対称空間と等質部分多様体 (2)

田丸 博士 (広島大学)

幾何学阿蘇研究集会
休暇村南阿蘇
2013/09/10.

0 概要

- **紹介したいこと:**
  - 対称空間論の初歩的な入門と, 関連する部分多様体の話題.
- **主張:**
  - 対称空間論は, 多様体構造無しでも展開できる.
    (あまり難しいことを使わなくても, 面白いところまで行ける)
  - 対称空間論は, 興味深い部分多様体の例を供給する.
- **目次:**

  §1: 等質な集合. (昨日)

  §2: 集合としての対称空間. (昨日)

  §3: 部分多様体 (1): R-space.

  §4: 部分多様体 (2): Hermann 作用.

3　等質部分多様体 (1): R-space

§3.1　概要

▼ §3, §4 の概要:

- 対称空間が, 部分多様体論 (の様々な場面) に登場する.

▼ §3 の概要:

- リーマン対称空間

  $\Rightarrow$ 線型イソトロピー表現

  $\Rightarrow$ R-space ($\mathbb{R}^n$ および S^{n-1} 内の良い部分多様体の例を供給)

▼ 目次:

§3.2: 表現.

§3.3: 特徴的な例.

§3.4: 線型イソトロピー表現.

§3.5: R-space.

§3.2　表現 (1/2)

▼ 定義:

- K を群, V をベクトル空間とする.
- 群作用 $K \curvearrowright V$ が **表現** (または **線型表現**)
  :⇔ $\forall g \in K,\ \varphi_g : V \to V : v \mapsto g.v$ が線型写像.

▼ 例:

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ は表現.
- $\forall K \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ K \curvearrowright \mathbb{R}^n$ も表現.

▼ 例:

- 行列の共役 $(g.X := gXg^{-1})$ による $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright M_n(\mathbb{R})$ は表現.
- 行列の共役による $\mathrm{O}(n) \curvearrowright \{$ 交代行列 $\}, \{$ 対称行列 $\}$ も表現.

§3.2　表現 (2/2)

▼ **定義:**

- $G \curvearrowright M \ni p$ とする.
- $G.p := \{g.p \in M \mid g \in G\}$ を p を通る **軌道**.
  ($M \supset G.p$ を (文脈に依存するが) **等質部分多様体**)

▼ **例:**

- $\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$
  $\Rightarrow$ • $p = 0$ なら $\mathrm{O}(n).p = \{0\}$.
  • $p \neq 0$ なら $\mathrm{O}(n).p \cong S^{n-1}$ (半径 $|p|$ の球面).

▼ **例:**

- $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \curvearrowright \mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$
  $\Rightarrow$ 軌道 $\cong \{0\}$, S^{p-1}, S^{q-1}, $S^{p-1} \times S^{q-1}$.

§3.3 特徴的な例 (1/4)

▼ 例:

- $\mathrm{Sym}_n^0(\mathbb{R}) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X = {}^t X,\ \mathrm{tr}(X) = 0\}$.
- 行列の共役 ($g.X := gXg^{-1}$) による $\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathrm{Sym}_n^0(\mathbb{R})$ は表現.

▼ やること:

- $\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathrm{Sym}_n^0(\mathbb{R})$ の軌道を調べる.

▼ Step 1:

- $\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathrm{Sym}_n^0(\mathbb{R})$.
- $\mathfrak{a} := \{$ 対角行列, $\mathrm{tr} = 0\}$.

  $\Rightarrow$ 全ての軌道は $\mathfrak{a}$ と交わる.

  (i.e., $\forall X \in \mathrm{Sym}_n^0(\mathbb{R}),\ \exists g \in \mathrm{O}(n) : gXg^{-1} \in \mathfrak{a}$).

  ($\because$) 対称行列は直交行列で対角化できるから. □

§3.3 特徴的な例 (2/4)

- **Step 2:**
  - $\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathrm{Sym}_n^0(\mathbb{R})$,
  - $\mathfrak{a} \supset W := \{\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \geq \cdots \geq a_n\}$

    $\Rightarrow$ 全ての軌道は W と交わる.

    (i.e., $\forall X \in \mathrm{Sym}_n^0(\mathbb{R})$, $\exists g \in \mathrm{O}(n)$: $gXg^{-1} \in W$).

