平成 25 年度卒業論文
二面体カンドルの直積の平坦性

広島大学理学部数学科
B104885 石原吉崇
指導教員 田丸博士 教授

2014 年 2 月 10 日

はじめに

私は, ゼミで集合としての対称空間について学習してきた. リーマン対称空間には平坦や連結といった概念がある. 本研究の目的は, リーマン対称空間の一般化であるカンドルで有限平坦かつ連結なものを分類することである. リーマン対称空間が平坦とは, その曲率が 0 となることである. また, 曲率が 0 と 変位の群の可換性が同値であることが知られている (Loos [2]). 本論文では, カンドルの平坦性を変位の群の可換性で定義し, 平坦なカンドルの例として二面体カンドルの直積が平坦であることを示す.

第一章では準備として, 一般線型群を紹介し, その後の証明に用いる一般線型群の部分群をいくつか紹介する.

第二章では, 集合としての対称空間とカンドルを紹介する. 第一節で集合としての対称空間を定義し, 第二節でカンドルが対称空間の拡張となることを紹介する.

第三章では, 第一節でカンドルの平坦性を定義し, 第二節でカンドルの直積が平坦性を保つことを示す.

第四章では, 第一節で二面体カンドルを紹介する. 第二節では二面体カンドルが平坦であることを用いて, 二面体カンドルの直積が平坦であることを述べる.

また付録として, 二面体カンドルの直積の連結性と, 二面体カンドルの変位の群と内部自己同型群の構造について紹介する.

本論文を書くにあたり, 指導教員の田丸博士教授, 並びに先輩方には多くのことを指導していただきました. 最後になりましたが, この場をお借りして深く御礼申し上げます.

目次

1 **準備** 1

1.1 実行列の成す群 1

2 **集合としての対称空間とカンドル** 3

2.1 集合としての対称空間 3

2.2 カンドル 3

3 **平坦なカンドルの直積の平坦性** 5

3.1 平坦なカンドル 5

3.2 平坦なカンドルの直積の平坦性 5

4 **二面体カンドルの直積の平坦性** 7

4.1 二面体カンドル 7

4.2 二面体カンドルの直積の平坦性 7

5 **付録** 1 9

5.1 群作用 9

5.2 推移的な群作用 10

5.3 連結なカンドル 11

5.4 連結なカンドルの直積の連結性 12

5.5 二面体カンドルの直積の連結性 13

6 **付録** 2 15

6.1 二面体カンドルの変位の群と内部自己同型群の構造 15

1　準備

この章では, 準備として, 後の証明に用いる実行列の成す群をいくつか紹介する.

1.1　実行列の成す群

以下, $M(n,\mathbb{R})$ は $n \times n$ 実行列の全体を表すものとする. また, 行列 $g \in M(n,\mathbb{R})$ の行列式を $\det(g)$ で表す.

定義 1.1. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) := \{g \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **一般線型群** と呼ぶ.

一般線型群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ は, 行列の積に関して群となる. 次に, その部分群として得られる典型的な群をいくつか紹介する. 行列 g の転置行列を ${}^t g$ で表し, n 次の単位行列を I_n で表す.

例 1.2. 以下は, 一般線型群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の部分群である:

(1) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) := \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$　(これを **特殊線型群** と呼ぶ).
(2) $\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n\}$　(これを **直交群** と呼ぶ).
(3) $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n)$　(これを **特殊直交群** と呼ぶ).

証明. 一般線型群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の部分群であることを示すためには, 積と逆元をとる操作に関して閉じていることを示せばよい. (1) 特殊線型群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ が部分群であることは, 行列式の性質 $\det(gh) = \det(g)\det(h)$ から従う. (2) 直交群 $\mathrm{O}(n)$ が部分群であることは, 転置行列の性質 ${}^t(gh) = {}^t h {}^t g$ から従う. (3) 特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ が部分群であることは, 部分群と部分群の共通部分が部分群であることから従う. □

次に, 直交群 $\mathrm{O}(n)$ と $\mathbb{R}^n$ 上の自然な内積が関係することをみる. ここで, $\mathbb{R}^n$ 上の自然な内積 $\langle , \rangle$ は, $\mathbb{R}^n$ の元を縦ベクトルとして,

$$\langle v, w \rangle := {}^t v w \quad (u, w \in \mathbb{R}^n) \tag{1.1}$$

により定義されていたことに注意する.

命題 1.3. 各 $g \in M(n,\mathbb{R})$ に対して, 以下は互いに同値である:

(1) $g \in \mathrm{O}(n)$.
(2) g は $\langle , \rangle$ を保つ. すなわち, 任意の $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$.
(3) $g = (v_1 \cdots v_n)$ と表すと, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底.

証明. まず, (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. そのために, $g \in \mathrm{O}(n)$ と仮定する. 任意に $v, w \in \mathbb{R}^n$ をとる. 内積 $\langle , \rangle$ の定義より,

$$\langle gv, gw \rangle = {}^t(gv)(gw) = {}^t v({}^t g g)w = {}^t v w = \langle v, w \rangle. \tag{1.2}$$

よって, g は $\langle , \rangle$ を保つ.

