1　幾何学 A (2013/04/11): 概要説明

概要説明

幾何学 A および同演習では, 多様体について学ぶ. 多様体とは, (なめらかな) 曲線や曲面の一般化であり, 位相空間に対して「微分が定義できるような条件を課したもの」である. この講義では, 曲線や曲面の話題から出発して, 以下の流れに沿って, 多様体論の基礎的な部分を解説する:

[1] 曲線

[2] 曲面

[3] 多様体

演習との連動

この講義は, 演習と同時に履修することを強く推奨しています. 特に, 以下のような形で講義と演習は連動しています:

- 毎回ではありませんが, 講義で問題を出題した上で, 演習の時間に小テストを実施することがあります.
- 定期試験は, 講義と演習で共通で行います. どちらか一方しか履修していない学生も, 原則として試験は受けて頂きます.

成績に関して

また, 成績に関する注意事項を以下にまとめておく. 田丸の講義を履修したことがあれば, これまでの科目とほとんど同様だと思って良い.

- 成績は, 主に定期試験の点数によって付けるが, レポートの点数も考慮する. 試験日時やレポート課題については, 適当な時期になったら講義中に指示する.
- 演習で一回も発表していない学生は, 演習の単位は認めない. また, 講義と演習の合否は連動するものとする.

情報

この講義に関する情報については, 下記の webpage を参照して下さい. 講義中に配布するプリントや試験などの情報が, 適宜記載される予定です.

`http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~tamaru/kougi/13kika-a.html`

2 幾何学 A (2013/04/11): 平面曲線 (1)

曲線の助変数表示

以下, I は $\mathbb{R}$ の開集合を表すものとする.

定義 2.1. 写像 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が <u>なめらかな曲線</u> とは, 次が成り立つこと:

(i) c は C^∞-級,

(ii) $\forall t \in I$, $c'(t) \neq (0,0)$.

ベクトル $c'(t)$ を <u>速度ベクトル</u> と呼ぶ. 像 $c(I)$ のことをなめらかな曲線と呼び, 写像 c あるいは $c(t)$ をその <u>助変数表示</u> と呼ぶこともある.

例 2.2. 次の (1), (2) はなめらかな曲線であり, (3) はなめらかな曲線ではない:

(1) (半径 $r > 0$ の円) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$.

(2) (C^∞-級関数 f のグラフ) $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, f(t))$.

(3) ($y = |x|$ のグラフ) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, |t|)$.

曲線の曲率: 定義

定義 2.3. なめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2$ に対して, 次の $\kappa(t)$ を <u>曲率</u> と呼ぶ:

$$\kappa(t) := \det(c'(t), c''(t))/|c'(t)|^3.$$

曲線を $c(t) = (x(t), y(t))$ とおくと, 曲率の定義式の分母分子は, それぞれ以下で表される:

$$\det(c'(t), c''(t)) = \det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t),$$
$$|c'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

例 2.4. 半径 $r > 0$ の円の曲率に対して, 以下が成り立つ:

(1) $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$ とすると, $\kappa(t) = 1/r$.

(2) 定数 $a \neq 0$ を用いて $c(t) = (r\cos(at), r\sin(at))$ とすると, $a > 0$ なら $\kappa(t) = 1/r$, $a < 0$ なら $\kappa(t) = -1/r$.

(3) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ のグラフだと思って $c(t) = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$ とすると, $\kappa(t) = -1/r$.

問題 2.5 (第 1 回小テスト問題)**.** 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ の曲率を計算し, 曲率の絶対値が最大になる点と最小になる点を求めよ. ただし $a > b > 0$ とする.

3 幾何学 A (2013/04/18): 平面曲線 (2)

復習: 合成写像の微分

定義 3.1. C^∞-級写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ に対し, $\mathbb{R}^m$ の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ で表し, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ とおく. このとき次を f の $p \in \mathbb{R}^m$ における **ヤコビ行列** と呼ぶ:

$$(Jf)_p := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

命題 3.2 (合成写像の微分)**.** C^∞-級写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, および $p \in \mathbb{R}^m$ に対して, 次が成り立つ: $(J(g \circ f))_p = (Jg)_{f(p)}(Jf)_p$.

曲率の性質: パラメータ変換での不変性

曲線の曲率は, 助変数表示の取り方に依存しない. 以下では I, I' を $\mathbb{R}$ の開集合とする.