  (∵) 線型代数. □

- **Step 3 (ここから $n = 3$):**
  - $X = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3) \in W$ は, 以下のケースに分けられる:
    - $a_1 = a_2 = a_3 \ (= 0)$.
    - $a_1 = a_2 > a_3$.
    - $a_1 > a_2 = a_3$.
    - $a_1 > a_2 > a_3$.

§3.3　特徴的な例 (3/4)

- **Step 4:**
  - 一般に X を通る軌道は $\mathrm{O}(n).X = \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n)_X$ (等質空間表示).
  - 個別に固定部分群を求めることにより,
    - $a_1 = a_2 = a_3$ のとき，軌道 $= \{X\}$.
    - $a_1 = a_2 > a_3$ のとき，軌道 $= \mathrm{O}(3)/(\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(1))$.
    - $a_1 > a_2 = a_3$ のとき，軌道 $= \mathrm{O}(3)/(\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(2))$.
    - $a_1 > a_2 > a_3$ のとき，軌道 $= \mathrm{O}(3)/(\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1))$.

- **Step 5:**
  - $\mathrm{O}(3)/(\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(1)) = G_2(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^2$.
  - $\mathrm{O}(3)/(\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(2)) = G_1(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^2$.
  - $\mathrm{O}(3)/(\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1)) = F_{1,2}(\mathbb{R}^3)$: 旗多様体

    $(F_{1,2}(\mathbb{R}^3) := \{(V_1, V_2) \mid V_1 \subset V_2 \subset \mathbb{R}^3,\ \dim V_k = k\})$

§3.3 特徴的な例 (4/4)

▼ 補足:

- $O(n) \curvearrowright \mathrm{Sym}^0_n(\mathbb{R})$ は次の内積を保つ: $\langle X, Y\rangle := \mathrm{tr}(XY)$.
- 従って $O(n) \curvearrowright$ 単位球 $\subset \mathrm{Sym}^0_n(\mathbb{R})$.

▼ 例:

- $O(3) \curvearrowright \mathrm{Sym}^0_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^5 \supset S^4$ の軌道により,
  - $S^4 \supset \mathbb{R}P^2$: Veronese 曲面.
  - $S^4 \supset F_{1,2}(\mathbb{R}^3)$: Cartan 超曲面.

    (注: $\dim F_{1,2}(\mathbb{R}^3) = 3$, 主曲率は 3 種)

▼ 補足:

- $O(n) \curvearrowright \mathrm{Sym}^0_n(\mathbb{R})$ は一般に次を軌道にもつ:
  - グラスマン多様体,
  - (一般化された) 旗多様体.

§3.4 線型イソトロピー表現 (1/3)

- ▼ やること:
  - 先ほどの表現 $\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathrm{Sym}^0_n(\mathbb{R})$ は対称空間と関係ある.
- ▼ 復習:
  - $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n), \sigma)$ は (リーマン) 対称対だった.

    (ただし $\sigma(g) = {}^t g^{-1}$)
- ▼ 命題:
  - $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$: $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ のリー代数.

    (とりあえず $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ の単位元での接空間と思って良い)
  - 共役によって $\mathrm{SO}(n) \curvearrowright \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.

    $\Rightarrow$ $\mathrm{SO}(n)$ の作用は次の分解を保つ:

    $$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{\text{ 交代行列 }\} \oplus \mathrm{Sym}^0_n(\mathbb{R}).$$

    (ここから $\mathrm{SO}(n) \curvearrowright \mathrm{Sym}^0_n(\mathbb{R})$ が出てくる)

§3.4 線型イソトロピー表現 (2/3)

▼ **再掲:**

- $(SL_n(\mathbb{R}), SO(n), \sigma)$ ： (リーマン) 対称対.
- $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{$ 交代行列 $\} \oplus \mathrm{Sym}_n^0(\mathbb{R})$.
- $SO(n) \curvearrowright \mathrm{Sym}_n^0(\mathbb{R})$.

▼ **事実 (一般的に):**

- (G, K, σ) ： リーマン対称対,
- $\mathfrak{g}$ ： G のリー代数 $(= T_eG)$,
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ ： $(d\sigma)_e$ による固有空間分解 (固有値は ± 1)

  $\Rightarrow$ $K \curvearrowright \mathfrak{p}$ (これを **線型イソトロピー表現** という).