次に, (2) $\Rightarrow$ (3) を示す. そのために, g が自然な内積 $\langle , \rangle$ を保つと仮定する. また, $g = (v_1 \cdots v_n)$ と表す. $\mathbb{R}^n$ の標準的な基底を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ とすると,

$$ge_i = (v_1 \cdots v_n)e_i = v_i. \tag{1.3}$$

よって, δ_{ij} をクロネッカーのデルタとすると,

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle ge_i, ge_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}. \tag{1.4}$$

すなわち, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である.

最後に, (3) $\Rightarrow$ (1) を示す. そのために, $g = (v_1 \cdots v_n)$ と仮定したとき, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底であると仮定する. すると,

$${}^t gg = {}^t(v_1 \cdots v_n)(v_1 \cdots v_n) = ({}^t v_i v_j) = (\delta_{ij}) = I_n. \tag{1.5}$$

また, 上の式と行列式の性質 $\det({}^t g) = \det(g)$ により $\det(g) \neq 0$ である. よって, $g \in \mathrm{O}(n)$ である. $\square$

2 集合としての対称空間とカンドル

この章ではまず, 対称空間の定義の述べ, いくつかの具体例を紹介する. 次に, カンドルを定義を述べ, 対称空間との関係を述べる.

2.1 集合としての対称空間

この節では, 集合としての対称空間の定義を述べ, いくつかの具体例を紹介する. 集合 X から集合 Y への写像全体の集合を $\mathrm{Map}(X, Y)$ で表す.

定義 2.1. M を集合とし, 写像 $s : M \to \mathrm{Map}(M, M) : p \mapsto s_p$ を考える. このとき, 組 (M, s) が **対称空間** であるとは, 以下が成り立つこと:

(S1) $\forall p \in M, s_p(p) = p$.

(S2) $\forall p \in M, (s_p)^2 = \mathrm{id}_M$.

(S3) $\forall p, q \in M, s_p \circ s_q = s_{s_p(q)} \circ s_p$.

対称空間 (M, s) に対して, s を **対称空間構造**, 各 s_p を p における **点対称** と呼ぶ. 対称空間 (M, s) を単に M で表すこともある. また定義から, 任意の $p \in M$ に対して, $(s_p)^{-1} = s_p$ となる.

例 2.2. 任意の集合 M は, 次の点対称により対称空間となる: 各 $p \in M$ に対して, $s_p := \mathrm{id}_M$.

対称空間であるための条件を確かめることは容易である. 各点における点対称が恒等写像であるような対称空間を, **自明な対称空間** と呼ぶ.

例 2.3. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ は, 次の点対称により対称空間となる: 各 $p, x \in \mathbb{R}$ に対して, $s_p(x) := 2p - x$.

証明. 対称空間の条件 (S1) は明らか. 条件 (S2) を示す. 任意の $p, x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$(s_p)^2(x) = s_p(2p - x) = 2p - (2p - x) = x. \tag{2.1}$$

よって, $(s_p)^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ となる.

次に, 条件 (S3) を示す. 任意の $p, q, x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$(s_p \circ s_q)(x) = s_p(2q - x) = 2p - (2q - x) = 2p - 2q + x, \tag{2.2}$$

$$(s_{s_p(q)} \circ s_p)(x) = s_{(2p-q)}(2p - x) = 2(2p - q) - (2p - x) = 2p - 2q + x. \tag{2.3}$$

したがって, $s_p \circ s_q = s_{s_p(q)} \circ s_p$ となる. □

2.2 カンドル

この節では, カンドルの定義を述べ, 対称空間との関係を紹介する.

定義 2.4. M を集合とし, 写像 $s : M \to \mathrm{Map}(M, M) : p \mapsto s_p$ を考える. このとき, 組 (M, s) が **カンドル** であるとは, 以下が成り立つこと:

(Q1) $\forall p \in M,\ s_p(p) = p$.

(Q2) $\forall p \in M,\ s_p$ は全単射.

(Q3) $\forall p, q \in M,\ s_p \circ s_q = s_{s_p(q)} \circ s_p$.

カンドル (M, s) に対して, s を **カンドル構造** と呼ぶ. カンドル (M, s) を単に M で表すこともある.

また, 対称空間とカンドルには次のような関係がある.

補題 2.5. 対称空間 (M, s) は, カンドルである.

これは, 対称空間とカンドルの定義から明らかである. この補題より, 自明な対称空間と例 2.3 の対称空間はカンドルであることがわかる. 自明な対称空間は **自明なカンドル** とも呼ばれる.

3 平坦なカンドルの直積の平坦性

この章ではまずカンドルの平坦性を定義する．その後で, カンドルの直積を紹介し, カンドルの直積が平坦性を保つことを示す.

