平成２５年度　卒業論文

クランから得られる可解リー代数と代数的リッチソリトン

広島大学理学部数学科

B106010 木村健太郎

指導教員 田丸博士 教授

2014 年 2 月 10 日

目次

1 はじめに

単位元を持つクランから内積付き分裂可解リー代数を得ることができる．本論文では２つのクランの例を紹介し, それらから得られる内積付き分裂可解リー代数を決定した．また, クランから得られた内積付き分裂可解リー代数の内積が代数的リッチソリトンであるかを考察し, 取り扱った例の１つが代数的リッチソリトンになることを示した.

2 クランから得られるリー代数

この章では, クランと分裂可解リー代数の定義を紹介し, クランの具体例を２つ与える．またそれらから得られる内積付き分裂可解リー代数を決定する.

2.1 クラン

ベクトル空間 V に対し, V^* を V の双対ベクトル空間とする.

定義 2.1. V を有限次元実ベクトル空間, $(V, \triangle)$ を algebra とする (結合法則は仮定しない). $(V, \triangle)$ が <u>**クラン**</u> であるとは, 左乗法作用素 $L(x)y := x \triangle y$ に対して, 次の (1) $\sim$ (3) が満たされるときをいう.

(1) $(V, \triangle)$ は左対称代数である : $[L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x)$,

(2) $\exists s \in V^* : s(x \triangle y)$ は V の内積 (認容線型形式),

(3) 各 $x \in V$ に対して, $L(x)$ の固有値は実数のみである.

$M(3, \mathbb{R})$ を３次正方行列全体のなすベクトル空間, $x \in M(3, \mathbb{R})$ に対し, ${}^t x$ を x の転置とおく. $\mathrm{Sym}(3, \mathbb{R}) := \{x \in M(3, \mathbb{R}) \mid x = {}^t x\}$ とする．また, $x = (x_{ij}) \in \mathrm{Sym}(3, \mathbb{R})$ に対して, $\underline{x}$ を次のように定義する:

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & 0 & 0 \\ x_{12} & \frac{1}{2}x_{22} & 0 \\ x_{13} & x_{23} & \frac{1}{2}x_{33} \end{pmatrix}.$$

例 2.2. $V := \mathrm{Sym}(3, \mathbb{R})$ とする．また $\triangle : V \times V \longrightarrow V$ を次のように定義する:

$$x \triangle y := \underline{x} y + y {}^t \underline{x}.$$

このとき, $(V, \triangle)$ はクランとなる.

証明. まず, (1) $(V, \triangle)$ が左対称代数であることを示す.

$\forall x, y, z \in V$ をとる.

$$
\begin{aligned}
[L(x), L(y)]z &= (L(x) \circ L(y) - L(y) \circ L(x))z \\
&= L(x) \circ L(y)z - L(y) \circ L(x)z \\
&= L(x)(\underline{y}z + z^t(\underline{y})) - L(y)(\underline{x}z + z^t(\underline{x})) \\
&= \underline{x}(\underline{y}z + z^t(\underline{y})) + (\underline{y}z + z^t(\underline{y}))^t(\underline{x}) - \underline{y}(\underline{x}z + z^t(\underline{x})) - (\underline{x}z + z^t(\underline{x}))^t(\underline{y}) \\
&= \underline{x}\underline{y}z + z^t(\underline{y})^t(\underline{x}) - \underline{y}\underline{x}z - z^t(\underline{x})^t(\underline{y}) \\
&= (\underline{x}\underline{y} - \underline{y}\underline{x})z + {}^t((\underline{x}\underline{y} - \underline{y}\underline{x})z).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(x \triangle y - y \triangle x)z &= L(x \triangle y)z - L(y \triangle x)z \\
&= \underline{(\underline{x}y + y^t(\underline{x}))}z + z^t(\underline{\underline{x}y + y^t(\underline{x})}) - \underline{(\underline{y}x + x^t(\underline{y}))}z - z^t(\underline{\underline{y}x + x^t(\underline{y})}) \\
&= \{\underline{(\underline{x}y + y^t(\underline{x}))} - \underline{(\underline{y}x + x^t(\underline{y}))}\}z + {}^t(\{\underline{(\underline{x}y + y^t(\underline{x}))} - \underline{(\underline{y}x + x^t(\underline{y}))}\}z).
\end{aligned}
$$

実際の計算で, $\underline{x}\underline{y} - \underline{y}\underline{x} = \underline{(\underline{x}y + y^t(\underline{x})} - \underline{(\underline{y}x + x^t(\underline{y}))}$ となることがわかる. 従って $[L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x)$.

次に, (2)$\exists s \in V^* : s(x \triangle y)$ は V の内積となることを示す. $s(x) := \mathrm{tr}(x) \quad (x \in V)$ とすると, $s \in V^*$ となる.

$$
\begin{aligned}
s(x \triangle y) &= s(\underline{x}y + y^t(\underline{x})) \\
&= \mathrm{tr}(\underline{x}y + y^t(\underline{x})) \\
&= \mathrm{tr}((\underline{x} + {}^t(\underline{x})y) \ (\because \mathrm{tr} \text{ の性質}) \\
&= \mathrm{tr}(xy) \ (\because (\underline{x} + {}^t(\underline{x})) = x).
\end{aligned}
$$

これは V の内積.

最後に (3) 各 $a \in V$ に対して, $L(a)$ の固有値は実数のみであることを示す. $\forall a = (x_{ij})_{i.j} \in V$ をとる. (i, j) 成分のみ1で, ほかの成分が0という行列を E_{ij} とする.

$$f_{ii} := E_{ii},\ f_{ij} := E_{ij} + E_{ji}\ (1 \le i < j \le 3)$$

とおくと, $\{f_{ij} \mid 1 \le i \le j \le 3\}$ は V の基底をなしている. $L(a)$ の $\{f_{ij} \mid 1 \le i \le j \le 3\}$ に関する表現行列 A を計算すると, 以下のようになる:

$$
A = \begin{pmatrix}
x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{12} & \frac{1}{2}(x_{11} + x_{22}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{13} & x_{23} & \frac{1}{2}(x_{11} + x_{33}) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2x_{12} & 0 & x_{22} & 0 & 0 \\
0 & x_{13} & x_{12} & x_{23} & \frac{1}{2}(x_{22} + x_{33}) & 0 \\
0 & 0 & 2x_{13} & 0 & 2x_{23} & x_{33}
\end{pmatrix}.
$$

A の固有値 λ を求める.

$$
|\lambda I_6 - A| = \begin{vmatrix}
\lambda - x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{12} & \lambda - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{22}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{13} & x_{23} & \lambda - \frac{1}{2}(x_{11} + x_{33}) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2x_{12} & 0 & \lambda - x_{22} & 0 & 0 \\
0 & x_{13} & x_{12} & x_{23} & \lambda - \frac{1}{2}(x_{22} + x_{33}) & 0 \\
0 & 0 & 2x_{13} & 0 & 2x_{23} & \lambda - x_{33}
\end{vmatrix}.
$$

この行列式を計算すると,

$$|\lambda I_6 - A| = (\lambda - x_{11})(\lambda - \frac{1}{2}(x_{11}+x_{22}))(\lambda - \frac{1}{2}(x_{11}+x_{33}))(\lambda - x_{22})(\lambda - \frac{1}{2}(x_{22}+x_{33}))(\lambda - x_{33}).$$

よって, A の固有値 λ は A の対角成分となり, 実数のみ. □

命題 2.3. 例 2.2 のクラン $(V, \triangle)$ のクラン構造 $\triangle$ において, I_3 は単位元である. ただし, I_3 は 3×3 の単位行列.