▼ **事実:**

- 線型イソトロピー表現は, 次の作用と同値:

  $K \curvearrowright T_oM$ by $g.X := (dg)_o(X)$ (ただし o は K で固定される点)

§3.4 線型イソトロピー表現 (3/3)

▼ おはなし:

- 線型イソトロピー表現の軌道は, ルート系を使って調べられる.

▼ 先の “特徴的な例” と比較しながら:

- (Step 1) $\mathrm{Sym}_n^0(\mathbb{R}) \supset \mathfrak{a}$ を考えた. $\leftrightarrow$ 極大可換部分空間
- (Step 2) $\mathfrak{a} \supset W$ を考えた. $\leftrightarrow$ Weyl chamber
- (Step 3) $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ の場合分けをした. $\leftrightarrow$ ルートベクトル
- (Step 4) 軌道の固定部分群を求めた. $\leftrightarrow$ ルート空間分解

§3.5 *R*-space (1/3)

▼ 定義:

- $M = G/K$: リーマン対称空間.
- 線型イソトロピー表現 $K \curvearrowright \mathfrak{p}$ の軌道を ***R*-space** と呼ぶ.

▼ 注意:

- *R*-space は, 自然に $\mathfrak{p}$ (ユークリッド空間) またはその "単位球" の中の部分多様体となる.

▼ 例:

- $M = S^{n+1} = \mathrm{SO}(n+2)/\mathrm{SO}(n+1)$
  $\Rightarrow$ 線型イソトロピー表現は $\mathrm{SO}(n+1) \curvearrowright \mathbb{R}^{n+1}$ (自然な作用)
  $\Rightarrow$ $p \neq 0$ なら $\mathrm{SO}(n+1).p \cong S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ は *R*-space.

§3.5　R-space (2/3)

▼ 例:

- $M = S^1 \times S^n = (\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(n+1))/\mathrm{SO}(n)$

  ⇒ 線型イソトロピー表現は $\mathrm{SO}(n) \curvearrowright \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$

  ⇒ 上手く x を選べば次は R-space:

  $\mathrm{SO}(n).x \cong S^{n-1}$ ($\subset S^n$(単位球) $\subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$)

  (これは, 主曲率 1 種の等質超曲面)

▼ 例:

- $M = S^p \times S^q = (\mathrm{SO}(p+1) \times \mathrm{SO}(q+1))/(\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q))$

  ⇒ 線型イソトロピー表現は $\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q) \curvearrowright \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$

  ⇒ 上手く x を選べば次は R-space:

  $(\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q)).x \cong S^{p-1} \times S^{q-1}$ ($\subset S^{p+q-1} \subset \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$)

  (これは, $p, q > 1$ なら, 主曲率 2 種の等質超曲面)

§3.5 *R*-space (3/3)

▼ 例 (再掲):

- $M = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ (コンパクトじゃないけど気にしない)

  ⇒ 線型イソトロピー表現は $\mathrm{SO}(3) \curvearrowright \mathrm{Sym}^0_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^5$

  ⇒ 上手く x を選べば次は R-space:

  $\mathrm{SO}(3).x \cong F_{1,2}(\mathbb{R}^3)$ ($\subset S^4$(単位球) $\subset \mathbb{R}^5$)

  (これは, 主曲率 3 種の等質超曲面)

▼ 定理 (Hsiang-Lawson 1971):

- $M = G/K$: "階数 2" 対称空間

  ⇒ 線型イソトロピー表現の軌道は, 球面内の等質超曲面を与える.
- 逆に, 球面内の全ての等質超曲面は, この方法で得られる.

▼ コメント:

- 後者の "conceptual" な証明は知られていない.

§3.6 おまけ

- **おはなし:**
  - 複素射影空間 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 内の等質超曲面の分類 (高木 1973).

- **命題 (高木 1973):**
  - $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$: Hopf fibration.
  - $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \supset M$: 等質超曲面

    $\Rightarrow$ $S^{2n+1} \supset \pi^{-1}(M)$: 等質超曲面.

- **コメント:**
  - $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 内の等質超曲面

    $\leftrightarrow$ S^{2n+1} 内の等質超曲面のうち, 上手く落ちるもの

    $\leftrightarrow$ 階数 2 の “エルミート” 対称空間の線型イソトロピー表現.

4　等質部分多様体 (2): Hermann 作用

§4.1　概要

▼ §3, §4 の概要:

- 対称空間が, 部分多様体論 (の様々な場面) に登場する.