3.1 平坦なカンドル

この節では, 平坦なカンドルの定義を述べ, いくつかの具体例について考える.

定義 3.1. (M, s) をカンドルとし, $G^0(M) := \langle s_p \circ s_q \mid p, q \in M \rangle$ とする．このとき, M が **平坦** であるとは, $G^0(M)$ が可換となることである.

この $G^0(M)$ を **変位の群** という.

例 3.2. 自明なカンドルは平坦である.

例 3.3. 例 2.3 のカンドルは平坦である.

証明. $G^0(\mathbb{R})$ が可換であることを示せばよい．後の補題 4.3 において, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を $\mathbb{R}$ に置き換えても成り立つ．よって, 系 4.4 と同様にして $G^0(M)$ を求めることができる．さらに, 補題 4.3 より, $G^0(M)$ が可換であることがわかる. □

3.2 平坦なカンドルの直積の平坦性

この節では, カンドルの直積を紹介し, カンドルの直積が平坦性を保つことを示す．この節を通して, $(M_1, s_1), (M_2, s_2)$ をともにカンドルとする.

命題 3.4. M_1 と M_2 の直積 $M_1 \times M_2$ に対して, 次の s は $M_1 \times M_2$ のカンドル構造になる:

$$s : M_1 \times M_2 \to \mathrm{Map}(M_1 \times M_2, M_1 \times M_2) : (p_1, p_2) \mapsto ((s_1)_{p_1}, (s_2)_{p_2}). \tag{3.1}$$

ここで, $((s_1)_{p_1}, (s_2)_{p_2})(x_1, x_2) := ((s_1)_{p_1}(x_1), (s_2)_{p_2}(x_2))$ とする.

証明. カンドルの条件 (Q1), (Q2) は s_1, s_2 がカンドル構造より明らか．(Q3) を示す．任意に $p, q, x \in M_1 \times M_2$ をとる．また, $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$, $x = (x_1, x_2)$ $(p_1, q_1, x_1 \in$

$M_1,\ p_2, q_2, x_2 \in M_2$) とする．ここで，

$$
\begin{aligned}
(s_p \circ s_q)(x) &= s_p \circ ((s_1)_{q_1}, (s_2)_{q_2})(x_1, x_2) \\
&= s_p((s_1)_{q_1}(x_1), (s_2)_{q_2}(x_2)) \\
&= ((s_1)_{p_1}, (s_2)_{p_2})((s_1)_{q_1}(x_1), (s_2)_{q_2}(x_2)) \\
&= ((s_1)_{p_1} \circ (s_1)_{q_1}(x_1), (s_2)_{p_2} \circ (s_2)_{q_2}(x_2)) \\
&= ((s_1)_{(s_1)_{p_1}(q_1)} \circ (s_1)_{p_1}(x_1), (s_2)_{(s_2)_{p_2}(q_2)} \circ (s_2)_{p_2}(x_2)) \\
&= ((s_1)_{(s_1)_{p_1}(q_1)} \circ (s_1)_{p_1}, (s_2)_{(s_2)_{p_2}(q_2)} \circ (s_2)_{p_2})(x_1, x_2) \\
&= s_{s_p(q)} \circ s_p(x).
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

よって，$s_p \circ s_q = s_{s_p(q)} \circ s_p$ となる． □

この $(M_1 \times M_2, s)$ を **カンドル M_1 と M_2 の直積** という．

命題 3.5. M_1, M_2 が平坦であるとする．このとき，$M_1 \times M_2$ も平坦である．また逆も成り立つ．

証明．M_1, M_2 が平坦であると仮定する．$M_1 \times M_2$ が平坦であることを示す．仮定より，$G^0(M_1)$ と $G^0(M_2)$ は可換である． したがって，$G^0(M_1) \times G^0(M_2)$ も可換である． また，明らかに $G^0(M_1) \times G^0(M_2) \supset G^0(M_1 \times M_2)$．よって，$G^0(M_1 \times M_2)$ は可換であるため $M_1 \times M_2$ は平坦である．

逆を示す．$M_1 \times M_2$ が平坦であると仮定する．M_1 が平坦であることを示す．任意に，$(s_1)_a \circ (s_1)_b, (s_1)_c \circ (s_1)_d \in G^0(M_1)$ $(a, b, c, d \in M_1)$ をとる． このとき，$(a, x), (b, x), (c, x), (d, x) \in M_1 \times M_2$ $(x \in M_2)$ である．仮定より，

$$
(s_{(a,x)} \circ s_{(b,x)}) \circ (s_{(c,x)} \circ s_{(d,x)}) = (s_{(c,x)} \circ s_{(d,x)}) \circ (s_{(a,x)} \circ s_{(b,x)}) \tag{3.3}
$$

が成り立つ．よって，

$$
(((s_1)_a \circ (s_1)_b) \circ ((s_1)_c \circ (s_1)_d), ((s_2)_x)^4) = (((s_1)_c \circ (s_1)_d) \circ ((s_1)_a \circ (s_1)_b), ((s_2)_x)^4). \tag{3.4}
$$

ゆえに，$((s_1)_a \circ (s_1)_b) \circ ((s_1)_c \circ (s_1)_d) = ((s_1)_c \circ (s_1)_d) \circ ((s_1)_a \circ (s_1)_b)$ より，$G^0(M_1)$ は可換であるため M_1 は平坦である．M_2 の場合も同様の方法で示すことができる． □

4　二面体カンドルの直積の平坦性

この章では, 二面体カンドルを紹介し, その平坦性について述べる. また, 命題 3.5 を使い, 二面体カンドルの直積の平坦性を示す.