証明. $\forall x \in V$ をとる.

$$\begin{aligned} x \triangle I_3 &= \underline{x} I_3 + {I_3}^t(\underline{x}) = \underline{x} + {}^t(\underline{x}) = x, \\ I_3 \triangle x &= \underline{I_3} x + x^t(\underline{I_3}) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = x. \end{aligned}$$

□

例 2.4. $V := \{x \in \mathrm{Sym}(3, \mathbb{R}) \mid x_{23} = 0\}$ とする. また $\triangle : V \times V \longrightarrow V$ を次のように定義する:

$$x \triangle y := \underline{x} y + y^t \underline{x}.$$

このとき, $(V, \triangle)$ はクランとなる.

証明. 例 2.2 と同様に示せる. □

命題 2.5. 例 2.3 のクラン $(V, \triangle)$ のクラン構造 $\triangle$ において, I_3 は単位元である. ただし, I_3 は 3×3 の単位行列.

証明. 命題 2.3 と同様に確かめられる. □

2.2 クランから得られる分裂可解リー代数

ここでは, 分裂可解リー代数の定義と, クランと分裂可解リー代数に関する定理を紹介する. また前のクランの例から得られるそれぞれの分裂可解リー代数を求める.

定義 2.6. リー代数 $\mathfrak{g}$ の任意の部分ベクトル空間 A, B に対して,

$$[A, B] = \{\sum_{i=1}^{n} [X_i, Y_i] \mid n \in \mathbb{N}, X_i \in A, Y_i \in B (1 \leq i \leq n)\}$$

とおく. 部分空間 $[A, B]$ を A と B の **交換子** という.

定義 2.7. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ を $\mathfrak{g}$ の **導イデアル** といい, $\mathfrak{g}^{(1)}$ または $D\mathfrak{g}$ と記す.
また, 任意の自然数 n に対して, **第 n 導イデアル** $\mathfrak{g}^{(n)}$ を, $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}]$ によって, 帰納的に定義する.

定義 2.8. ある自然数 n に対して, $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ となるとき, $\mathfrak{g}$ を **可解** という.

定義 2.9. リー代数 $\mathfrak{g}$ の各元 X に対し, 線型写像 $\mathrm{ad}X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ を次のように定義する:

$$(\mathrm{ad}X)Y = [X, Y] \ (Y \in \mathfrak{g}).$$

定義 2.10. 可解リー代数 $\mathfrak{g}$ が **分裂可解リー代数** であるとは, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して, $(\mathrm{ad}X)$ の固有値が実数のみであること.

定理 2.11. $(V, \triangle)$ を単位元を持つクラン , 左乗法作用素を $L(x)y := x \triangle y$ とする. このとき, 次が成り立つ: $\mathfrak{h} := \{L(x) \mid x \in V\}$ は分裂可解リー代数となる.

以下, 例 2.2, 例 2.4 で与えたクランに対して定理 2.11 の主張が正しいことを示す. なお, 一般の場合の証明については [2] を参照.

命題 2.12. 例 2.2 のクラン $(V, \triangle)$ に関して, $L(x)y := x \triangle y$ とするとき, 次が成り立つ: $\mathfrak{h} := \{L(x) \mid x \in V\}$ は分裂可解リー代数となる.

まず, 以下の補題を用意する.

補題 2.13. 一般のクラン $(V, \triangle)$ に関して, $L(x)y := x \triangle y$ とするとき, $\mathfrak{h} := \{L(x) \mid x \in V\}$ はリー代数となる.

証明. $\mathfrak{gl} = \{f : V \longrightarrow V : \text{線型写像}\}$ は $[f, f'] := f \circ f' - f' \circ f \ (f, f' \in \mathfrak{gl}(V))$ に関してリー代数である. $\forall L(x), L(y) \in \mathfrak{h}$ をとる.

$$\begin{aligned}[L(x), L(y)] =& L(x \triangle y - y \triangle x) \ (\because \text{クランの定義より}) \\ \in& \mathfrak{h} \ (\because x \triangle y - y \triangle x \in V).\end{aligned}$$

よって, $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー代数となる. □

補題 2.14. $\mathfrak{g}$ を次のように定義する:

$$\mathfrak{g} := \left\{ X = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \mid X \in M(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

$\mathfrak{h} = \{L(x) \mid x \in V\}$ と $\mathfrak{g}$ は同型.

証明. 線型写像 $\varphi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ を次のように定義する:

$$\varphi(L(x)) := \underline{x} \ (x \in V).$$

φ が同型写像となることを示す.

まず, φ が準同型写像となることを示す. $\forall x, y, z \in V$ をとる.

$$\begin{aligned}\varphi([L(x), L(y)]) &= \varphi(L(x \triangle y - y \triangle x))(\because \text{クランの定義より}) \\ &= \varphi(\underline{x}y + y^t(\underline{x}) - \underline{y}x + x^t(\underline{y})) \\ &= \varphi(\underline{x}y + y^t(\underline{x})) - \varphi(\underline{y}x + x^t(\underline{y}))(\because \varphi : \text{線型}) \\ &= \underline{(\underline{x}y + y^t(\underline{x}))} - \underline{(\underline{y}x + x^t(\underline{y}))}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\varphi(L(x)), \varphi(L(y))] &= [\underline{x}, \underline{y}] \\ &= \underline{x}\underline{y} - \underline{y}\underline{x}.\end{aligned}$$

前に述べたように, $\underline{(\underline{x}y + y^t(\underline{x}))} - \underline{(\underline{y}x + x^t(\underline{y}))} = \underline{x}\underline{y} - \underline{y}\underline{x}$ なので $\varphi([L(x), L(y)]) = [\varphi(L(x)), \varphi(L(y))]$.

次に, φ : 全単射を示す. $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ を次のように定義する:

$$\phi(x) := x + {}^t(x) \ (x \in \mathfrak{g}).$$

$\forall x \in \mathfrak{g}$ をとる.

$$\begin{aligned}\varphi \circ \phi(x) &= \varphi(x + {}^t(x)) \\ &= \underline{x} + {}^t(\underline{x}) \\ &= x.\end{aligned}$$

次に, $\forall y \in \mathfrak{h}$ をとる.

$$\begin{aligned}\phi \circ \varphi(y) &= \phi(\underline{y}) \\ &= (\underline{y} + {}^t(\underline{y})) \\ &= y.\end{aligned}$$

よって, ϕ は φ の逆写像となり, φ は全単射. □

これらの補題を用いて, 命題 2.12 を示す.

命題 2.12 の証明. 補題 2.13 より $\mathfrak{h}$ はリー代数である. 次に $\mathfrak{h}$ が可解になることを示す. ここで, 補題 2.14 より $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{g}$ が同型なので $\mathfrak{g}$ が可解であることを確かめる. 実際に交換子を計算してみると, $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の元の対角成分は 0 となる. このことから, 交換子の計算を繰り返すと $\mathfrak{g}^{(3)} = 0$ となる. よって $\mathfrak{g}$ は可解である. 最後に, $\mathfrak{h}$ が分裂可解であることを示す. さきほどと同様に $\mathfrak{g}$ が分裂可解であることを確かめる. 次の行列の組は $\mathfrak{g}$ の基底を成している.

