対称空間と等質部分多様体 (1)

田丸 博士 (広島大学)

幾何学阿蘇研究集会
休暇村南阿蘇
2013/09/09.

0　概要

- 紹介したいこと:
  - 対称空間論の初歩的な入門と, 関連する部分多様体の話題.
- 主張:
  - 対称空間論は, 多様体構造無しでも展開できる.
    (あまり難しいことを使わなくても, 面白いところまで行ける)
  - 対称空間論は, 興味深い部分多様体の例を供給する.
- 目次:

  §1:　等質な集合.

  §2:　集合としての対称空間.

  §3:　部分多様体 (1): *R*-space.　(明日)

  §4:　部分多様体 (2): Hermann 作用.　(明日)

1　等質な集合

§1.1　概要

▼ やること:

- 等質空間論を多様体構造無しでやる.
  (線型代数と群論だけで出来る... はず)

▼ 目標:

- 群 G が集合 M に推移的に作用する
  $\Leftrightarrow$ $M = G/K$ と書ける ($G \supset \exists K$: 部分群).

▼ 目次:

§1.2　群作用 (1/3)

▼ 記号:

- G : 群,　M : 集合,　$G \ni e$: 単位元.

▼ 定義:

- $\Phi : G \times M \to M : (g, p) \mapsto \varphi_g(p) = g.p$ が **群作用**

  $:\Leftrightarrow$ (i) $(gh).p = g.(h.p)$　$(\forall g, h \in G, \forall p \in M)$,

  (ii) $e.p = p$　$(\forall p \in M)$.

▼ 記号:

- $G \curvearrowright M$

  によって G が M に作用することを表す.

§1.2　群作用 (2/3)

▼ **例:**

- 行列の積 $(g.v := gv)$ により $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$.
- 同様に行列の積により $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright G_k(\mathbb{R}^n)$.

  $(G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid \dim(V) = k\}$: グラスマン)

▼ **例:**

- 行列の共役 $(g.X := gXg^{-1})$ により $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright M_n(\mathbb{R})$.

▼ **例:**

- 一次分数変換により $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$. ただしここで,
  - $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$: 上半平面,
  - $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.z := \dfrac{az+b}{cz+d}$.

§1.2 群作用 (3/3)

▼ **命題:**

- $G \curvearrowright M$ とすると以下が成り立つ:
  - $G \supset H$: 部分群 $\Rightarrow$ $H \curvearrowright M$.
  - $M \supset M'$: G で保たれる $\Rightarrow$ $G \curvearrowright M'$.

▼ **例:**

- (再掲) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \supset \mathrm{O}(n)$: 部分群より, $\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}^n \supset S^{n-1}$ (単位球) は $\mathrm{O}(n)$ で保たれるので, $\mathrm{O}(n) \curvearrowright S^{n-1}$.

▼ **例:**

- (再掲) 行列の共役 $(g.X := gXg^{-1})$ により $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright M_n(\mathbb{R})$.
- 部分群なので $\mathrm{O}(n) \curvearrowright M_n(\mathbb{R})$.
- 保たれるので $\mathrm{O}(n) \curvearrowright \{$ 交代行列 $\}$, $\{$ 対称行列 $\}$.

§1.3　推移的な作用 (1/2)

▼ **定義:**

- $G \curvearrowright M$: **推移的**

  $:\Leftrightarrow \forall p, q \in M,\ \exists g \in G : g.p = q$

- M : **G に関して等質**

  $:\Leftrightarrow$ $\exists$ 推移的な作用 $G \curvearrowright M$.

▼ **例:**

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$: 推移的でない.

  $(\because)$ 0 はどこにも動かないから. $\square$

▼ **補題:**

- $G \curvearrowright M$: 推移的

  $\Leftrightarrow\ \exists o \in M : \forall p \in M,\ \exists g \in G : g.o = p.$

§1.3　推移的な作用 (2/2)

▼ **例:**

- $\mathrm{O}(n) \curvearrowright S^{n-1}$: 推移的.
- $\mathrm{O}(n) \curvearrowright G_k(\mathbb{R}^n)$: 推移的.

(∵) グラスマンの方だけ示す.

$V_0 := \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\} \in G_k(\mathbb{R}^n)$ とおく.

$\forall V \in G_k(\mathbb{R}^n)$ をとる.

(示すこと: $\exists g \in \mathrm{O}(n) : g.V_0 = V$)

V の正規直交基底 $\{x_1, \ldots, x_k\}$ をとる.