定義 3.3. $t : I' \to I$ が **正のパラメータ変換** であるとは, 次が成り立つこと: (i) 全単射, (ii) C^∞-級, (iii) $\forall s \in I'$, $t'(s) > 0$.

命題 3.4. $c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とし, $t : I' \to I$ を正のパラメータ変換とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $c \circ t : I' \to \mathbb{R}^2$ はなめらかな曲線.
(2) 曲線の曲率は正のパラメータ変換で不変. すなわち, $\forall s \in I'$, $\kappa_c(t(s)) = \kappa_{c \circ t}(s)$.

曲率の意味: 加速度

曲率は「一定の速度で走ったときの加速度」とみなせる. $c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする.

定義 3.5. $c : I \to \mathbb{R}^2$ が **弧長パラメータ表示** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall t \in I$, $|c'(t)| = 1$.

命題 3.6. $c : I \to \mathbb{R}^2$ は弧長パラメータ表示できる. すなわち, $\exists t = t(s)$ (パラメータ変換) : $c \circ t$ は弧長パラメータ表示.

すなわち, どんな道路でも速さ 1 で走ることができる. そのときの加速度が曲率である.

定義 3.7. 弧長パラメータ表示 $c(t) = (x(t), y(t))$ に対して, ベクトル $n(t) := (-y'(t), x'(t))$ を (左向きの) **単位法ベクトル** と呼ぶ.

命題 3.8. $c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とすると, 次が成り立つ: $\forall t \in I$, $c''(t) = \kappa_c(t)n(t)$.

4　幾何学 A (2013/04/25): 平面曲線 (3)

曲率の意味: 単位法ベクトルの微分

曲率は, 単位法ベクトル $n(t) = (-y'(t), x'(t))$ の微分と考えることができる.

定義 4.1. 弧長パラメータ表示 $c(t)$ に対して, $e(t) := c'(t)$ とおく. このとき, $\{e(t), n(t)\}$ を **フルネ標構** と呼ぶ.

命題 4.2. 弧長パラメータ表示 $c(t)$ とその曲率 κ に対して, 次が成り立つ: $n'(t) = -\kappa(t)e(t)$.

命題 4.3 (フルネの公式)**.** フルネ標構に対して, 次が成り立つ:

$$\begin{pmatrix} e & n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} e & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) \\ \kappa(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

復習: 逆写像定理

定理 4.4 (逆写像定理)**.** C^∞-級写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ および $p \in \mathbb{R}^m$ を考える. もし $\det(Jf)_p \neq 0$ ならば, f は p の周りで C^∞-級の逆写像を持つ.

曲線の陽関数表示

定義 4.5. C^∞-級写像 $f : I \to \mathbb{R}$ に対して,

(1) $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\}$ を **$y = f(x)$ のグラフ**,
(2) $\{(f(y), y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in I\}$ を **$x = f(y)$ のグラフ** と呼ぶ.

命題 4.6. なめらかな曲線とグラフは以下の意味で対応する:

(1) グラフは, なめらかな曲線である,
(2) なめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2$ は, 局所的にはグラフで表される
(すなわち, $\forall t \in I$, $\exists I' \subset I$ (t の開近傍) : $c(I')$ はグラフで表される).

なめらかな曲線は, 局所的にグラフで表すことにより, 概形を描くことが (原理的には) できる. 実際, この考え方により, 以下の曲線の概形を描くことができる.

例 4.7. 次は C^∞-級写像だが, なめらかな曲線ではない: $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3, t^2)$. 実際, この曲線は $c(0) = (0, 0)$ において尖っている.

例 4.8. 次はなめらかな曲線: $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. この曲線は $c(\pm 1) = (0, 0)$ において自己交叉する.

5　幾何学 A (2013/05/02): 平面曲線 (4)

曲線の陰関数表示: 定義と例

定義 5.1. U を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $F : U \to \mathbb{R}$ を関数とする. このとき, $F(x,y) = 0$ が (なめらかな曲線の) <u>陰関数表示</u> であるとは, 次が成り立つこと:

(i) $\exists (x,y) \in U : F(x,y) = 0$.

(ii) F は C^∞-級,

(iii) $\forall (x,y) \in U \ (F(x,y) = 0), \ \ (JF)_{(x,y)} \neq (0,0)$.

