathcal{O}^π) も弧状連結である.
- (3) (X, \mathcal{O}_X) がコンパクトならば, 商空間 (Y, \mathcal{O}^π) もコンパクトである.

商空間の例

例 15.7. 例 15.2 の商集合を \mathbb{R}/\mathbb{Z} で表す. このとき, 商空間 \mathbb{R}/\mathbb{Z} と円 S^1 は同相.

問題 15.8 (小テスト問題). \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} を, 次で定義される同値関係による商集合とする: $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}, y = y'$. このとき, \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} から円柱への全単射を作れ. (ちなみに, 商空間 \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} と円柱は同相である.)

16 数学通論 II (2013/02/01): 期末試験

注意

証明問題の解答を書くときには、まず最初に「示すこと」を書くこと。示すことが正しく書かれていなかったり、答案が著しく読みにくい場合には、採点しないことがあります。

定義や用語など

- 内部とは, $A^\circ := \{x \in X \mid \exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subset A\}$.
- コンパクトとは, 任意の開被覆に対して, 有限部分被覆が存在すること.
- ハウスドルフとは, 任意の 2 点が開集合で分離できること.
- $A \subset X$ の相対位相とは, $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}_X\}$.
- $\langle \mathcal{O}' \rangle := \{\emptyset\} \cup \{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \mid O_\lambda \in \mathcal{O}'\}$.
- \mathcal{O}^* が位相 \mathcal{O} の開基とは, $\langle \mathcal{O}^* \rangle = \mathcal{O}$ が成り立つこと.
- \mathcal{O}_X と \mathcal{O}_Y の積位相とは, $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$.
- 開写像とは, 任意の開集合の像が開集合となること.
- $\pi : X \rightarrow X/\sim$ による商位相とは, $\mathcal{O}^\pi := \{O \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$.

期末試験問題

以下, $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ は位相空間を表すものとする.

- [1] 部分集合 $O \subset X$ に対して, $O^\circ = O$ が成り立つとする. このとき, O は開集合であることを示せ. (20 点)
- [2] (X, \mathcal{O}_X) はハウスドルフであり, 部分集合 $A \subset X$ は相対位相に関してコンパクトであるとする. このとき, A は X の閉集合であることを示せ ([1] の結果を使って良い). (20 点)
- [3] \mathcal{O}_X^* を \mathcal{O}_X の開基とする. 写像 $f : X \rightarrow Y$ が開写像であるための必要十分条件は, 次が成り立つことである: $\forall O \in \mathcal{O}_X^*, f(O) \in \mathcal{O}_Y$. これを示せ. (20 点)
- [4] $X \times Y$ 上で次の同値関係を考える: $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x = x'$. また, 積集合 $X \times Y$ には積位相を入れるものとし, 以下の写像を考える:

$$f : X \times Y \rightarrow X : (x, y) \mapsto x, \quad \pi : X \times Y \rightarrow (X \times Y)/\sim : (x, y) \mapsto [(x, y)].$$

- (1) f が開写像であることを示せ. (20 点)
- (2) 商集合 $(X \times Y)/\sim$ と X の間に全単射が存在することを示せ. (20 点)
- (3) 商空間 $((X \times Y)/\sim, \mathcal{O}^\pi)$ と (X, \mathcal{O}_X) が同相であることを示せ. (20 点)

- [5] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.