4.1　二面体カンドル

この節では, 二面体カンドルを紹介する.

命題 4.1. $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 3)$ に対して, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は, 次の s によりカンドルとなる: 各 $p, x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して, $s_p(x) := 2p - x$.

例 2.3 と同様の方法で証明することができる. このカンドルを **二面体カンドル** と呼び, R_n で表わす. 証明から, 二面体カンドルは対称空間であることがわかる. そのため, 二面体カンドルを **二面体対称空間** とも呼ぶ. 幾何的には, 正 n 角形の頂点をひとつを 0 とし, そこから反時計回りに $1, \ldots, n-1$ とする. このとき, 正 n 角形の中心と p を結ぶ直線の折り返しによる x の像が $s_p(x)$ である.

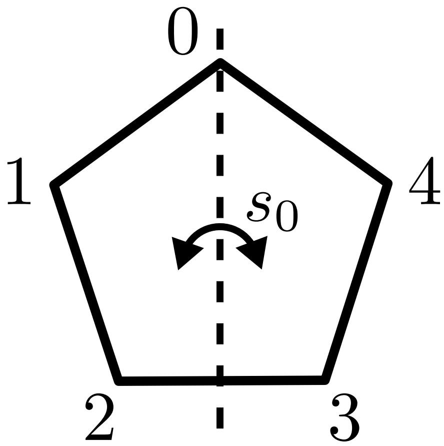

図 1　$n = 5$ の場合

4.2　二面体カンドルの直積の平坦性

この節では, 二面体カンドルの平坦性から, 本論文の主題である二面体カンドルの直積の平坦性を導く.

定理 4.2. 二面体カンドルの直積は平坦である.

まず $G^0(R_n)$ を具体的に求める. ここで, $p, x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して, $r_p(x) := 2p + x$ とする. 幾何

的には, 正 n 角形の $2p\frac{2\pi}{n}$ 回転による x の像が $r_p(x)$ である.

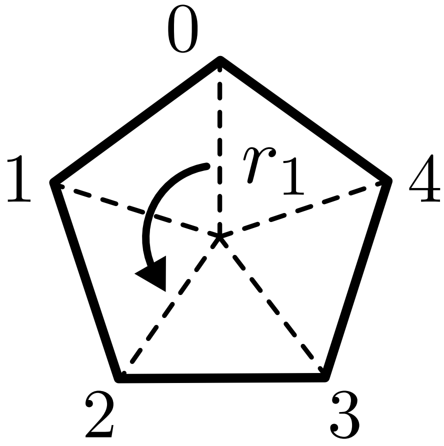

図 2　$n=5$ の場合

補題 4.3. s, r に対して, 次が成り立つ:

(0) $r_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$.

(1) $s_p \circ s_q = r_{(p-q)}$.

(2) $s_p \circ r_q = s_{(p-q)}$.

(3) $r_p \circ s_q = s_{(p+q)}$.

(4) $r_p \circ r_q = r_{(p+q)}$.

(5) $r_p \circ r_{-p} = r_{-p} \circ r_p = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$.

ここで, $p, q \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とする.

証明. (0) は r の定義より明らか. (1) を示す. 任意に $p, q, x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ をとる. ここで,

$$(s_p \circ s_q)(x) = s_p(2q - x) = 2p - (2q - x) = 2(p - q) + x = r_{(p-q)}(x). \tag{4.1}$$

よって, $s_p \circ s_q = r_{(p-q)}$ となる.

(2), (3), (4) も (1) と同様に計算すればよい. (5) は (0) と (4) より従う. □

ここから, 任意の $p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して $(r_p)^{-1} = r_{-p}$ となることがわかる. また, 補題 4.3 より, $G^0(R_n)$ が r を用いて具体的に表される.

系 4.4. 次が成り立つ: $G^0(R_n) = \{r_p \mid p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$.

命題 4.5. 二面体カンドルは平坦である.

証明. $G^0(R_n)$ が可換であることを示せばよい. 系 4.4 より, $G^0(R_n)$ は SO(2) の部分群とみなすことができる. SO(2) は可換なので, $G^0(R_n)$ も可換となる. □

定理 4.2 は, 命題 3.5 と命題 4.5 より導かれる.