拡張して $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ を作る.

このとき $g := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{O}(n)$.

すると $g.V_0 = g.\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\} = V$. □

§1.4　剰余集合 (1/3)

▼ 設定:

- G : 群,　$G \supset K$: 部分群.

▼ 定義:

- G 上の同値関係を次で定義: $g \sim h :\Leftrightarrow g^{-1}h \in K$.
- 商集合を $G/K := G/\sim$ で表し **剰余集合** と呼ぶ.

▼ 補足:

- 同値類: $[g] := \{h \in G \mid h \sim g\} = gK$.
- 商集合: $G/\sim := \{[g] \mid g \in G\}$.

§1.4 剰余集合 (2/3)

- **定理:**
  - G/K : 剰余集合
    $\Rightarrow$ G/K は G に関して等質.

- **証明の方針:**
  - $G \curvearrowright G/K$ by $g.[h] := [gh]$ と定めて, 以下を示す:
    - well-defined であること.
    - 群作用であること.
    - 推移的であること.

§1.5 主定理 (1/3)

- **定理:**
  - $M : G$ に関して等質
    $\Rightarrow$ $G \supset \exists K$: 部分群 s.t. $M = G/K$ (全単射が存在).

- **証明の方針:**
  - 部分群 K は次のように定める:
    - $M \ni p$: 一つ固定.
    - $G_p := \{g \in G \mid g.p = p\}$ (p における 固定部分群).
  - $F : G/G_p \to M : [g] \mapsto g.p$ と定めて, 以下を示す:
    - well-defined であること.
    - 全単射であること.

- **用語:**
  - $M = G/K$ を 等質空間表示 と呼ぶ (こともある).

§1.5　主定理 (2/3)

▼ 例:

- $S^{n-1} = \mathrm{O}(n)/K$, ただし $K := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(n-1) \right\}$.

  (これを略記して $S^{n-1} = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1)$ で表すことが多い)

▼ 証明:

- $\mathrm{O}(n) \curvearrowright S^{n-1}$: 推移的は既に見た.
- よって次を示せば良い: $\exists p \in S^{n-1}$ s.t. $G_p = K$.
- $p := e_1$ とすれば示せる. □

▼ コメント:

- G_p は p に依存する (等質空間表示もそれによって変わる).
- しかし, G_p と G_q は共役なので, あまり気にしない.

§1.5 主定理 (3/3)

▼ 例:

- $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/K$,

  ただし $K := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}),\ \gamma \in \mathrm{GL}_{n-k}(\mathbb{R}) \right\}$.

(∵) $V_0 := \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ における固定部分群を求めれば良い.

▼ 例:

- $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n)/K'$ $(= \mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)))$,

  ただし $K' := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(k),\ \gamma \in \mathrm{O}(n-k) \right\}$.

(∵) 上記の V_0 における固定部分群は $\mathrm{O}(n) \cap K$ だから. □

▼ コメント:

- 同じ集合 M が, 本質的に異なる等質空間表示を持つことがある.

§1.6 おまけ

▼ 多様体構造も考える:

- M : 可微分多様体, G : リー群.

▼ 定義:

- $G \curvearrowright M$: なめらか
  :⇔ 作用を与える写像 $\Phi : G \times M \to M$ がなめらか.

▼ 定理:

- $G \supset K$: 閉部分群
  $\Rightarrow$ $\exists 1$ 可微分多様体構造 on G/K s.t. $G \curvearrowright G/K$: なめらか.

▼ 定理:

- M : 等質多様体 (i.e. $\exists G \curvearrowright M$: なめらか, 推移的)
  $\Rightarrow$ $G \supset G_p$: 閉, $M = G/G_p$: 可微分同相.

2　集合としての対称空間

§2.1　概要

▼ やること:

- 対称空間論を多様体構造無しでやる.

▼ 目標:

- M : 等質な対称空間

  $\Leftrightarrow$ $M = G/K$, ただし (G, K) は "対称対".

▼ 目次:

§2.2: 対称空間の定義.

§2.3: 等質な対称空間.

§2.4: 対称対.

§2.5: 主定理.

§2.2 対称空間の定義 (1/3)

▼ **記号:**

- M : 集合, $\mathrm{Map}(M) := \{ f : M \to M : 写像 \}$.

▼ **定義:**

- $s : M \to \mathrm{Map}(M) : x \mapsto s_x$ とする.
- (M, s) が **対称空間**

  $:\Leftrightarrow$ (i) $\forall x \in M,\ s_x(x) = x$.