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, E_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで, $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}(1 \leq i \leq 6), X = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i E_i$ とする. $\mathrm{ad}(X)$ の $\{E_i \mid (1 \leq i \leq 6\}$ に関する表現行列 A を計算する.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}(X)E_1 &= [X, E_1] = 2\alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5 - \alpha_6 E_6, \\
\mathrm{ad}(X)E_2 &= [X, E_2] = 3\alpha_5 E_5 + 3\alpha_6 E_6, \\
\mathrm{ad}(X)E_3 &= [X, E_3] = 0, \\
\mathrm{ad}(X)E_4 &= [X, E_4] = -2\alpha_1 E_4 + \alpha_6 E_5, \\
\mathrm{ad}(X)E_5 &= [X, E_5] = (-\alpha_1 - 3\alpha_2)E_5, \\
\mathrm{ad}(X)E_6 &= [X, E_6] = -\alpha_4 E_5 + (\alpha_1 - 3\alpha_2)E_6.
\end{aligned}
$$

従って,

$$
A = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\alpha_4 & 0 & 0 & -2\alpha_1 & 0 & 0 \\
\alpha_5 & 3\alpha_5 & 0 & \alpha_6 & (-\alpha_1 - 3\alpha_2) & -\alpha_4 \\
-\alpha_6 & 3\alpha_6 & 0 & 0 & 0 & (\alpha_1 - 3\alpha_2)
\end{pmatrix}.
$$

A の固有値 λ を求める.

$$
|\lambda I_6 - A| = \begin{vmatrix}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
2\alpha_4 & 0 & 0 & \lambda + 2\alpha_1 & 0 & 0 \\
\alpha_5 & 3\alpha_5 & 0 & \alpha_6 & \lambda + (\alpha_1 + 3\alpha_2) & -\alpha_4 \\
-\alpha_6 & 3\alpha_6 & 0 & 0 & 0 & \lambda - (\alpha_1 - 3\alpha_2)
\end{vmatrix}.
$$

この行列式を計算すると,

$$
|\lambda I_6 - A| = \lambda^3(\lambda + 2\alpha_1)(\lambda + (\alpha_1 + 3\alpha_2))(\lambda - (\alpha_1 - 3\alpha_2)).
$$

よって, A の固有値 λ は A の対角成分となり, 実数のみ. $\square$

命題 2.15. 例 2.3. のクラン $(V, \triangle)$ に関して, $L(x)y := x \triangle y$ とするとき, 次が成り立つ: $\mathfrak{h} := \{L(x) \mid x \in V\}$ は分裂可解リー代数となる.

命題 2.12 と同様に必要な補題を示し, 命題 2.15 を示す.

補題 2.16. $\mathfrak{g}$ を次のように定義する:

$$
\mathfrak{g} := \left\{ X = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \mid X \in M(3, \mathbb{R}) \right\}.
$$

$\mathfrak{h} = \{L(x) \mid x \in V\}$ と $\mathfrak{g}$ は同型.

証明. 補題 2.14 と同様に示せる. $\square$

命題 2.15 を証明する.

命題 2.15 の証明. $\mathfrak{h}$ が可解であることは, 命題 2.12 と同様に示せる. 次に, $\mathfrak{h}$ が分裂可解であることを示す. さきほどと同様に $\mathfrak{g}$ が分裂可解であることを確かめる. 次の行列の組は $\mathfrak{g}$ の基底を成している.

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, E_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで, $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}(1 \leq i \leq 5), X = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i E_i$ とする. $\mathrm{ad}(X)$ の $\{E_i \mid (1 \leq i \leq 5\}$ に関する表現行列 A を計算する.

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(X)E_1 &= [X, E_1] = 2\alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5, \\ \mathrm{ad}(X)E_2 &= [X, E_2] = 3\alpha_5 E_5, \\ \mathrm{ad}(X)E_3 &= [X, E_3] = 0, \\ \mathrm{ad}(X)E_4 &= [X, E_4] = -2\alpha_1 E_4, \\ \mathrm{ad}(X)E_5 &= [X, E_5] = (-\alpha_1 - 3\alpha_2)E_5. \end{aligned}$$

従って,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha_4 & 0 & 0 & -2\alpha_1 & 0 \\ \alpha_5 & 3\alpha_5 & 0 & 0 & (-\alpha_1 - 3\alpha_2) \end{pmatrix}.$$

A の固有値 λ を求める.

$$|\lambda I_5 - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 2\alpha_4 & 0 & 0 & \lambda + 2\alpha_1 & 0 \\ \alpha_5 & 3\alpha_5 & 0 & 0 & \lambda + (\alpha_1 + 3\alpha_2) \end{vmatrix}.$$

この行列式を計算すると,

$$|\lambda I_5 - A| = \lambda^3(\lambda + 2\alpha_1)(\lambda + (\alpha_1 + 3\alpha_2)).$$

よって, A の固有値 λ は A の対角成分となり, 実数のみ. $\square$

2.3　クランから得られる内積

ここでは補題 2.14, 補題 2.16 で得られたリー代数に対して, 対応するクランから内積を定義する方法を述べる.

例 2.2, 例 2.3 の $(V,\triangle)$ において $\psi : V \longrightarrow \mathfrak{g}; x \mapsto \underline{x}$ とすると, ψ は線型同型となる. ここで, ψ の逆写像 ψ^{-1} は $\psi^{-1}(x) = x + {}^t x$ $(x \in \mathfrak{g})$ となっている. また, クランの定義より $s : V \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto tr(x)$ に対して, $\langle\cdot,\cdot\rangle_V : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}; (x,y) \mapsto s(x \triangle y)$ は V の内積となっていた. この V の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ を用いて, 補題 2.14 ,2.17 のそれぞれのリー代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ に, クランから得られる内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ を定義する.

まず, 例 2.2 の $(V,\triangle)$ から得られた分裂可解リー代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ に対して, 内積を定義する. 例 2.2 より V の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ は $\langle x,y\rangle_V = s(x \triangle y) = \mathrm{tr}(xy)$ であった.

命題 2.17. $(V,\triangle)$ を例 2.2 のクラン, $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ を $(V,\triangle)$ から得られる分裂可解リー代数とする. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義するとき, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ の内積である.

$$\langle x,y\rangle_{\mathfrak{g}} := \langle \psi^{-1}(x), \psi^{-1}(y)\rangle_V.$$

証明. 証明は簡単なため省略する. □

命題 2.18.

$$\mathfrak{a} := \left\{ X = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \mid M(3,\mathbb{R}) \right\}, \mathfrak{n} := \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \mid M(3,\mathbb{R}) \right\},$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle_0 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}; \langle X,Y\rangle_0 := \mathrm{tr}({}^t XY)$ とする. 命題 2.18 の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ は次のようになる:

$$\langle A_1 + X_1, A_2 + X_2\rangle_{\mathfrak{g}} := 4\langle A_1, A_2\rangle_0 + 2\langle X_1, X_2\rangle_0.$$

ここで, $A_1, A_2 \in \mathfrak{a}, X_1, X_2 \in \mathfrak{n}$ とする.

証明. $\forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$ とする. $Y_1 = A_1 + X_1, Y_2 = A_2 + X_2$ $(A_1, A_2 \in \mathfrak{a}, X_1, X_2 \in \mathfrak{n})$ と表せる.

$$\begin{aligned}
\langle Y_1, Y_2\rangle_{\mathfrak{g}} =& \langle \psi^{-1}(Y_1), \psi^{-1}(Y_2)\rangle_V \\
=& s(\psi^{-1}(Y_1) \triangle \psi^{-1}(Y_2)) \\
=& \mathrm{tr}((Y_1 + {}^t(Y_1))(Y_2 + {}^t(Y_2))) \quad (\because s, \psi^{-1} \text{の定義より}) \\
=& \mathrm{tr}(Y_1Y_2 + Y_1{}^t(Y_2) + {}^t(Y_1)Y_2 + {}^t(Y_1){}^t(Y_2)) \\
=& 2\mathrm{tr}(Y_1Y_2) + 2\mathrm{tr}({}^t(Y_1)Y_2) \quad (\because \mathrm{tr}\ \text{の性質より}) \\
=& 2\mathrm{tr}((A_1 + X_1)(A_2 + X_2)) + 2\mathrm{tr}({}^t(A_1 + X_1)(A_2 + X_2)) \\
=& 4\mathrm{tr}(A_1A_2) + 2\mathrm{tr}({}^t(X_1)X_2) \\
=& 4\langle A_1, A_2\rangle_0 + 2\langle X_1, X_2\rangle_0.
\end{aligned}$$

□

次に, 例 2.3 の $(V,\triangle)$ から得られた分裂可解リー代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ に対して, 内積を定義する．例 2.3 より V の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ は $\langle x,y\rangle_V = s(x\triangle y) = {}^t(xy)$ であった.