例 5.2. 以下の F に対して, $F(x,y) = 0$ はなめらかな曲線の陰関数表示:

(1) $F(x,y) = ax + by + c$ (ただし $(a,b) \neq (0,0)$).

(2) $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

例 5.3. 以下の F に対して, $F(x,y) = 0$ はなめらかな曲線の陰関数表示でない:

(1) $F(x,y) = c$ (定数).

(2) $F(x,y) = x^2 - y^3$.

(3) $F(x,y) = xy$.

(4) $F(x,y) = y^2 - x^3 - x^2$.

曲線の陰関数表示: 性質

命題 5.4. グラフとなめらかな曲線の陰関数表示は, 以下の意味で対応する:

(1) グラフは, 陰関数表示することができる.

(2) $F(x,y) = 0$ をなめらかな曲線の陰関数表示とすると, 局所的にはグラフで表される (すなわち, $\forall (a,b) \in U \ (F(a,b) = 0)$, $\exists U' \subset U$ ((a,b) の開近傍) : $\{(x,y) \in U' \mid F(x,y) = 0\}$ はグラフで表される).

陰関数表示 $F(x,y) = 0$ から陽関数 f が得られることは, 次の陰関数定理から従う.

定理 5.5 (陰関数定理)**.** $F : U \to \mathbb{R}$ を C^∞-級関数とし, $F(a,b) = 0$ とする. もし $F_y(a,b) \neq 0$ ならば, $F(x,y) = 0$ は (a,b) の周りで $y = f(x)$ のグラフで表される.

6 幾何学 A (2013/05/02): 曲面 (1)

曲面の助変数表示

以下, D は $\mathbb{R}^2$ の開集合を表すものとする.

定義 6.1. 写像 $p : D \to \mathbb{R}^3$ が (なめらかな曲面の) **助変数表示** とは, 次が成り立つこと:

(i) p は C^∞-級.

(ii) $\forall (u, v) \in D$, $\mathrm{rank}(Jp)_{(u,v)} = 2$.

ここで rank は行列の階数を表す. 一般に, $(2, 3)$-行列 $A = (x, y)$ に対して, $\mathrm{rank}(A) = 2$ となる必要十分条件は, $\{x, y\}$ が一次独立となることである.

例 6.2. 次は曲面の助変数表示 (xy 平面): $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, 0)$.

命題 6.3. なめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ を考える. このとき, 次は曲面の助変数表示: $p : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (x(u), y(u), v)$.

例 6.4. 以下は曲面の助変数表示でない:

(1) (一点) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (0, 0, 0)$,

(2) (曲線) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (x(u), y(u), z(u))$.

(3) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u^3, u^2, v)$.

7　幾何学 A (2013/05/09): 曲面 (2)

曲面の助変数表示 (続き)

命題 7.1. なめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto c(t) = (x(t), z(t))$ が, 次をみたすと仮定する: $\forall t \in I$, $x(t) > 0$. このとき, 次は曲面の助変数表示である (これを曲線 c の **回転面** と呼ぶ):

$$p : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

例 7.2. 以下は曲面の助変数表示である:

(1) (円柱) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$,

(2) (球面) $p : \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$,

(3) (トーラス) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u(2 + \cos v), \sin u(2 + \cos v), \sin v)$.

上記の球面の助変数表示に対して, その定義域を $\mathbb{R}^2$ に拡げたものは助変数表示にはならない.

曲面の陽関数表示

定義 7.3. C^∞-写像 $f : D \to \mathbb{R}$ に対して, $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\}$ を $z = f(x, y)$ の **グラフ** と呼ぶ ($x = f(y, z)$ や $y = f(x, z)$ のグラフも同様に定義する).

例 7.4. $z = (x^2/a^2) + (y^2/b^2)$ のグラフを **楕円放物面** と呼ぶ.

命題 7.5. なめらかな曲面の助変数表示とグラフは, 以下の意味で対応する:

(1) グラフは, なめらかな曲面の助変数表示を持つ,

(2) なめらかな曲面の助変数表示 $p : D \to \mathbb{R}^3$ は, 局所的にはグラフで表される
(すなわち, $\forall (u, v) \in D$, $\exists D' \subset D$ ((u, v) の開近傍) : $p(D')$ はグラフで表される).