  (ii) $\forall x \in M,\ (s_x)^2 = \mathrm{id}$.

  (iii) $\forall x, y \in M,\ s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$. (意味は後で)

▼ **用語:**

- s_x を x における **点対称** と呼ぶ.
- 条件 (ii) を "s_x : 全単射" に弱めたものが **カンドル**.

§2.2　対称空間の定義 (2/3)

▼ 復習:

$$\text{(i)}\ \ s_x(x) = x,\ \ \text{(ii)}\ \ (s_x)^2 = \mathrm{id},\ \ \text{(iii)}\ \ s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x.$$

▼ 例 (自明な対称空間):

- ◦ 任意の集合 M は, 自明な点対称 $(s_x := \mathrm{id})$ により対称空間.

▼ 例 (ユークリッド空間):

- ◦ $\mathbb{R}^n$ は, 通常の点対称 $(s_p(x) := 2p - x)$ により対称空間.

▼ 例 (球面):

- ◦ S^n は, 中心を通る直線に関する折り返しにより対称空間.

  (式で書くと $s_p(x) := -x + 2\langle x, p\rangle p$)

§2.2 対称空間の定義 (3/3)

▼ 例 (グラスマン):

- グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ は, 次により対称空間:
  - $r_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: V に関する折り返し.
  - $s_V : G_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n) : W \mapsto \{r_V(w) \mid w \in W\}$.

▼ 例 (群):

- 任意の群 G は, 次により対称空間: $s_a(g) := ag^{-1}a$.

▼ 補足:

- 群 G 上の点対称の意味は次の通り:
  - $s_e(g) = g^{-1}$.
  - $L_a : G \to G : g \mapsto ag$ (左移動) とすると,
    $L_a \circ s_e \circ L_{a^{-1}}(g) = L_a((a^{-1}g)^{-1}) = ag^{-1}a = s_a(g)$.

§2.3　等質な対称空間 (1/3)

▼ やること:

- 対称空間 (M, s) が 等質 :⇔ 自己同型群 $\mathrm{Aut}(M, s)$ が M に推移的.

▼ 定義:

- $f : (M, s^M) \to (N, s^N)$: 準同型

:⇔ $\forall x \in M,\ f \circ s^M_x = s^N_{f(x)} \circ f$

⇔ $\forall x \in M$, 次が可換:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s^M_x} & M \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{s^N_{f(x)}} & N \end{array}$$

▼ 命題 ($s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$ の解釈):

- $\forall x \in M,\ s_x : M \to M$: 準同型.

§2.3　等質な対称空間 (2/3)

▼ **定義:**

- $f : (M, s^M) \to (N, s^N)$ が **同型** :⇔ f は全単射かつ準同型.
- $\mathrm{Aut}(M, s) := \{ f : M \to M : 同型 \}$ を **自己同型群**.

▼ **命題:**

- $\forall x \in M,\ \ s_x \in \mathrm{Aut}(M, s)$.

  (余談: $\{s_x \mid x \in M\}$ で生成される部分群を **内部自己同型群**)

▼ **定義:**

- (M, s) が **等質** :⇔ $\mathrm{Aut}(M, s) \curvearrowright M$ が推移的.

▼ **例:**

- (M, s) : 自明な対称空間 $(s_x = \mathrm{id})$ は等質.

  $(\because)$ $\mathrm{Aut}(M, s) = \{ f : M \to M : 全単射 \}$ だから. □

§2.3　等質な対称空間 (3/3)

▼ **例:**

- **球面 S^n は等質な対称空間.**

  $(\because)$ $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{Aut}(S^n, s)$ を示せば十分.

  点対称は次で与えられてた: $s_p(x) := -x + 2\langle x, p\rangle p.$

  $\mathrm{O}(n)$ の作用は和とスカラー倍と内積を保つので, 点対称も保つ.

▼ **例:**

- **群 G $(s_a(g) = ag^{-1}a)$ は等質な対称空間.**

  $(\because)$ 左作用 $G \curvearrowright G$ が自己同型を示せば良い.

  (ここで左作用は $a.g := L_a(g) = ag$ で与えられてた)

  点対称は s_e を左移動でばらまいたものだった

  $$(s_a = L_a \circ s_e \circ L_{a^{-1}})$$

  ことから従う. $\square$

§2.4　対称対 (1/2)

▼ やること:

- §2.4 で対称対を定義.
- §2.5 で次を示す: 等質な対称空間 $\leftrightarrow$ 対称対.