命題 2.19. $(V,\triangle)$ を例 2.3 のクラン, $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ を $(V,\triangle)$ から得られる分裂可解リー代数とする. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義するとき, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ の内積である.

$$\langle x,y\rangle_{\mathfrak{g}} := \langle \psi^{-1}(x), \psi^{-1}(y)\rangle_V.$$

証明. 証明は簡単なため省略する. □

命題 2.20.

$$\mathfrak{a} := \left\{ X = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \mid M(3,\mathbb{R}) \right\}, \mathfrak{n}' := \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid M(3,\mathbb{R}) \right\},$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle_0 : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}; \langle X,Y\rangle_0 := \mathrm{tr}({}^tXY)$ とする．命題 2.20 の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ は次のようになる:

$$\langle A_1+X_1, A_2+X_2\rangle_{\mathfrak{g}} := 4\langle A_1,A_2\rangle_0 + 2\langle X_1,X_2\rangle_0.$$

ここで, $A_1,A_2\in\mathfrak{a}, X_1,X_2\in\mathfrak{n}$ とする.

証明. 命題 2.19 と同様に示せる. □

3 代数的リッチソリトンについて

3.1 準備

代数的リッチソリトン及び, それを定義するために必要な事項を定義する．なお, ここでは $\mathfrak{g}$ は内積が定義されたリー代数とする.

定義 3.1. $\nabla : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : (X,Y)\mapsto \nabla_X Y$ が **Levi-Civita 接続** とは, 次が成り立つこと:

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle [X,Y],Z\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle.$$

また, Levi-Civita 接続を求めるために, 次を満たす対称双線型写像 $U : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ を定義する:

$$2\langle U(X,Y),Z\rangle = \langle [Z,X],Y\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle.$$

この U を用いると Lavi-Civita 接続は次のように表せる:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y] + U(X,Y).$$

定義 3.2. 次で定義される $R : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : (X,Y,Z)\mapsto R(X,Y)Z$ を **リーマン曲率** という:

$$R(X,Y)Z := \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z.$$

定義 3.3. $\{E_i\}$ を $\mathfrak{g}$ の正規直交基底とする. 次で定義される $\mathrm{Ric} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ を **リッチ曲率** という:

$$\mathrm{Ric}(X, Y) := \sum \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle.$$

ここで, 次で定義される $\mathrm{ric}_{\langle,\rangle} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ をリッチ作用素という:

$$\langle \mathrm{ric}_{\langle,\rangle} X, Y \rangle = \mathrm{Ric}(X, Y).$$

また $\mathfrak{g}$ が **アインシュタイン** であるとは, 次が成り立つこと:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}; \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \mathrm{Ric}(X, Y) = \alpha \langle X, Y \rangle.$$

定義 3.4. $\mathfrak{g}$ をリー代数とする.

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) := \{A : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : \text{線型} \mid \forall X, Y \in \mathfrak{g}, A[X, Y] = [AX, Y] + [X, AY]\}.$$

$I : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$; 恒等写像とする.

定義 3.5. $\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ の内積とする. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が代数的リッチソリトンとは, 次が成り立つこと:

$$\exists c \in \mathbb{R}, \exists D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}); \mathrm{ric}_{\langle,\rangle} = cI + D.$$

次に, Levi-Civita 接続 ∇ , リーマン曲率 R の性質を調べる. また, リッチ曲率が正規直交基底の取り方に依らないことを確かめる.

命題 3.6. Levi-Civita 接続 ∇ は次を満たす.

(1) $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$.

(2) $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = -\langle \nabla_X Z, Y \rangle$.

証明. (1) を示す.

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \frac{1}{2}[X, Y] + U(X, Y) \\
&= -\frac{1}{2}[Y, X] + U(Y, X) \\
&= \frac{1}{2}[Y, X] + U(Y, X) - [Y, X] \\
&= \nabla_Y X + [X, Y].
\end{aligned}$$

(2) を示す.

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle \\
&= -\langle [Y, X], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle \\
&= -2\langle \nabla_X Z, Y \rangle.
\end{aligned}$$

□

命題 3.7. Levi-Civita 接続 ∇ は双線型性をもつ.

(1) $\nabla_{a_1X_1+a_2X_2}Y = a_1\nabla_{X_1}Y + a_2\nabla_{X_2}Y$,

(2) $\nabla_X(a_1Y_1 + a_2Y_2) = a_1\nabla_XY_1 + a_2\nabla_XY_2$.

証明. (1) を示す.

$$\begin{aligned}\nabla_{a_1X_1+a_2X_2}Y &= \frac{1}{2}[a_1X_1 + a_2X_2, Y] + U(a_1X_1 + a_2X_2, Y)\\ &= \frac{1}{2}a_1[X, Y] + \frac{1}{2}a_2[X, Y] + a_1U(X_1, Y) + a_2U(X_2, Y)\\ &= a_1\nabla_{X_1}Y + a_2\nabla_{X_2}Y\end{aligned}$$

(2) は (1) と同様に, $[\cdot,\cdot]$ と U の双線型性よりわかる. □

命題 3.8. リーマン曲率 R は次を満たす.

(1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,

(2) $R(X, X)Z = 0$,

(3) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(X, Y)W, Z\rangle$,

(4) $\langle R(X, Y)Z, Z\rangle = 0$.

証明. (1) を示す.

$$\begin{aligned}R(X, Y)Z &= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_YZ + \nabla_Y\nabla_XZ\\ &= \nabla_{-[Y,X]}Z - \nabla_X\nabla_YZ + \nabla_Y\nabla_XZ\\ &= -(\nabla_{[Y,X]}Z - \nabla_Y\nabla_XZ + \nabla_X\nabla_YZ)\\ &= -R(X, Y)Z.\end{aligned}$$

(2) は (1) より明らか. (3) を示す.

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, W\rangle &= \langle\nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_YZ + \nabla_Y\nabla_XZ, W\rangle\\ &= \langle\nabla_{[X,Y]}Z, W\rangle - \langle\nabla_X\nabla_YZ, W\rangle + \langle\nabla_Y\nabla_XZ, W\rangle\\ &= -\langle\nabla_{[X,Y]}W, Z\rangle + \langle\nabla_XW, \nabla_YZ\rangle - \langle\nabla_YW, \nabla_XZ\rangle\\ &= -\langle\nabla_{[X,Y]}W, Z\rangle + \langle\nabla_YZ, \nabla_XW\rangle - \langle\nabla_XZ, \nabla_YW\rangle\\ &= -\langle\nabla_{[X,Y]}W, Z\rangle - \langle\nabla_X\nabla_YW, Z\rangle - \langle\nabla_Y\nabla_XW, Z\rangle\\ &= -\langle R(X, Y)W, Z\rangle.\end{aligned}$$

(4) は (3) より明らか.

□

命題 3.9. リーマン曲率 R は多重線型性を持つ.

(1) $R(a_1X_1 + a_2X_2, Y)Z = a_1R(X_1, Y)Z + a_2R(X_2, Y)Z$,

(2) $R(X, a_1Y_1 + a_2Y_2)Z = a_1R(X, Y_1)Z + a_2R(X, Y_2)Z$,

(3) $R(X, Y)(a_1Z_1 + a_2Z_2) = a_1R(X, Y)Z_1 + a_2R(X, Y)Z_2$.

証明. (1) を示す.

$$
\begin{aligned}
&R(a_1X_1+a_2X_2,Y)Z\\
=&\nabla_{[a_1X_1+a_2X_2,Y]}Z-\nabla_{a_1X_1+a_2X_2}\nabla_YZ+\nabla_Y\nabla_{a_1X_1+a_2X_2}Z\\
=&\nabla_{a_1[X_1,Y]+a_2[X_2,Y]}Z-(a_1\nabla_{X_1}\nabla_YZ+a_2\nabla_{X_2}\nabla_YZ)+(\nabla_Ya_1\nabla_{X_1}Z+\nabla_Ya_2\nabla_{X_2}Z)\\
=&a_1\nabla_{[X_1,Y]}Z+a_2\nabla_{[X_2,Y]}Z-a_1\nabla_{X_1}\nabla_YZ-a_2\nabla_{X_2}\nabla_YZ+a_1\nabla_Y\nabla_{X_1}Z+a_2\nabla_Y\nabla_{X_2}Z\\
=&a_1R(X_1,Y)Z+a_2R(X_2,Y)Z.
\end{aligned}
$$

(2),(3) は (1) と同様に $[\cdot,\cdot]$ と U の双線型性によりわかる. □

補題 3.10. 任意の $\mathbb{R}$ の元 α_{ij} に対して, 以下が成り立つ:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha_{jk}=\delta_{ij}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}\alpha_{kj}=\delta_{ij}.$$

証明. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha_{jk}=\delta_{ij}$ と仮定する.