小テスト事前レポート

突然だが次回 (2013/05/16) 講義時に小テストを行う. 試験範囲は, 今日やったところまで.

問題 7.6 (事前レポート問題, 2013/05/14(火) 提出締切)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する小テスト問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け. ただし, レポートの一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと. 表紙は不要.

(1) 曲線の曲率. (2) 助変数表示. (3) 陽関数表示. (4) 陰関数表示.

8 幾何学 A (2013/05/16): 曲面 (3)

曲面の陰関数表示

定義 8.1. U を $\mathbb{R}^3$ の開集合, $F: U \to \mathbb{R}$ を関数とする. このとき, $F(x, y, z) = 0$ が, なめらかな曲面の <u>**陰関数表示**</u> とは, 次が成り立つこと:

(i) $\exists (x, y, z) \in U : F(x, y, z) = 0$,

(ii) F は C^∞-級,

(iii) $\forall (x, y, z) \in U \ (F(x, y, z) = 0)$, $(JF)_{(x,y,z)} \neq (0, 0, 0)$.

例 8.2. 以下は, なめらかな曲面の陰関数表示:

(1) (平面) $ax + by + cz + d = 0$ (ただし $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$),

(2) (円柱) $x^2 + y^2 - 1 = 0$,

(3) (球面) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

例 8.3. 次はなめらかな曲面の陰関数表示でない: $F(x, y, z) = y^2 - x^3 - x^2 = 0$.

命題 8.4. グラフとなめらかな曲面の陰関数表示は, 以下の意味で対応する:

(1) グラフは, 陰関数表示することができる,

(2) $F(x, y, z) = 0$ をなめらかな曲面の陰関数表示とすると, 局所的にはグラフで表される (すなわち, $\forall (a, b, c) \in U \ (F(a, b, c) = 0)$, $\exists U' \subset U$ ((a, b, c) の開近傍) : $\{(x, y, z) \in U' \mid F(x, y, z) = 0\}$ はグラフで表される).

9 幾何学 A (2013/05/16): 小テスト問題

注意

- 証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.
- また, 写像を書くときには, 定義域と値域を明記すること.

定義や用語など

- $c : I \to \mathbb{R}^2$ がなめらかな曲線
  $:\Leftrightarrow$ (i) c は C^∞-級, (ii) $\forall t \in I$, $c'(t) \neq (0,0)$.
- なめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2$ の曲率とは, $\kappa := \det(c', c'')/|c'|^3$.
- $p : D \to \mathbb{R}^3$ がなめらかな曲面の助変数表示
  $:\Leftrightarrow$ (i) p は C^∞-級, (ii) $\forall (u,v) \in D$, $\mathrm{rank}(Jp)_{(u,v)} = 2$.
- $F(x,y) = 0$ がなめらかな曲線の陰関数表示
  $:\Leftrightarrow$ (i) $\exists (x,y) : F(x,y) = 0$, (ii) F は C^∞, (iii) $\forall (x,y)$ $(F(x,y)=0)$, $(JF)_{(x,y)} \neq (0,0)$.

問題

[1] なめらかな曲線の曲率は, 平行移動で不変であることを示せ. (20 点)

[2] $\mathbb{R}^2$ 内において $y = x^2$ のグラフを考える. 以下に答えよ.
(1) このグラフがなめらかな曲線であることを, 定義に従って示せ. (20 点)
(2) このグラフの曲率を求めよ. また, 曲率の絶対値の最大と最小を調べよ. (20 点)

[3] 写像 $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ を考える. 以下を定義に従って示せ.
(1) p は曲面の助変数表示でない. (20 点)
(2) p を然るべき開集合に制限すると曲面の助変数表示になる. (20 点)

[4] I を $\mathbb{R}$ の空でない開集合, $f : I \to \mathbb{R}$ を C^∞-級関数とする. このとき, 次の集合 M がなめらかな曲線の陰関数表示を持つことを示せ. (20 点)

$$M := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\}.$$

[5] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.

10 幾何学 A (2013/05/23): 可微分多様体 (1)

座標近傍

定義 10.1. M を位相空間, U を M の開集合, $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ を写像とする．このとき, (U, φ) が M の m 次元 **座標近傍** とは, 次が成り立つこと:

(i) $\varphi(U)$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合,

(ii) $\varphi : U \to \varphi(U)$ は同相写像.