▼ 記号:

- G は群, $G \supset K$ は部分群.

▼ 定義:

- 組 (G, K, σ) が **対称対**
  :⇔ (i) $\sigma : G \to G$ は対合的 $(\sigma^2 = \mathrm{id})$ な群自己同型.
  (ii) $K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G) := \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$.

▼ 例:

- $\sigma = \mathrm{id}$ のとき (G, K, σ) は対称対 (**自明な対称対**).

§2.4 対称対 (2/2)

▼ 例:

- $G := \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\sigma : G \to G : g \mapsto {}^t g^{-1}$

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{Fix}(\sigma, G) = \mathrm{SO}(n)$.

  • $\forall K \subset \mathrm{SO}(n)$, (G, K, σ) は対称対.

▼ 記号:

- I_n を単位行列, $I_{p,q} := \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$.

▼ 例:

- $G := \mathrm{O}(n)$, $\sigma : G \to G : g \mapsto I_{k,n-k}\, g\, I_{k,n-k}$

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{Fix}(\sigma, G) = \mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$.

  • $\forall K \subset \mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$, (G, K, σ) は対称対.

§2.5 主定理 (1/3)

▼ やること:

- 等質な対称空間 $\leftrightarrow$ 対称対.

▼ 定理 (対称対 $\to$ 等質な対称空間):

- (G, K, σ) が対称対

  $\Rightarrow$ 以下で定まる s によって G/K は等質な対称空間となる:

  - $s_{[e]}([g]) := [\sigma(g)]$.
  - $a \in G$ に対して $\varphi_a : G/K \to G/K : [g] \mapsto [ag]$.
  - $s_{[a]} := \varphi_a \circ s_{[e]} \circ \varphi_{a^{-1}}$. ($G$ の作用でばらまいた)

▼ コメント:

- 証明は直接計算.
- s が well-defined の証明に $K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$ が必要.

§2.5　主定理 (2/3)

- **定理 (等質な対称空間 → 対称対):**
  - ◦ (M, s) が等質な対称空間

    $\Rightarrow$ 以下で定まる (G, K, σ) は対称対である:
    - $G := \mathrm{Aut}(M, s)$.
    - $M \ni p$ を一つ選んで，$K := G_p$ (固定部分群).
    - $\sigma : G \to G : g \mapsto s_p\, g\, s_p$ (ここで $s_p \in G$ に注意).

- **まとめ:**
  - ◦ 等質な対称空間 (M, s) $\leftrightarrow$ 対称対 (G, K, σ).

- **例:**
  - ◦ 自明な対称空間 (M, s) $(s_x = \mathrm{id})$

    $\leftrightarrow$ 自明な対称対 (G, K, σ) $(\sigma = \mathrm{id})$.

§2.5　主定理 (3/3)

- **対称対の復習:**
  - $G := \mathrm{O}(n)$, $\sigma : G \to G : g \mapsto I_{k,n-k}\, g\, I_{k,n-k}$

    $\Rightarrow$ $\forall K \subset \mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$, (G, K, σ) は対称対.

- **例 (球面 S^n):**
  - (復習) $S^{n-1} = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1)$ だった.
  - $\sigma : \mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(n) : g \mapsto I_{1,n-1}\, g\, I_{1,n-1}$ と定義.
  - すると $(\mathrm{O}(n), \mathrm{O}(n-1), \sigma)$ は対称対.

- **例 (グラスマン $G_k(\mathbb{R}^n)$):**
  - (復習) $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k))$ だった.
  - $(\mathrm{O}(n), \mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k), \sigma)$ (ただし σ は上記のもの) は対称対.

§2.6 おまけ

▼ **定義:**

- リーマン多様体 (M, g) が **リーマン対称空間**

  $:\Leftrightarrow\ \forall x \in M,\ \exists s_x : M \to M$: 等長変換 s.t.
  - $s_x(x) = x$.
  - $(s_x)^2 = \mathrm{id}$.
  - $\mathrm{Fix}(s_x, M) \supset \{x\}$ は開集合.

▼ **命題:**

- 連結リーマン対称空間 $\Rightarrow$ (集合としての) 対称空間.

▼ **定理:**

- 連結リーマン対称空間はリーマン対称対 (G, K, σ) と対応する.
- ここで, (G, K, σ) が **リーマン対称対**

  $:\Leftrightarrow$ 対称対, G は連結リー群, $\mathrm{Fix}(\sigma, G)^0 \subset K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$.