$A:=(\alpha_{ij})\ (1\leq i,j\leq n)$ とすると, ${}^tA=(\alpha_{ji})$ であり, $a_j=\begin{pmatrix}\alpha_{j1}\\ \vdots\\ \alpha_{jn}\end{pmatrix}$ とおくと, ${}^tA=(a_1\cdots a_n)$ と表せる. 仮定より $\{a_1,\ldots,a_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の自然な内積の正規直交基底となるので, ${}^tA\in\mathrm{O}(n)$ となる. $\mathrm{O}(n)$ の定義より ${}^t({}^tA){}^tA=I_n$ このことから, $A=({}^tA)^{-1}\in\mathrm{O}(n)$.

ここで, $a'_i=\begin{pmatrix}\alpha_{1i}\\ \vdots\\ \alpha_{ni}\end{pmatrix}$ とおくと, $A=(a'_1\cdots a'_n)$ と表せる. $A\in\mathrm{O}(n)$ より $\{a'_1,\ldots,a'_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の自然な内積の正規直交基底となる.
従って,

$$
\begin{aligned}
\delta_{ij}&=\langle a'_i,a'_j\rangle\\
&={}^t(a'_i)a'_j\\
&=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}\alpha_{kj}.
\end{aligned}
$$

□

命題 3.11. リッチ曲率は正規直交基底の取り方に依らない.

証明. $\{E_i\},\{E'_i\}:\mathfrak{g}$ の正規直交基底とする. このとき, 次が成り立つことを示す:

$$\forall X,Y\in\mathfrak{g},\sum_{i=1}^{n}\langle R(X,E_i)Y,E_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle R(X,E_i)Y,E_i\rangle.$$

$\{E_i\}$ は基底なので,

$$\exists \alpha_{ij} \in \mathbb{R}; E'_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_j.$$

さらに, $\{E_i\}$ と $\{E'_i\}$ は正規直交基底なので,

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= \langle E'_i, E'_j \rangle \\ &= \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} E_k, \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl} E_l \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} (\sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl} \langle E_i, E_j \rangle) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_{jk}.\end{aligned}$$

よって, 補題より, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \alpha_{lj} = \delta_{ij}$ が成り立つ.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \langle R(X, E'_i)Y, E'_i \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} E_k)Y, \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il} E_l \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \langle R(X, E_k)Y, \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il} E_l) \rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_{il} \langle R(X, E_k)Y, E_l \rangle) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \delta_{kl} \langle R(X, E_k Y, E_l \rangle \ (\because [1]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle.\end{aligned}$$

□

さらに, リッチ曲率を求めるための線型代数の基本的な命題を紹介する.

命題 3.12. $\{X_1, \ldots, X_n\}$ を内積空間 $\mathfrak{g}$ の正規直交基底とする. このとき, 次が成り立つ: $\forall A \in \mathfrak{g}, A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle A, X_i \rangle X_i$.

証明. $\forall A \in \mathfrak{g}$ をとる. $\{X_1, \ldots, X_n\}$ は基底なので,

$$\exists \alpha_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, \ldots, n); A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i.$$

各 $j \in \{1,\ldots,n\}$ に対して, $\alpha_j = \alpha_j\langle X_j, X_j\rangle = \langle \alpha_j X_j, X_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i, X_j\rangle = \langle A, X_j\rangle$. したがって,

$$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i = \sum_{i=1}^{n} \langle A, X_i\rangle X_i.$$

□

3.2 代数的リッチソリトンの存在・非存在

以下, $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ をそれぞれ次のように定義する:

$$\mathfrak{g} := \left\{ X = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \mid M(3,\mathbb{R}) \right\}, \mathfrak{g}' := \left\{ X = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \mid M(3,\mathbb{R}) \right\}.$$

内積が定義されたリー代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ について以下を考える.
ただし, $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は $\mathfrak{g}$ に対して, $[X,Y] := XY - YX$ $(\forall X, Y \in \mathfrak{g})$ を満たす bracket 積 $[\cdot,\cdot]$ と, 次を満たす内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を入れたもの:

$$\mathfrak{a} := \left\{ X = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \mid M(3,\mathbb{R}) \right\}, \mathfrak{n} := \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \mid M(3,\mathbb{R}) \right\},$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle_0 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}; \langle X, Y\rangle_0 := \mathrm{tr}({}^t XY)$ とする.

$$\langle A_1 + X_1, A_2 + X_2\rangle := a\langle A_1, A_2\rangle_0 + b\langle X_1, X_2\rangle_0.$$

ここで, $A_1, A_2 \in \mathfrak{a}, X_1, X_2 \in \mathfrak{n}, a, b > 0$ とする.

補題 3.13. $E_1, \ldots, E_6$ を次のように定義する.

$$E_1 := \frac{1}{\sqrt{2a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 := \frac{1}{\sqrt{6a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, E_3 := \frac{1}{\sqrt{3a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_4 := \frac{1}{\sqrt{b}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 := \frac{1}{\sqrt{b}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_6 := \frac{1}{\sqrt{b}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\{E_i \mid (i = 1, \ldots, 6)\}$ は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の正規直交基底となる.

証明. 簡単な計算により確かめることができる. □

補題 3.14. リー代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $[E_1, E_4] = -\sqrt{\frac{2}{ab}} E_4$,

(2) $[E_4, E_6] = -\frac{1}{b} E_5, [E_1, E_5] = -\frac{1}{\sqrt{2ab}} E_5, [E_2, E_5] = -\sqrt{\frac{3}{2ab}} E_5$,

(3) $[E_1, E_6] = \frac{1}{\sqrt{2ab}}E_6, [E_2, E_6] = -\sqrt{\frac{3}{2ab}}E_6,$

(4) $[E_1, E_2] = [E_1, E_3] = [E_2, E_3] = [E_2, E_4] = [E_3, E_4] = [E_3, E_5] = [E_3, E_6] = [E_4, E_5] = [E_5, E_6] = 0.$

証明. 簡単な計算により確かめることができる. □

補題 3.15. リー代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $U(E_4, E_4) = -\sqrt{\frac{2}{ab}}E_1, U(E_5, E_5) = -\frac{1}{\sqrt{2ab}}E_1 - \sqrt{\frac{3}{2ab}}E_2, U(E_6, E_6) = \frac{1}{\sqrt{2ab}}E_1 - \sqrt{\frac{3}{2ab}}E_2,$

(2) $U(E_1, E_4) = \frac{1}{\sqrt{2ab}}E_4, U(E_5, E_6) = -\frac{1}{2b}E_4,$

(3) $U(E_1, E_5) = \frac{1}{2\sqrt{2ab}}E_5, U(E_2, E_5) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2ab}}E_5,$

(4) $U(E_4, E_5) = \frac{1}{2b}E_6, U(E_1, E_6) = -\frac{1}{2\sqrt{2ab}}E_6, U(E_2, E_6) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2ab}}E_6,$

(5) $U(E_1, E_1) = U(E_1, E_2) = U(E_2, E_2) = U(E_2, E_3) = U(E_2, E_4) = U(E_3, E_3) = U(E_3, E_4) = U(E_3, E_5) = U(E_3, E_6) = U(E_4, E_6) = 0.$

証明. $U(E_4, E_4) = \sqrt{\frac{2}{ab}}E_1$ のみ示す.