▼ §4 の概要:

- (G, K), (G, H) : リーマン対称対

  $\Rightarrow$ $H \curvearrowright G/K$: Hermann 作用

  $\Rightarrow$ その軌道は, G/K 内の良い部分多様体の例を供給.

▼ 目次:

§4.2: 球面 S^n の場合.

§4.3: 複素射影空間 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ の場合.

§4.4: グラスマン $G_k(\mathbb{R}^n)$ の場合.

§4.5: 一般論.

§4.2　球面 S^n の場合 (1/2)

▼ 復習:

- $S^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$.
- $(\mathrm{O}(n+1), H)$ が対称対

  $\Rightarrow$ $H \curvearrowright S^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$: Hermann 作用.

▼ 例:

- $(\mathrm{O}(n+1), \mathrm{O}(n))$ は対称対

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{O}(n) \curvearrowright S^n$: Hermann 作用.

  (注: $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$)

  • この作用は, 超曲面軌道 ($\cong S^{n-1}$) をもつ.

§4.2　球面 S^n の場合 (2/2)

▼ 復習 (再掲):

- $S^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$.
- $(\mathrm{O}(n+1), H)$ が対称対

  $\Rightarrow$ $H \curvearrowright S^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$: Hermann 作用.

▼ 例:

- $(\mathrm{O}(p+q), \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q))$ は対称対

  $\Rightarrow$ • $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \curvearrowright S^{p+q-1}$: Hermann 作用.

  (注: $S^{p+q-1} \subset \mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$)

  • この作用の軌道は, S^{p-1}, S^{q-1}, $S^{p-1} \times S^{q-1}$.

  (特に, $S^{p+q-1} \supset S^{p-1} \times S^{q-1}$ は等質超曲面)

§4.3 複素射影空間 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ の場合 (1/3)

▼ 参考:

- $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = G_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathrm{O}(n+1)/(\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n))$ だった.
- 同様に, $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = G_1(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathrm{U}(n+1)/(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n))$.
- $(\mathrm{U}(n+1), H)$ が対称対

  $\Rightarrow$ $H \curvearrowright \mathbb{C}\mathrm{P}^n$: Hermann 作用.

▼ 例:

- $(\mathrm{U}(n+1), \mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n))$ は対称対
- $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n) \curvearrowright \mathbb{C}\mathrm{P}^n$: Hermann 作用

  $\Rightarrow$ この作用の軌道は以下のいずれか:
  - 原点 $\{o\}$, 全測地的 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$, 測地球 S^{2n-1}.

  (∵) $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n) \curvearrowright \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^n$ を考える.
  その軌道は S^1, S^{2n-1}, $S^1 \times S^{2n-1}$. これを落とせば良い. □

§4.3 複素射影空間 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ の場合 (2/3)

▼ **例:**

- $(\mathrm{U}(p+q), \mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$ は対称対
- $\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q) \curvearrowright \mathbb{C}\mathrm{P}^{p+q-1}$: Hermann 作用

  $\Rightarrow$ この作用の軌道は以下のいずれか:

  - 全測地的 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{p-1}$,
  - 全測地的 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{q-1}$,
  - 等質超曲面 $\pi(S^{2p-1} \times S^{2q-1})$.

  $(\because)$ $\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q) \curvearrowright \mathbb{C}^{p+q} = \mathbb{C}^p \oplus \mathbb{C}^q$ を考える.

  その軌道は S^{2p-1}, S^{2q-1}, $S^{2p-1} \times S^{2q-1}$. $\square$

▼ **コメント:**

- 上記の等質超曲面 $\pi(S^{2p-1} \times S^{2q-1})$ は,
  - 全測地的 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{p-1}$ の周りの tube.
  - “A 型” の等質超曲面ということもある.

§4.3 複素射影空間 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ の場合 (3/3)

▼ 例:

- $(\mathrm{U}(n+1), \mathrm{O}(n+1))$ は対称対 $(\sigma(g) = \bar{g})$
- $\mathrm{O}(n+1) \curvearrowright \mathbb{C}\mathrm{P}^n$: Hermann 作用

  $\Rightarrow$ この作用の軌道は以下のいずれか:
  - 全測地的 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$,
  - 二次曲面 $Q^{n-1} := \{[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \mid z_0^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}$,
  - 上記のいずれかの周りの tube.