例 10.2. $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ に対し, 次で定義される (U, φ) は 1 次元座標近傍:

$$U := \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}, \quad \varphi : U \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x.$$

命題 10.3. グラフは座標近傍になる．すなわち, D を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $f : D \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-級写像とするとき, 次で定義される (M, φ) は m 次元座標近傍:

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid x \in D, \, y = f(x)\}, \quad \varphi : M \to \mathbb{R}^m : (x, y) \mapsto x.$$

位相多様体

定義 10.4. M を位相空間とする．このとき, M が m 次元 **位相多様体** とは, 次が成り立つこと:

(i) M はハウスドルフ空間,

(ii) $\forall p \in M, \exists (U, \varphi)$: m 次元座標近傍 s.t. $p \in U$.

例 10.5. 次が成り立つ:

(1) 円周 S^1 は 1 次元位相多様体.

(2) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ は位相多様体ではない.

(3) D を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $f : D \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-級写像とする．このとき f のグラフは m 次元位相多様体.

命題 10.6. M をハウスドルフ空間とする．このとき, M が m 次元位相多様体ための必要十分条件は, 次が成り立つこと:

(ii)' $\exists \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ s.t. $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆, かつ, 各 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ は m 次元座標近傍.

条件 (ii)' を満たす $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を **局所座標系** と呼ぶ.

11　幾何学 A (2013/05/30): 可微分多様体 (2)

位相多様体 (続き)

例 11.1. 次が成り立つ:

(1) U を $\mathbb{R}^m$ 内の開集合とする．このとき U は m 次元位相多様体.

(2) D を $\mathbb{R}^m$ 内の開集合, $f : D \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-級写像とする．このとき f のグラフは m 次元位相多様体.

座標変換

定義 11.2. M を位相多様体とし, (U,φ), (V,ψ) を座標近傍とする．$U \cap V \neq \emptyset$ のとき, 次の写像を (U,φ) から (V,ψ) への <u>**座標変換**</u> という:

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap V)} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V).$$

$(U,\varphi) = (V,\psi)$ のときには, 座標変換は恒等写像である．これを自明な座標変換と呼ぶ.

例 11.3. 以前に定義した S^1 の座標近傍を考える．このとき, (U_x^+, φ_x^+) から (U_y^+, φ_y^+) への座標変換は次で与えられる:

$$\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1} : (0,1) \to (0,1) : y \mapsto \sqrt{1-y^2}.$$

可微分多様体

定義 11.4. M が <u>m **次元可微分多様体**</u> であるとは, 次が成り立つこと:

(i) M は m 次元位相多様体.

(ii) 全ての座標変換は C^∞-級.

例 11.5. 次が成り立つ:

(1) U を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合とする．このとき U は m 次元可微分多様体.

(2) D を $\mathbb{R}^m$ 内の開集合, $f : D \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-級写像とする．このとき f のグラフは m 次元可微分多様体.

(3) S^1 は 1 次元可微分多様体.

12　幾何学 A (2013/06/06): 可微分多様体 (3)

可微分多様体 (続き)

$S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ を n **次元球面** と呼ぶ. S^n には, $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的な位相からの相対位相が入っているものとする.

命題 12.1. S^2 は 2 次元可微分多様体である. 特に, 以下が成り立つ:

(1) S^2 はハウスドルフ空間.

(2) 次で定義される $\{(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm}) \mid i = 1, 2, 3\}$ は, S^2 の 2 次元局所座標系:

$$U_i^+ := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i > 0\}, \quad U_i^- := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i < 0\},$$
$$\varphi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto [x_i \text{ を抜いたもの}].$$

(3) 上で定義された局所座標系に対して, 全ての座標変換は C^∞-級.

射影空間

定義 12.2. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \{\ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \ell \text{ は 1 次元線型部分空間 }\}$ を n **次元実射影空間** と呼ぶ.

命題 12.3. $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の上の同値関係を次で定める: $x \sim y :\Leftrightarrow \exists c \neq 0 : x = cy$. このとき, 商集合 $X/\sim$ と $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の間に全単射が存在する.

以下では $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = X/\sim$ と同一視する. X には $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的な位相から決まる相対位相を入れ, $X/\sim$ には自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ を通して商位相を入れる.

補題 12.4. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は上の位相に関してハウスドルフである.