5　付録 1

本論文では, 二面体カンドルの直積の平坦性について述べた. ここでは, 二面体カンドルの直積の連結性について述べる.

5.1　群作用

この節では, 群作用の定義を述べ, いくつかの具体例を紹介する. この節を通して, G を群とし, その単位元を e で表す. また M を集合とする.

定義 5.1. 写像 $\Phi : G \times M \to M$ に対して,

$$g.p := \Phi(g, p) \tag{5.1}$$

と表す. 写像 Φ が G の M への **群作用** であるとは, 以下が成り立つこと:

(A1) 任意の $g, h \in G$ および任意の $p \in M$ に対して $(gh).p = g.(h.p)$.
(A2) 任意の $p \in M$ に対して, $e.p = p$.

ここで定義した群作用は, 厳密には **左群作用** と呼ばれるものである. 群 G が集合 M に作用することを, 記号 $G \curvearrowright M$ で表すことが多い.

次の命題から, 群作用を与えることは, G から $\mathrm{Bij}(M)$ への群準同型を与えることと同値であることがわかる. ここで, $\mathrm{Bij}(M)$ は M から M への全単射全体の成す群を表す.

命題 5.2. 写像 $\Phi : G \times M \to M$ に対して, $\varphi_g(p) := \Phi(g, p)$ とおく. このとき, 以下は同値である:

(1) Φ は群作用である.
(2) $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(M) : g \mapsto \varphi_g$ は群準同型である.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. 示すことは以下の二つ:

(a) 任意の $g \in G$ に対して $\varphi_g \in \mathrm{Bij}(M)$.
(b) φ が群準同型である.

まず, 群作用の定義より, 以下が成り立つ:

$$\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h, \ \varphi_e = \mathrm{id}_M \quad (g, h \in G). \tag{5.2}$$

これより, 任意の $g \in G$ に対して $\varphi_{g^{-1}}$ は φ_g の逆写像である. よって, φ_g は全単射であるので, (a) が成り立つ. また, (b) も (5.2) からすぐに分かる.

次に (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. 示すことは以下の二つ:

(c) 任意の $g, h \in G$ および任意の $p \in M$ に対して $(gh).p = g.(h, p)$.
(d) 任意の $p \in M$ に対して, $e.p = p$.

(c) は φ が群準同型であることからすぐにわかる．また (d) も φ が群準同型であることから $\varphi_e = \mathrm{id}_M$ となるため, 成り立つ． □

次の命題により, 既知の群作用から新しい群作用を作ることができる．

命題 5.3. 写像 $\Phi : G \times M \to M$ により G が M に作用しているとする．このとき,

(1) 全ての部分群 $G' \subset G$ は, 制限写像 $\Phi\,|_{G' \times M}$ により M に作用する．
(2) 部分集合 $M' \subset M$ が G により保たれているとする (すなわち, 任意の $g \in G$ および任意の $p \in M'$ に対して, $g.p \in M'$ が成り立つ)．このとき, 制限写像 $\Phi\,|_{G \times M'} : G \times M' \to M'$ により G は M' に作用する．

証明. 写像 $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(M) : g \mapsto \varphi_g$ とし, $\varphi_g : M \to M : p \mapsto g.p$ と定義する．命題 5.2 より, φ は群準同型となる．ここで, (1) は, 制限写像 $\varphi\,|_{G'} : G' \to \mathrm{Bij}(M)$ が群準同型であることから従う．次に (2) は, M' が G により保たれているため, $\varphi_g\,|_{M'} \in \mathrm{Bij}(M')$ となり, これが群準同型であることから示される． □

上の命題を用いて, 群作用の例をいくつか紹介する．

例 5.4. $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ 内の任意の部分群は, $\mathbb{R}^2$ に $g.v := gv$ により作用する．

証明. 命題 5.3 より, $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ が $\mathbb{R}^2$ に 作用することを示せばいい．作用の条件 (A1) は, 行列の積の結合法則から従う．条件 (A2) は自明. □

例 5.5. $\mathrm{O}(2)$ 内の任意の部分群は, 球面 S^1 に $g.v := gv$ により作用する．

証明. 命題 5.3 より, $\mathrm{O}(2)$ が S^1 に作用することを示せばいい．$\mathrm{O}(2)$ は $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ 内の部分群なので, 例 5.4 より, $\mathbb{R}^2$ に $g.v := gv$ により作用する．さらに補題 1.3 より, $\mathrm{O}(2)$ は, 自然な内積 $\langle , \rangle$ を保つことから, 球面 S^1 を保つ．したがって, 命題 5.3 より, $\mathrm{O}(2)$ は S^1 に作用する． □

5.2 推移的な群作用

この節では, 推移的な群作用の定義を述べ, いくつかの具体例を紹介する．

定義 5.6. 群 G の集合 M への群作用が **推移的** とは, 次が成り立つこと: 任意の $p, q \in M$ に対して, $g.p = q$ となる $g \in G$ が存在する．

この定義から, 次の補題がただちにわかる．

補題 5.7. G を群, G' をその部分群とする．また, G が集合 M に作用しているとする．このとき, G' の M への群作用が推移的ならば, G の M への群作用も推移的である．

次に, 推移的な群作用と同値な命題を紹介する．

補題 5.8. M を集合とし, $o \in M$ を固定する. このとき, 群 G の M への群作用が推移的であることと, 次が成り立つことが同値: 任意の $p \in M$ に対して, $g.o = p$ となる $g \in G$ が存在する.