  $(\because)$ $\mathrm{O}(n+1) \curvearrowright \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \oplus i\,\mathbb{R}^{n+1}$ を考える.

  $x + yi \in \mathbb{C}^n$ が, $y = 0$, $\{x, y\}$ が o.n., それ以外, に対応. □

▼ コメント:

- 上記の tube を, "B 型" の等質超曲面ということもある.

§4.4 グラスマン $G_k(\mathbb{R}^n)$ の場合 (1/2)

▼ 参考:

- $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k))$.
- $(\mathrm{O}(n), H)$ が対称対

  $\Rightarrow$ $H \curvearrowright G_k(\mathbb{R}^n)$: Hermann 作用.

▼ 例:

- $(\mathrm{O}(n), \mathrm{O}(n-1))$ は対称対,
- $\mathrm{O}(n-1) \curvearrowright G_k(\mathbb{R}^n)$: Hermann 作用

  $\Rightarrow$ この作用の軌道は以下のいずれか:

  - 全測地的 $G_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathrm{O}(n-1)/(\mathrm{O}(k-1) \times \mathrm{O}(n-k))$,
  - 全測地的 $G_k(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathrm{O}(n-1)/(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k-1))$,
  - 上記のいずれかの周りの tube.

§4.4 グラスマン $G_k(\mathbb{R}^n)$ の場合 (2/2)

▼ 例 (再掲):

- ○ $O(n-1) \curvearrowright G_k(\mathbb{R}^n)$ の軌道は以下のいずれか:
  - 全測地的 $G_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})$,
  - 全測地的 $G_k(\mathbb{R}^{n-1})$,
  - 上記のいずれかの周りの tube.

$(\because)$ $O(n-1)$ は e_1 を固定するとする.

$V_1 := \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\} \in G_k(\mathbb{R}^n)$ とすると,

$$O(n-1).V_1 = \{V \in G_k(\mathbb{R}^n) \mid e_1 \in V\} \cong G_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

$V_2 := \mathrm{span}\{e_2, \ldots, e_{k+1}\} \in G_k(\mathbb{R}^n)$ とすると,

$$O(n-1).V_2 = \{V \in G_k(\mathbb{R}^n) \mid e_1 \perp V\} \cong G_k(\mathbb{R}^{n-1}). \quad \square$$

▼ コメント:

- ○ これによって $G_k(\mathbb{R}^n)$ 内の等質超曲面が得られる.

§4.5 一般論

▼ **観察:**

- $H \curvearrowright G/K$: Hermann 作用

  $\Rightarrow$ 軌道は (等質超曲面などの) 興味深い部分多様体の例を供給.

▼ **定理:**

- $H \curvearrowright G/K$: Hermann 作用

  $\Rightarrow$ 作用は hyperpolar.

  i.e., $\exists \Sigma$: 平坦な全測地的部分多様体

  s.t. 全ての H-軌道は Σ と直交して交わる.

▼ **参考:**

- 一般に, $H \curvearrowright G/K$ が 余等質性 1 (i.e., 超曲面軌道をもつ)

  $\Rightarrow$ hyperpolar.
- このことは, Hermann 作用が良い性質を持つことの状況証拠かも...

§4.6　おまけ (1/2)

- **定理 (Kollross 2002):**
  - G/K : コンパクト既約リーマン対称空間, 階数 ≥ 2.
  - $H \curvearrowright G/K$: hyperpolar

    $\Rightarrow$ この作用は余等質性 1 または Hermann 作用 (と軌道同値).

- **コメント:**
  - 証明は, かなり細かい個別の議論が必要.
  - 現時点では "conceptual" な証明は知られていない.

§4.6 おまけ (2/2)

- ところで:
  - G/K : 非コンパクト型対称空間 (e.g., 双曲空間) だと？
- 現在の状況:
  - (Berndt-T. 2013)
    余等質性 1 作用については, かなり分かって来ている.
  - (Berndt-DiazRamos-T. 2010)
    hyperpolar 作用のうち, 特異軌道が無いものは分類済.
  - いずれの場合も, コンパクトとは様相も手法も全く違う:
    - 作用する群はコンパクトとは限らない.
    - 可解群とか放物型部分群とかの理論が有効.
  - まだまだ未解決な問題がいっぱい...