- $\langle U(E_4, E_4), E_1\rangle = \frac{1}{2}(\langle[E_1, E_4], E_4\rangle + \langle E_4, [E_1, E_4]\rangle) = \sqrt{\frac{2}{ab}},$
- $\langle U(E_4, E_4), E_2\rangle = \frac{1}{2}(\langle[E_2, E_4], E_4\rangle + \langle E_4, [E_2, E_4]\rangle) = 0,$
- $\langle U(E_4, E_4), E_3\rangle = \frac{1}{2}(\langle[E_3, E_4], E_4\rangle + \langle E_4, [E_3, E_4]\rangle) = 0,$
- $\langle U(E_4, E_4), E_4\rangle = \frac{1}{2}(\langle[E_4, E_4], E_4\rangle + \langle E_4, [E_4, E_4]\rangle) = 0,$
- $\langle U(E_4, E_4), E_5\rangle = \frac{1}{2}(\langle[E_5, E_4], E_4\rangle + \langle E_4, [E_5, E_4]\rangle) = 0,$
- $\langle U(E_4, E_4), E_6\rangle = \frac{1}{2}(\langle[E_6, E_4], E_4\rangle + \langle E_4, [E_6, E_4]\rangle) = 0.$

したがって, 命題 3.12 より $U(E_4, E_4) = \sqrt{\frac{2}{ab}}E_1$. その他も同様に確かめることができる. □

補題 3.16. リー代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $\nabla_{E_4}E_4 = -\sqrt{\frac{2}{ab}}E_1, \nabla_{E_5}E_5 = -\frac{1}{\sqrt{2ab}}E_1 - \sqrt{\frac{3}{2ab}}E_2, \nabla_{E_6}E_6 = \frac{1}{\sqrt{2ab}}E_1 - \sqrt{\frac{3}{2ab}}E_2,$

(2) $\nabla_{E_4}E_1 = \sqrt{\frac{2}{ab}}E_4, \nabla_{E_5}E_6 = \nabla_{E_5}E_6 = -\frac{1}{2b}E_4,$

(3) $\nabla_{E_4}E_6 = -\frac{1}{2b}E_5, \nabla_{E_5}E_1 = \frac{1}{\sqrt{2ab}}E_5, \nabla_{E_5}E_2 = \sqrt{\frac{3}{2ab}}E_5, \nabla_{E_6}E_4 = \frac{1}{2b}E_5,$

(4) $\nabla_{E_4}E_5 = \nabla_{E_5}E_4 = \frac{1}{2b}E_6, \nabla_{E_6}E_1 = -\frac{1}{\sqrt{2ab}}E_6, \nabla_{E_6}E_2 = \sqrt{\frac{3}{2ab}}E_6,$

(5) $\nabla_{E_1} = \nabla_{E_2} = \nabla_{E_3} = \nabla_{E_4}E_2 = 0.$

証明. 補題 3.14 , 補題 3.15 より簡単な計算により確かめることができる. □

補題 3.17. リー代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $R(E_1, E_2) = R(E_1, E_3) = R(E_2, E_3) = R(E_2, E_3) = R(E_2, E_4) = R(E_3, E_4) = R(E_3, E_5) = R(E_3, E_6) = 0,$

(2) $R(E_1, E_4)E_1 = -\frac{2}{ab}E_4, R(E_1, E_4)E_2 = 0, R(E_1, E_4)E_3 = 0,$

$R(E_1,E_4)E_4=\frac{2}{ab}E_1, R(E_1,E_4)E_5=-\frac{1}{2b}\sqrt{2}abE_6, R(E_1,E_4)E_6=\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{2}{ab}}E_5,$

(3) $R(E_1,E_5)E_1=-\frac{1}{2ab}E_5, R(E_1,E_5)E_2=-\frac{\sqrt{3}}{2ab}E_5, R(E_1,E_5)E_3=0,$
$R(E_1,E_5)E_4=-\frac{1}{2b\sqrt{2ab}}E_4, R(E_1,E_5)E_5=\frac{1}{2ab}E_1+\frac{\sqrt{3}}{2ab}E_2, R(E_1,E_5)E_6=\frac{1}{2b\sqrt{2ab}}E_4,$

(4) $R(E_1,E_6)E_1=-\frac{1}{2ab}E_6, R(E_1,E_6)E_2=\frac{\sqrt{3}}{2ab}E_6, R(E_1,E_6)E_3=0,$
$R(E_1,E_6)E_4=\frac{1}{2b\sqrt{2ab}}E_5, R(E_1,E_6)E_5=-\frac{1}{2b\sqrt{2ab}}E_4, R(E_1,E_6)E_6=\frac{1}{2ab}E_1-\frac{\sqrt{3}}{2ab}E_2,$

(5) $R(E_2,E_5)E_1=-\frac{\sqrt{3}}{2ab}E_5, R(E_2,E_5)E_2=-\frac{3}{2ab}E_5, R(E_2,E_5)E_3=0,$
$R(E_2,E_5)E_4=-\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{3}{2ab}}E_6, R(E_2,E_5)E_5=\frac{\sqrt{3}}{2ab}E_1+\frac{3}{2ab}E_2, R(E_2,E_5)E_6=\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{3}{2ab}}E_4,$

(6) $R(E_2,E_6)E_1=\frac{\sqrt{3}}{2ab}E_6, R(E_2,E_6)E_2=-\frac{3}{2ab}E_5, R(E_2,E_6)E_3=0,$
$R(E_2,E_6)E_4=-\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{3}{2ab}}E_6, R(E_2,E_6)E_5=\frac{\sqrt{3}}{2ab}E_1+\frac{3}{2ab}E_2, R(E_2,E_6)E_6=\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{3}{2ab}},$

(7) $R(E_4,E_5)E_1=\frac{1}{2b\sqrt{2ab}}E_6, R(E_4,E_5)E_2=-\frac{1}{2b\sqrt{2ab}}E_6, R(E_4,E_5)E_3=0,$
$R(E_4,E_5)E_4=(-\frac{1}{4b^2}-\frac{1}{ab})E_5, R(E_4,E_5)E_5=(\frac{1}{ab}-\frac{1}{4b^2})E_4, R(E_4,E_5)E_6=-\frac{1}{2b\sqrt{2ab}}E_1+\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{3}{2ab}}E_2,$

(8) $R(E_4,E_6)E_1=(-\frac{1}{\sqrt{2ab}}-\frac{3}{2b\sqrt{2ab}})E_5, R(E_4,E_6)E_2=-\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{3}{2ab}}E_5, R(E_4,E_6)E_3=0,$
$R(E_4,E_6)E_4=(\frac{1}{ab}-\frac{3}{4b^2})E_6, R(E_4,E_6)E_5=-\frac{1}{2b\sqrt{2ab}}E_1+\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{3}{2ab}}E_2, R(E_4,E_6)E_6=(\frac{3}{4b^2}-\frac{1}{ab})E_4,$

(9) $R(E_5,E_6)E_1=-\frac{1}{b\sqrt{2ab}}E_4, R(E_5,E_6)E_2=0, R(E_5,E_6)E_3=0,$
$R(E_5,E_6)E_4=\frac{1}{b\sqrt{2ab}}E_1, R(E_5,E_6)E_5=(\frac{1}{4b^2}-\frac{1}{ab})E_6, R(E_5,E_6)E_6=(\frac{1}{ab}-\frac{1}{4b^2})E_5.$

証明. 補題 3.14 , 補題 3.16 より簡単な計算で確かめることができる. □

命題 3.18. $X=\sum_{i=1}^{6}\alpha_iE_i, Y=\sum_{i=1}^{6}\beta_iE_i\in\mathfrak{g}$ $(\forall\alpha_i\beta_i\in\mathbb{R})$ に対して, $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ のリッチ曲率は, $\mathrm{Ric}\langle X,Y\rangle=(-\frac{3}{ab})\alpha_1\beta_1+(-\frac{3}{ab})\alpha_2\beta_2+(-\frac{1}{2a^2}-\frac{2}{ab})\alpha_4\beta_4+(\frac{1}{2a^2}-\frac{4}{ab})\alpha_5\beta_5+(-\frac{1}{2a^2}-\frac{2}{ab})\alpha_6\beta_6$ となる.