各点 $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in X$ に対して, 次のように表す (これを **同次座標** と呼ぶ):

$$\pi(x) = [x] = [x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n.$$

補題 12.5. 次で与えられる $\{(U_i, \varphi_i)\}$ によって $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は n 次元位相多様体になる:

$$U_i := \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid x_i \neq 0\},$$
$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n : [x_1 : \cdots : x_{n+1}] \mapsto (1/x_i)(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1}).$$

ここで $\widehat{x_i}$ は「x_i を抜く」ことを意味する記号である. 例えば, 簡単のために $n = 2$ とすると, 次が成り立つ: $\varphi_2([x_1 : x_2 : x_3]) = (1/x_2)(x_1, x_3)$.

命題 12.6. 実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は n 次元可微分多様体である.

13 幾何学 A (2013/06/13): 可微分多様体 (4)

立体射影

可微分多様体であることを示す際に, 座標近傍の数が多いと, 全ての座標変換が C^∞-級であることを確かめるのが大変である. その困難を回避する一つの方法は「できるだけ少ない個数の座標近傍で覆うこと」である.

命題 13.1. n 次元球面 S^n は, 次の $\{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$ によって n 次元可微分多様体になる:

$$\begin{aligned}
&p_\pm := (0, \ldots, 0, \pm 1), \quad U_\pm := S^n \setminus \{p_\pm\}, \\
&\varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1 \mp x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 \mp x_{n+1}}).
\end{aligned}$$

これらの座標近傍 $(U_\pm, \varphi_\pm)$ を $p_\pm$ からの **立体射影** と呼ぶ. これにより, 球面 S^n は 2 つの座標近傍で覆うことができる.

14 幾何学 A (2013/06/20): 多様体の定義 (5)

可微分多様体と陰関数表示

可微分多様体であることを示す際に最も便利な方法は, 以下で述べるような「陰関数表示を用いる方法」だと思われる. ただしこれは $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合として定義されるものにしか適用できない (例えば射影空間に適用するのは困難である).

命題 14.1. U を $\mathbb{R}^2$ 内の空でない開集合, $F : U \to \mathbb{R}$ とする. もし $F(x, y) = 0$ がなめらかな曲線の陰関数表示ならば, 次は 1 次元可微分多様体である: $M := \{(x, y) \in U \mid F(x, y) = 0\}$.

陰関数表示されたなめらかな曲線は, 局所的にはグラフで表すことができる. また, グラフは座標近傍になる. この方法により, 局所座標系が定義される.

全く同様の方法により, 陰関数表示されたなめらかな曲面にも, グラフを用いることにより, 局所座標系が定義される. より高次元の場合に関しても同様に, 次が成り立つ.

定理 14.2. U を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合, $F : U \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-級写像とし, $M := \{p \in U \mid F(p) = 0\}$ とおく. もし $\mathrm{rank}(JF)_p = k$ $(\forall p \in M)$ であるならば, M は $m - k$ 次元可微分多様体になる.

例 14.3. 以下が成り立つ:

(1) $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ は n 次元可微分多様体である.

(2) 陰関数表示されたなめらかな曲面は, 2 次元可微分多様体である.

(3) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \{g \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ は 3 次元可微分多様体である.

15　幾何学 A (2013/06/27): 多様体上の可微分写像 (1)

以下では特に断らない限り L, M, N を可微分多様体とする.

C^∞-級関数

定義 15.1. $f : M \to \mathbb{R}$ を連続関数とし, $p \in M$ とする. このとき f が p **で** C^∞**-級** とは, 次が成り立つこと: $\exists(U, \varphi)$: p を含む座標近傍 s.t. $f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞-級.

命題 15.2. $f : M \to \mathbb{R}$ を連続関数とし, $p \in M$ とする. このとき f が p で C^∞-級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall(U, \varphi)$: p を含む座標近傍, $f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞-級.

定義 15.3. 連続関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が C^∞**-級** とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M$, f は p で C^∞-級.

単位円 S^1 に対して, グラフによって局所座標系を定めた多様体を $(S^1)_{\mathrm{gr}}$, 立体射影によって局所座標系を定めた多様体を $(S^1)_{\mathrm{pr}}$ と便宜的に表す.

例 15.4. 円周 S^1 上の関数 $f : S^1 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$ を考える.