証明. 群 G の集合 M への作用が推移的ならば, 上記の条件をみたすことは明らか. 逆を示すために, 上記の条件が成り立つと仮定する. 群 G の M への作用が推移的であることを示す. 任意に $p, q \in M$ をとる. 仮定より, 次をみたす $g_1, g_2 \in G$ が存在する:

$$g_1.o = p,\ g_2.o = q. \tag{5.3}$$

このとき, 群作用の定義より,

$$g_1^{-1}.p = g_1^{-1}.(g_1.o) = (g_1^{-1}g_1).o = e.o = o. \tag{5.4}$$

したがって, $g = g_2 g_1^{-1} \in G$ とおけば, $g.p = q$ となる. □

例 5.9. O(2) および SO(2) は, 球面 S^1 に推移的に作用する.

証明. 補題 5.7 より, SO(2) が S^1 に推移的に作用することを示せば十分. $\mathbb{R}^2$ の標準的な基底を $\{e_1, e_2\}$ で表す. このとき, $e_1 \in S^1$. したがって, 補題 5.8 より, 次を示せばよい: 任意の $x \in S^1$ に対して, $g.e_1 = x$ となる $g \in \mathrm{SO}(2)$ が存在する. 任意の $x := {}^t(\cos\theta, \sin\theta) \in S^1$ をとる. このとき, $x' = {}^t(-\sin\theta, \cos\theta) \in S^1$ とすれば,

$$g := (x, x') \in \mathrm{SO}(2). \tag{5.5}$$

このとき, $g.e_1 = x$ が成り立つ. よって, SO(2) の作用は推移的である. □

5.3 連結なカンドル

この節では, 連結なカンドルを定義を述べ, いくつかの具体例について考える.

定義 5.10. (M, s) をカンドルとし, $G(M) := \langle s_p \mid p \in M \rangle$ とする. このとき, M が **連結** であるとは, 以下が成り立つこと: $G(M)$ が M に推移的に作用する.

この $G(M)$ を **内部自己同型群** という.

例 5.11. 自明なカンドルは M が一点集合の場合, 連結である. 一点集合でない場合は, 連結でない.

証明. M が一点集合の場合, 連結であるための条件を確かめることは容易である. 一点集合でない場合は, 任意の $p, q \in M (p \neq q)$ に対して,

$$s_x(p) = \mathrm{id}_M(p) = p \neq q \quad (x \in M). \tag{5.6}$$

したがって, M は連結でない. □

例 5.12. 例 2.3 のカンドルは連結である.

証明. 任意の $p, q \in \mathbb{R}$ をとる. $x := \frac{p+q}{2} \in \mathbb{R}$ とすると,

$$s_x(p) = 2x - p = (p+q) - p = q. \tag{5.7}$$

したがって, $\mathbb{R}$ は連結である. □

注意 5.13. $G(M_1) \times G(M_2) = G(M_1 \times M_2)$ とは限らない.

実際に, 二面体カンドル R_l, R_m に対して, $((s_{R_l})_p, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}) \in G(R_l) \times G(R_m)$ かつ $((s_{R_l})p, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}) \notin G(R_l \times R_m)$ $(p \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$.

5.4 連結なカンドルの直積の連結性

この節では, カンドルの直積が連結性を保つことを紹介する. $(M_1, s_1), (M_2, s_2)$ をともにカンドルとする.

命題 5.14. M_1, M_2 が連結であるとする. このとき, $M_1 \times M_2$ も連結である. また逆も成り立つ.

証明. M_1, M_2 が連結とする. 任意に $x := (x_1, x_2), y := (y_1, y_2) \in M_1 \times M_2$ をとる. ここで, M_1 が連結より, ある $p_1, \ldots, p_m \in M_1$ が存在して,

$$(s_{p_1})^{i_1} \circ \cdots \circ (s_{p_m})^{i_m}(x_1) = y_1 \quad (i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}). \tag{5.8}$$

同様に, M_2 が連結より, ある $q_1, \ldots, q_n \in M_2$ が存在して,

$$(s_{q_1})^{j_1} \circ \cdots \circ (s_{q_n})^{j_n}(x_2) = y_2 \quad (j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}). \tag{5.9}$$