証明. $X=\sum_{i=1}^{6}\alpha_iE_i, Y=\sum_{i=1}^{6}\beta_iE_i\in\mathfrak{g}$ $(\forall\alpha_i\beta_i\in\mathbb{R})$ に対して, $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ のリッチ曲率を計算すると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y)=&\sum_{i}^{6}\langle R(X,E_i)Y,E_i\rangle\\
=&\langle R(X,E_1)Y,E_1\rangle+\langle R(X,E_2)Y,E_2\rangle+\cdots+\langle R(X,E_6)Y,E_6\rangle\\
=&(-\frac{2}{ab}-\frac{1}{2ab}-\frac{1}{2ab})\alpha_1\beta_1+(-\frac{\sqrt{3}}{2ab}+\frac{\sqrt{3}}{2ab})\alpha_1\beta_2+(-\frac{\sqrt{3}}{2ab}+\frac{\sqrt{3}}{2ab})\alpha_2\beta_1+(-\frac{3}{2ab}-\frac{3}{2ab})\alpha_2\beta_2\\
&+(-\frac{2}{ab}+\frac{1}{4b^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}-\frac{3}{4b^2})\alpha_4\beta_4+(-\frac{1}{2ab}-\frac{3}{2ab}+\frac{1}{4b^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{4b^2}-\frac{1}{ab})\alpha_5\beta_5\\
&+(-\frac{1}{2ab}-\frac{3}{2ab}+\frac{1}{ab}-\frac{3}{4b^2}+\frac{1}{4b^2}-\frac{1}{ab})\alpha_6\beta_6\quad(\because \text{補題 3.17 より})\\
=&(-\frac{3}{ab})\alpha_1\beta_1+(-\frac{3}{ab})\alpha_2\beta_2+(-\frac{1}{2b^2}-\frac{2}{ab})\alpha_4\beta_4+(\frac{1}{2b^2}-\frac{4}{ab})\alpha_5\beta_5+(-\frac{1}{2b^2}-\frac{2}{ab})\alpha_6\beta_6.
\end{aligned}$$

$\square$

補題 3.19. $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, $\mathrm{ric}_{\langle,\rangle}$ の $\{E_i \mid (i=1,\dots,6)\}$ に関する表現行列を X とすると,

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2b^2}-\frac{2}{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2b^2}-\frac{4}{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2b^2}-\frac{2}{ab} \end{pmatrix}.$$

証明. $X = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i E_i, Y = \sum_{i=1}^{6} \beta_i E_i \in \mathfrak{g}$ $(\forall \alpha_i\beta_i \in \mathbb{R})$ とすると, 命題 3.18 より,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}\langle X, Y\rangle =& (-\frac{3}{ab})\alpha_1\beta_1 + (-\frac{3}{ab})\alpha_2\beta_2 + (-\frac{1}{2a^2}-\frac{2}{ab})\alpha_4\beta_4 \\ &+ (\frac{1}{2a^2}-\frac{4}{ab})\alpha_5\beta_5 + (-\frac{1}{2a^2}-\frac{2}{ab})\alpha_6\beta_6. \end{aligned}$$

また, $\mathrm{ric}_{\langle,\rangle}$ の線型性より,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{ric}_{\langle,\rangle} X, Y\rangle &= \sum_{i=1}^{6} \alpha_i \langle \mathrm{ric}_{\langle,\rangle} E_i, Y\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{6} \alpha_i (\sum_{j=1}^{6} \alpha_j\beta_j \langle \mathrm{ric}_{\langle,\rangle} E_i, E_j\rangle. \end{aligned}$$

このことから,

$$\begin{aligned} \mathrm{ric}_{\langle,\rangle}(E_1) &= (-\frac{3}{ab})E_1, \\ \mathrm{ric}_{\langle,\rangle}(E_2) &= (-\frac{3}{ab})E_2, \\ \mathrm{ric}_{\langle,\rangle}(E_3) &= 0, \\ \mathrm{ric}_{\langle,\rangle}(E_4) &= (-\frac{1}{2b^2}-\frac{2}{ab})E_4, \\ \mathrm{ric}_{\langle,\rangle}(E_5) &= (\frac{1}{2b^2}-\frac{4}{ab})E_5, \\ \mathrm{ric}_{\langle,\rangle}(E_6) &= (-\frac{1}{2b^2}-\frac{2}{ab})E_6. \end{aligned}$$

したがって,

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2b^2}-\frac{2}{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2b^2}-\frac{4}{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2b^2}-\frac{2}{ab} \end{pmatrix}.$$

$\square$

補題 3.20. $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して,$\forall A \in Der(\mathfrak{g})$ の $\{E_i \mid (i=1,\ldots,6)\}$ に関する表現行列を Y とすると,

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_5 & y_6 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & y_7 & 0 & 0 \\ y_3 & \sqrt{3}y_3 & 0 & \sqrt{\frac{2a}{b}}y_4 & y_8 & -\sqrt{\frac{a}{2b}}y_2 \\ y_4 & -\sqrt{3}y_4 & 0 & 0 & 0 & y_8 - y_7 \end{pmatrix}.$$

ここで, $y_i \in \mathbb{R}$.

証明. $\forall A \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ をとる. $A(E_1),\ldots,A(E_6)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} A(E_1) &= y_1E_3 + y_2E_4 + y_3E_5 + y_4E_6, \\ A(E_2) &= y_5E_3 + \sqrt{3}y_3E_5 - \sqrt{3}y_4, \\ A(E_3) &= y_6E_3, \\ A(E_4) &= y_7E_4 + \sqrt{\frac{2a}{b}}y_4E_5, \\ A(E_5) &= y_8E_5, \\ A(E_6) &= -\sqrt{\frac{a}{2b}}y_2E_5 + (y_8 - y_7)E_6. \quad (y_i \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

したがって,

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_5 & y_6 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & y_7 & 0 & 0 \\ y_3 & \sqrt{3}y_3 & 0 & \sqrt{\frac{2a}{b}}y_4 & y_8 & -\sqrt{\frac{a}{2b}}y_2 \\ y_4 & -\sqrt{3}y_4 & 0 & 0 & 0 & y_8 - y_7 \end{pmatrix}.$$

□

命題 3.21. $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に関して, $a = 2b$ のとき, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は代数的リッチソリトンになる.

証明. 補題 3.19 , 補題 3.20 から従う. □

定理 3.22. 例 2.2 のクランから得られる内積が定義された分裂可解リー代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}})$ に関して, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ は代数的リッチソリトンである.

証明. 命題 2.20 , 3.21 から従う. □

次に, 内積が定義されたリー代数 $(\mathfrak{g}', [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ について以下を考える.
ただし, $(\mathfrak{g}', [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は $\mathfrak{g}'$ に対して, $[X,Y] := XY - YX$ $(\forall X, Y \in \mathfrak{g})$ を満たす bracket 積

$[\cdot,\cdot]$ と, 次を満たす内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を入れたもの:

$$\mathfrak{a} := \left\{ X = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \mid M(3,\mathbb{R}) \right\}, \mathfrak{n}' := \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid M(3,\mathbb{R}) \right\},$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle_0 : \mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathbb{R}; \langle X, Y\rangle_0 := \mathrm{tr}({}^t XY)$ とする.

$$\langle A_1 + X_1, A_2 + X_2 \rangle := a\langle A_1, A_2\rangle_0 + b\langle X_1, X_2\rangle_0.$$

ここで, $A_1, A_2 \in \mathfrak{a}, X_1, X_2 \in \mathfrak{n}', a, b > 0$ とする.