(1) 定義域を $(S^1)_{\mathrm{gr}}$ と考えたとき, f は C^∞-級関数.
(2) 定義域を $(S^1)_{\mathrm{pr}}$ と考えたとき, f は C^∞-級関数.

C^∞-級写像

定義 15.5. $f : M \to N$ を連続関数とし, $p \in M$ とする. このとき f が p **で** C^∞**-級** とは, 次が成り立つこと: $\exists(U, \varphi)$: p を含む M の座標近傍, $\exists(V, \psi)$: $f(p)$ を含む N の座標近傍 s.t. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞-級.

命題 15.6. $f : M \to N$ を連続関数とし, $p \in M$ とする. このとき f が p で C^∞-級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall(U, \varphi)$: p を含む座標近傍, $\forall(V, \psi)$: $f(p)$ を含む N の座標近傍 s.t. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞-級.

定義 15.7. $f : M \to N$ が連続写像であるとする. このとき, f が C^∞**-級** とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M$, f は p で C^∞-級.

例 15.8. 恒等写像 $\mathrm{id} : (S^1)_{\mathrm{gr}} \to (S^1)_{\mathrm{pr}}$ および $\mathrm{id} : (S^1)_{\mathrm{pr}} \to (S^1)_{\mathrm{gr}}$ は共に C^∞-級.

命題 15.9. C^∞-級写像と C^∞-級写像の合成は, C^∞-級写像である.

16　幾何学 A (2013/07/04): 可微分写像 (2)・接空間 (1)

C^∞-同相

定義 16.1. 写像 $f : M \to N$ が <u>**C^∞-同相写像**</u> であるとは, 次が成り立つこと:

(i) f は同相写像,

(ii) f と f^{-1} は C^∞-級写像.

また, M と N の間に C^∞-同相写像が存在するときに, M と N は <u>**C^∞-同相**</u> であるという.

例 16.2. 次が成り立つ:

(1) $(S^1)_{\mathrm{gr}}$ と $(S^1)_{\mathrm{pr}}$ は C^∞-同相.

(2) 円と楕円は C^∞-同相.

曲線の接線

なめらかな曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ に対して, $c'(0)$ を速度ベクトルと呼んでいた.

定義 16.3. M をなめらかな平面曲線とし, $p \in M$ とする. このとき,

(1) $v \in \mathbb{R}^2$ が M の p での <u>**接ベクトル**</u> とは, 次が成り立つこと:
$\exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2 : C^\infty$-級 s.t. $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$.

(2) $T_pM := \{p + v \in \mathbb{R}^2 \mid v$ は p での接ベクトル $\}$ を M の p での <u>**接線**</u> と呼ぶ.

例 16.4. 円周 S^1 に対して次が成り立つ: $\forall a \in \mathbb{R}$, $(0, a)$ は $p = (1, 0)$ における接ベクトル.

17　幾何学 A (2013/07/04): 接空間 (2)

接ベクトルと接空間

以下, M を可微分多様体とする. また, $C^\infty(M) := \{\xi : M \to \mathbb{R} : C^\infty\text{-級}\}$ と定める.

定義 17.1. C^∞-級写像 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ に対し, 次の $c'(0)$ を c の 0 における <u>速度ベクトル</u> と呼ぶ:

$$c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \tfrac{d}{dt}(\xi \circ c)(0).$$

定義 17.2. 写像 $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が $p \in M$ における <u>接ベクトル</u> とは, 次が成り立つこと:
$\exists c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$: C^∞-級 s.t. $c(0) = p$, $c'(0) = v$.

例 17.3. $M = \mathbb{R}^n$ とし, その座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ と表す. また, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n : t \mapsto te_i$ とおく. このとき次が成り立つ: $c'(0) = (\frac{\partial}{\partial x_i})_0$. ただしここで,

$$(\tfrac{\partial}{\partial x_i})_0 : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \tfrac{\partial \xi}{\partial x_i}(0).$$

定義 17.4. 可微分多様体 M の $p \in M$ での <u>接空間</u> (<u>**tangent space**</u>) T_pM を次で定義する:

$$\begin{aligned} T_pM &:= \{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid v \text{ は } p \text{ での接ベクトル}\} \\ &= \{c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty,\ c(0) = p\}. \end{aligned}$$

接空間と座標近傍

ここでは, (U, φ) を M の座標近傍とする. また $p \in U$ とし, $\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ で表す.