ゆえに, $(s_1)_{x_1}^{-1}(x_1) = x_1, (s_2)_{y_2}^{-1}(y_2) = y_2$ に注意して, $(p_1, y_2), \ldots, (p_m, y_2), (x_1, q_1), \ldots, (x_1, q_n) \in M_1 \times M_2$ をとると,

$$\begin{aligned}
&(s_{(p_1,y_2)})^{i_1} \circ \cdots \circ (s_{(p_m,y_2)})^{i_m} \circ (s_{(x_1,q_1)})^{j_1} \circ \cdots \circ (s_{(x_1,q_n)})^{j_n}(x_1, x_2) \\
&= (s_{(p_1,y_2)})^{i_1} \circ \cdots \circ (s_{(p_m,y_2)})^{i_m} \circ (((s_1)_{x_1})^{j_1} \circ \cdots \circ ((s_1)_{x_1})^{j_n}, ((s_2)_{q_1})^{j_1} \circ \cdots \circ ((s_2)_{q_n})^{j_n})(x_1, x_2) \\
&= (s_{(p_1,y_2)})^{i_1} \circ \cdots \circ (s_{(p_m,y_2)})^{i_m}(x_1, y_2) \\
&= (((s_1)_{p_1})^{i_1} \circ \cdots \circ ((s_1)_{p_m})^{i_m}, ((s_2)_{y_2})^{i_1} \circ \cdots \circ ((s_2)_{y_2})^{i_m})(x_1, y_2) \\
&= (y_1, y_2).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

よって, $M_1 \times M_2$ も連結である.

逆に, $M_1 \times M_2$ が連結とする. M_1 が連結を示す. 任意に $x_1, y_1 \in M_1$ をとる. ここで, ある $x_2 \in M_2$ に対して, $(x_1, x_2), (y_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ となる. また, $M_1 \times M_2$ が連結より, ある

$(p_1, x_2), \ldots, (p_m, x_2) \in M_1 \times M_2$ が存在して,

$$\begin{aligned}
&(s_{(p_1,x_2)})^{i_1} \circ \cdots \circ (s_{(p_m,x_2)})^{i_m}(x_1, x_2) \\
&= (((s_1)_{p_1})^{i_1} \circ \cdots \circ ((s_1)_{p_m})^{i_m}, ((s_2)_{x_2})^{i_1} \circ \cdots \circ ((s_2)_{x_2})^{i_m})(x_1, x_2) \\
&= (y_1, x_2) \quad (j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

よって, $((s_1)_{p_1})^{i_1} \circ \cdots \circ ((s_1)_{p_m})^{i_m}(x_1) = y_1$ が成り立つため, M_1 は連結である. M_2 の場合も同様の方法で示すことができる. □

5.5 二面体カンドルの直積の連結性

命題 5.15. R_n が連結であることの必要十分条件は, n が奇数のときである.

この命題を示すために, $G(R_n)$ を具体的に求める.

補題 5.16. 次が成り立つ: $G(R_n) = \{s_p, r_p \mid p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$.

証明. 補題 4.3 より, $G(R_n) = \{s_p, r_p \mid p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ となる. □

$G(R_n)$ は, 直交群 $\mathrm{O}(2)$ の部分群とみなすことができる. よって例 5.5 より, $G(R_n)$ は S^1 に作用する. また, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は S^1 の部分集合とみなすことができ, これは $G(R_n)$ により保たれている. したがって, 命題 5.3 より, $G(R_n)$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に作用することがわかる. 以下, 命題 5.15 を示す.

証明. $G(R_n)$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に作用する. この群作用が推移的である条件を確認する. まず, n が奇数のときを確認する. 任意に $x, y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ をとる. このとき, ある $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が存在して, $x - y = i$ が成り立つ. ここで, i が奇数と偶数の場合に分けて考える. i が奇数のとき: ある $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が存在して, $n - i = 2j$ が成り立つ. このとき,

$$r_j(x) = 2j - x = n - i + x = y. \tag{5.12}$$

i が偶数のとき: ある $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が存在して, $i = 2j$ が成り立つ. このとき,

$$r_{-j}(x) = -2j + x = -i + x = y. \tag{5.13}$$

したがって, $G(R_n)$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に推移的に作用する.

次に, n が偶数のときを確認する. 群作用が推移的であることの反例として, $0, 1 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ をとる. ここで, s と r の場合に分けて考える. s の場合: ある $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が存在して, $s_i(0) = 1$ となることを仮定する. ここで,

$$s_i(0) = 2i - 0 = 2i = 1. \tag{5.14}$$

しかし, このような i は存在しない. r の場合も同様の方法で示すことができる. よって, G は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に推移的に作用しない. □

この命題と命題 5.14 により, 次の定理が導かれる.

定理 5.17. 連結な二面体カンドルの直積は連結である. また, 連結でないものを含む二面体カンドルの直積は連結でない.

6 付録 2

これまでの結果から, 二面体カンドルの変位の群と内部自己同型群は $G^0(R_n) = \{r_p \mid p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ と $G(R_n) = \{s_p, r_p \mid p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ であった. ここでは, これらの構造について述べる.