補題 3.23. $E_1, \ldots, E_5$ を次のように定義する.

$$E_1 := \frac{1}{\sqrt{2a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 := \frac{1}{\sqrt{6a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, E_3 := \frac{1}{\sqrt{3a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$E_4 := \frac{1}{\sqrt{b}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 := \frac{1}{\sqrt{b}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\{E_i \mid (i = 1, \ldots, 5)\}$ は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の正規直交基底となる.

証明. 簡単な計算により確かめることができる. □

補題 3.24. リー代数 $(\mathfrak{g}', [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $[E_1, E_4] = -\sqrt{\frac{2}{ab}} E_4$,

(2) $[E_1, E_5] = -\frac{1}{\sqrt{2ab}} E_5, [E_2, E_5] = -\sqrt{\frac{3}{2ab}} E_5$,

(3) $[E_1, E_2] = [E_1, E_3] = [E_2, E_3] = [E_2, E_4] = [E_3, E_4] = [E_3, E_5] = [E_4, E_5] = 0$.

証明. 簡単な計算により確かめることができる. □

補題 3.25. リー代数 $(\mathfrak{g}', [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $U(E_4, E_4) = \frac{1}{\sqrt{2ab}} E_1, U(E_5, E_5) = -\frac{1}{\sqrt{2ab}} E_1 - \sqrt{\frac{3}{2ab}} E_2$,

(2) $U(E_1, E_4) = -\frac{1}{\sqrt{2ab}} E_4$,

(3) $U(E_1, E_5) = \frac{1}{2\sqrt{2ab}} E_5, U(E_2, E_5) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2ab}} E_5$,

(4) $U(E_1, E_1) = U(E_1, E_2) = U(E_1, E_3) = U(E_2, E_2) = U(E_2, E_3) = U(E_2, E_4) = U(E_3, E_3) = U(E_3, E_4) = U(E_3, E_5) = U(E_4, E_5) = 0$.

証明. 補題 3.14 と同様に確かめることができる. □

補題 3.26. リー代数 $(\mathfrak{g}', [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $R(E_1, E_2) = R(E_1, E_3) = R(E_2, E_3) = R(E_2, E_3) = R(E_2, E_4) = R(E_3, E_4) = R(E_3, E_5) = 0$,

(2) $R(E_1,E_4)E_1=-\frac{2}{ab}E_4, R(E_1,E_4)E_2=0, R(E_1,E_4)E_3=0,$
$R(E_1,E_4)E_4=\frac{2}{ab}E_1, R(E_1,E_4)E_5=0,$
(3) $R(E_1,E_5)E_1=-\frac{1}{2ab}E_5, R(E_1,E_5)E_2=-\frac{\sqrt{3}}{2ab}E_5, R(E_1,E_5)E_3=0,$
$R(E_1,E_5)E_4=0, R(E_1,E_5)E_5=\frac{1}{2ab}E_1+\frac{\sqrt{3}}{2ab}E_2,$
(4) $R(E_2,E_5)E_1=-\frac{\sqrt{3}}{2ab}E_5, R(E_2,E_5)E_2=-\frac{3}{2ab}E_5, R(E_2,E_5)E_3=0,$
$R(E_2,E_5)E_4=0, R(E_2,E_5)E_5=\frac{\sqrt{3}}{2ab}E_1+\frac{3}{2ab}E_2,$
(5) $R(E_4,E_5)E_1=0, R(E_4,E_5)E_2=0, R(E_4,E_5)E_3=0,$
$R(E_4,E_5)E_4=-\frac{1}{ab}E_5, R(E_4,E_5)E_5=\frac{1}{ab}E_4.$

証明. 補題 3.22 , 3.23 より簡単な計算で確かめることができる. □

命題 3.27. $X=\sum_{i=1}^{5}\alpha_i E'_i, Y=\sum_{i=1}^{5}\beta_i E'_i \in \mathfrak{g}$ に対して, $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ のリッチ曲率は, $\mathrm{Ric}\langle X,Y\rangle=(-\frac{5}{2ab})\alpha_1\beta_1+(-\frac{\sqrt{3}}{2ab})\alpha_1\beta_2+(-\frac{\sqrt{3}}{2ab})\alpha_2\beta_1+(-\frac{3}{ab})\alpha_2\beta_2+(-\frac{3}{ab})\alpha_4\beta_4+(-\frac{3}{ab})\alpha_5\beta_5$ となる.

証明. $X=\sum_{i=1}^{5}\alpha_i E_i, Y=\sum_{i=1}^{5}\beta_i E_i \in \mathfrak{g}$ $(\forall\alpha_i\beta_i\in\mathbb{R})$ に対して, $(\mathfrak{g}',[\cdot,\cdot],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ のリッチ曲率を計算すると,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y)=&\sum_{i}^{5}\langle R(X,E_i)Y,E_i\rangle\\
=&\langle R(X,E_1)Y,E_1\rangle+\langle R(X,E_2)Y,E_2\rangle+\cdots+\langle R(X,E_5)Y,E_5\rangle\\
=&(-\frac{2}{ab}-\frac{1}{2ab})\alpha_1\beta_1+(-\frac{\sqrt{3}}{2ab})\alpha_1\beta_2+(-\frac{3}{2ab})\alpha_2\beta_1+(-\frac{3}{2ab})\alpha_2\beta_2\\
&+(-\frac{2}{ab}-\frac{1}{ab})\alpha_4\beta_4+(-\frac{1}{2ab}-\frac{3}{2ab}-\frac{1}{ab})\alpha_5\beta_5\quad(\because \text{補題 3.17 より})\\
=&(-\frac{5}{2ab})\alpha_1\beta_1+(-\frac{\sqrt{3}}{2ab})\alpha_1\beta_2+(-\frac{3}{2ab})\alpha_2\beta_1+(-\frac{3}{ab})\alpha_2\beta_2+(-\frac{3}{ab})\alpha_4\beta_4+(-\frac{3}{ab})\alpha_5\beta_5.
\end{aligned}
$$

□

補題 3.28. $\mathrm{ric}_{\langle,\rangle}$ の $\{E_i \mid (i=1,\ldots,5)\}$ に関する表現行列を X とすると,

$$
X=\begin{pmatrix}
-\frac{5}{2ab} & -\frac{\sqrt{3}}{2ab} & 0 & 0 & 0\\
-\frac{\sqrt{3}}{2ab} & -\frac{3}{2ab} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -\frac{3}{ab} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{ab}
\end{pmatrix}.
$$

証明. 補題 3.19 と同様に確かめられる. □

補題 3.29. $\forall A \in Der(\mathfrak{g}')$ の $\{E_i' \mid (i=1,\ldots,5)\}$ に関する表現行列を Y とすると,

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_4 & y_5 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & y_6 & 0 \\ y_3 & \sqrt{3}y_3 & 0 & 0 & y_7 \end{pmatrix}.$$

ここで, $y_i \in \mathbb{R}$.

証明. 補題 3.20 と同様に確かめられる. □

命題 3.30. $(\mathfrak{g}', [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に関して, 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は代数的リッチソリトンにならない.

証明. 補題 3.28 , 補題 3.29 から従う. □

4 おわりに

最後になりましたが本論文の作成にあたって, 指導教員の田丸博士先生をはじめ, 先輩方には貴重な時間を割いて指導していただきました. この場を借りて深く御礼を申しあげます.

参考文献

[1] 松崎勝也, 球面と双曲空間の曲率: 低次元の場合の計算. 広島大学理学部 2009 年度卒業論文.
[2] 野村隆昭, 等質領域の幾何と代数. 広島大学集中講義資料, 2013.
[3] 杉浦光夫, リー群論. 共立出版株式会社, 2000.
[4] 田丸博士, 等質空間の幾何学入門. 熊本大学集中講義資料, 2006.
[5] 田丸博士, 曲線・曲面とリーマン多様体. 広島大学 2009 年度幾何学 C・多様幾何基礎講義 A 講義資料 , 2009.