定義 17.5. 上記の記号の下で, $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ を次で定義する:

$$(\tfrac{\partial}{\partial x_i})_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\xi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

補題 17.6. $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to M$ は C^∞-級写像.

命題 17.7. 次が成り立つ:

$$\mathrm{span}\{(\tfrac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\tfrac{\partial}{\partial x_n})_p\} \subset T_pM.$$

18　幾何学 A (2013/07/11): 接空間 (3)

接空間と方向微分の空間

$C^\infty(M)$ には自然に和・スカラー倍・積が定義されることに注意する.

定義 18.1. 点 $p \in M$ を考える.

(1) 次を **積の微分の公式** と呼ぶ: $\forall f, g \in C^\infty(M),\ \ v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.

(2) 次を **方向微分の空間** と呼ぶ: $D_pM := \{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid$ 線型, 積の微分の公式を満たす $\}$.

命題 18.2. $T_pM \subset D_pM$.

接空間まとめ

定理 18.3. (U, φ) を M の座標近傍, $p \in U$ とし, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ と表す. 次が成り立つ:

$$\mathrm{span}\{(\tfrac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\tfrac{\partial}{\partial x_n})_p\} = T_pM = D_pM.$$

系 18.4. 可微分多様体 M が n 次元のとき, T_pM は n 次元ベクトル空間になる.

期末試験事前レポート

問題 18.5 (事前レポート問題, 2013/07/18(木) 提出締切)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する期末問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け. ただし, レポートの一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと. 表紙は不要.

(1) 曲線と曲面. (2) 多様体. (3) 多様体上の C^∞-級写像. (4) 多様体の接空間.

19　幾何学 A (2013/07/25): 期末試験問題

注意

- 証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.
- また, 写像を書くときには, 定義域と値域を明記すること.

定義や用語など

- $F(x, y, z) = 0$ が曲面の陰関数表示
  $:\Leftrightarrow$ (i) $\exists p : F(p) = 0$, (ii) F は C^∞ 級, (iii) $\forall p\ (F(p) = 0)$, $(JF)_p \neq (0, 0, 0)$.
- (U, φ) が座標近傍 $:\Leftrightarrow$ (i) $\mathbb{R}^m \supset \varphi(U)$: 開, (ii) $\varphi : U \to \varphi(U)$: 同相.
- (U, φ) から (V, ψ) への座標変換は, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$.
- $f : M \to \mathbb{R}$ が $p \in M$ で C^∞ とは, $\exists (U, \varphi)$: p を含む座標近傍 : $f \circ \varphi^{-1}$ が $\varphi(p)$ で C^∞.
- C^∞-級曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ に対して, $c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \frac{d}{dt}(f \circ c)(0)$.
- $T_pM := \{c'(0) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty,\ c(0) = p\}$.

問題

[1] D を $\mathbb{R}^2$ 内の空でない開集合, $f : D \to \mathbb{R}$ を C^∞-級関数とし,

$$M := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\}$$

と定義する. 以下に答えよ.

(1) M が曲面の陰関数表示を持つことを示せ. (20 点)

(2) M は 2 次元可微分多様体となる. その局所座標系を与えよ. (20 点, 証明不要)

(3) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto z$ を M に制限した写像が C^∞ 級であることを示せ. (20 点)

[2] $X := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ の上の同値関係を次で定める: $x \sim y :\Leftrightarrow \exists c \neq 0 : x = cy$. また, 商集合を $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 := X/\sim$ とおく. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ の局所座標系 $\{(U_i, \varphi_i) \mid i = 0, 1, 2\}$ を, 同次座標を用いて定義される標準的なものとする. 例えば, (U_0, φ_0) は次で与えられている:

$$U_0 := \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid x_0 \neq 0\},$$
$$\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{R}^2 : [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto (1/x_0)(x_1, x_2).$$

(1) φ_0 が well-defined であることを示せ. (20 点)

(2) (U_0, φ_0) から (U_1, φ_1) への座標変換を求めよ (定義域と値域も明記すること). (20 点)

[3] M を C^∞ 級多様体, $v \in T_pM$ とする. また $\xi, \eta : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする. このとき, 次を示せ: $v(\xi\eta) = v(\xi)\eta(p) + \xi(p)v(\eta)$. (20 点)

[4] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.