6.1 二面体カンドルの変位の群と内部自己同型群の構造

命題 6.1. $G^0(R_n)$ は $G(R_n)$ の正規部分群である.

証明. 任意に $p, q \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ をとる. 補題 4.3 より, 次が成り立つ:

(1) $s_p \circ r_q \circ s_p = r_{-q}$.

(2) $r_{-p} \circ r_q \circ r_p = r_q$.

よって, $s_p G^0(R_n) s_p = r_{-p} G^0(R_n) r_p = \{r_p \mid p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\} = G(R_n)$ となる. □

ここからは, n が奇数と偶数の場合にわけて考える.

命題 6.2. $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, k \neq 1)$ のとき, $G^0(R_n) \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

証明. $G^0(R_n)$ が k 次巡回群であることを示す. 任意の $p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して,

$$r_{k+p}(x) = 2(k+p) + x = n + 2p + x = 2p + x = r_p(x). \tag{6.1}$$

よって,

$$r_{(1)}^l \neq \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \quad (0 < l < k), \tag{6.2}$$

$$r_{(1)}^k = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}. \tag{6.3}$$

ゆえに, $G^0(R_n) = \langle r_1 \rangle \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. □

命題 6.3. $n = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ のとき, $G^0(R_n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

証明. $G^0(R_n)$ が n 次巡回群であることを示す. 任意の $p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して,

$$r_{(k+1)}(p) = 2(k+1) + p = n + 1 + p = 1 + p. \tag{6.4}$$

よって,

$$r_{(k+1)}^l \neq \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \quad (0 < l < n), \tag{6.5}$$

$$r_{(k+1)}^n = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}. \tag{6.6}$$

ゆえに, $G^0(R_n) = \langle r_{(k+1)} \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. □

$$t := \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}, u := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

とする．二面体群 D_n は次のように定義される: $D_n := \langle t, u \rangle$.

命題 6.4. $n = 2k+1$ $(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ のとき, $G(R_n)$ は二面体群 D_n と同型である.

証明. 写像 $f : G(R_n) \to D_n : s_p \mapsto t^{2p}u, r_p \mapsto t^{2p}$ が群同型写像であることを示せばよい．まず, f が群準同型であることを示す:

$$\begin{aligned}
f(s_p)f(s_q) &= (t^p u)(t^q u) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2p\frac{2\pi}{n}) & -\sin(2p\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(2p\frac{2\pi}{n}) & \cos(2p\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2q\frac{2\pi}{n}) & -\sin(2q\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(2q\frac{2\pi}{n}) & \cos(2q\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2(p-q)\frac{2\pi}{n}) & -\sin(2(p-q)\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(2(p-q)\frac{2\pi}{n}) & \cos(2(p-q)\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} \\
&= t^{p-q} = f(r_{p-q}) = f(s_p \circ s_q).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

よって, f は群準同型．また, f が全単射であることは, 写像 $g : D_n \to G_{R_n} : t \mapsto r_{k+1}, u \mapsto s_0$ が f の逆写像となることからわかる． □

商群 $G(R_n)/G^0(R_n)$ を決定する．

命題 6.5. $n \in \mathbb{Z}$ に対し, 商群 $G(R_n)/G^0(R_n)$ は次のようになる:

$$G(R_n)/G^0(R_n) = \{G^0(R_n), s_0 G^0(R_n)\}. \tag{6.9}$$

また, $G(R_n)/G^0(R_n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

証明. まず, $G(R_n)/G^0(R_n) = \{G^0(R_n), s_0 G^0(R_n)\}$ を示す．示すことは以下の二つ:

(i) 任意の $p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して $s_0 G^0(R_n) = s_p G^0(R_n)$.

(ii) 任意の $p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して $G^0(R_n) = r_p G^0(R_n)$.

(i) は, 任意の $p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して補題 4.3 より,

$$s_0 G^0(R_n) = \{s_p \mid p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\} = G(R_n) = s_p G^0(R_n). \tag{6.10}$$

よって, $s_0 G^0_{R_n} = s_p G^0_{R_n}$ となる．(ii) も同様に, 任意の $p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して補題 4.3 より,

$$G^0(R_n) = \{r_p \mid p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\} = G(R_n) = r_p G^0(R_n). \tag{6.11}$$

よって, $G^0(R_n) = r_p G^0(R_n)$ となる．

次に, $G(R_n)/G^0(R_n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を示す．ここで,

$$(s_0 G^0(R_n))^2 = (s_0)^2 G^0(R_n) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} G^0(R_n) = G^0(R_n). \tag{6.12}$$

よって, $G(R_n)/G^0(R_n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

参考文献

[1] 鎌田聖一, 曲面結び目理論. 丸善出版, 2012.

[2] Ottmar Loos, Symmetric spaces. I: General theory. W. A. Benjamin, 1969.

[3] 田丸博士, 離散的対称空間論とカンドル. 大阪市立大学集中講義資料, 2013.

[4] 田丸博士, 集合としての対称空間. preprint.