「群と空間」

田丸 博士 (広島大学)

先端数学 (2013/05/31) 講義資料

1 導入

1.1 概要

- 田丸の専門 (を非常に大雑把に言うと):
  - 群を使って空間の幾何を調べる.

    (ただし，空間 := 集合, 距離空間, 位相空間, (可微分) 多様体, . . .)

- この講義でやること:
  - 球面 S^n，射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は，群を使って表示できる.
  - その表示の応用例を一つ紹介.

1.2 群を使って空間を表示する方法 - 剰余集合

▼ 定義:

G : 群, K : 部分群とする.

- 次を K による同値関係: $g \sim h \ :\Leftrightarrow\ g^{-1}h \in K$.
- 商集合 $G/\sim$ を 剰余集合 と呼び, G/K で表す.

▼ 復習:

- $[g] := \{h \in G \mid h \sim g\}$: 同値類.
- $G/\sim := \{[g] \mid g \in G\}$: 商集合.

▼ 注意:

- K : 正規部分群 $\Rightarrow$ G/K : 剰余群 (または商群).
- ここでは, K は単なる部分群なので, G/K は群とは限らない.

1.3 登場人物

▼ 命題. 以下は群である:

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$. (一般線型群)
- $\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n\}$. (直交群)

▼ 定義.

- $S^n := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\|^2 = 1\}$ を n 次元球面 と呼ぶ.

  (ただしここで, $\|p\|^2 := {}^t p p$)

- $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \{\ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \in \ell$: 直線 $\}$ を n 次元実射影空間 と呼ぶ.

  ($\mathbb{R}^{n+1} \ni v \neq 0$ に対して, $[v] := \{cv \mid c \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ と表す)

1.4 主定理

▼ 定理.

- $\{1\} \times \mathrm{O}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\} \cong \mathrm{O}(n)$

  $\Rightarrow$ $\mathrm{O}(n+1)/(\{1\} \times \mathrm{O}(n)) \cong S^n$ (全単射が存在)

▼ 定理.

- $\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathrm{O}(1),\ \beta \in \mathrm{O}(n) \right\}$

  $\Rightarrow$ $\mathrm{O}(n+1)/(\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n)) \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ (全単射が存在)

2 準備 - 群作用

2.1 群作用の定義

▼ 記号:

◦ 以下, G : 群 (単位元 e), M : 集合.

▼ 定義:

◦ $\Phi : G \times M \to M : (g, p) \mapsto g.p$ が 群作用

$$:\Leftrightarrow \text{(i)} \ \forall g, h \in G, \ \forall p \in M, \ (gh).p = g.(h.p),$$
$$\text{(ii)} \ \forall p \in M, \ e.p = p.$$

▼ 記号:

◦ 群作用 $\Phi : G \times M \to M$ が存在することを「$G \curvearrowright M$」で表し,
「G は M に作用する」と言う.

2.2 群作用の例

- 例:

  - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\} \curvearrowright \mathbb{R}^n$.

    $(\because)$ $\Phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (g, p) \mapsto gp$ (行列の積) より. $\square$

- 例:

  - $\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n\} \curvearrowright S^{n-1}$.

    $(\because)$ $\Phi : \mathrm{O}(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1} : (g, p) \mapsto gp$ (行列の積) より. $\square$

- レポート問題 (1): 次を示せ:

  - $\forall g \in \mathrm{O}(n),\ \forall p \in S^{n-1},\ gp \in S^{n-1}$.

2.3 推移的な作用

▼ 定義:

- $G \curvearrowright M$ が **推移的**

  $:\Leftrightarrow \ \forall p, q \in M, \ \exists g \in G \ : \ g.p = q.$

  (i.e., どこからどこへでも移れる)

▼ 例:

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ は推移的でない.

  $(\because)$ $0 \in \mathbb{R}^n$ は動かないから. $\square$

▼ 例:

- $\mathrm{O}(n) \curvearrowright S^{n-1}$ は推移的.

  $(\because)$ 線型代数の知識を使うとできる. 省略. $\square$

2.4 等質集合の表示

▼ 定理:

- $G \curvearrowright M$: 推移的, $o \in M$, $K := \{g \in G \mid g.o = o\}$
  $\Rightarrow$ M と G/K の間に全単射が存在.

  $(\because)$ 写像 f を次で定める: $f : G/K \to M : [h] \mapsto h.o$.
  この f が well-defined かつ全単射を示せば良い. □

▼ レポート問題 (2):

- 上の定理の証明を完成させよ.

▼ 用語:

- 上で定義した $\{g \in G \mid g.o = o\}$ を o での固定部分群 と呼ぶ.

3 主定理の証明

3.1 球面の場合 (1)

- 定理.
  - $\{1\} \times \mathrm{O}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\} \cong \mathrm{O}(n)$

    $\Rightarrow \ \mathrm{O}(n+1)/(\{1\} \times \mathrm{O}(n)) \cong S^n$ (全単射が存在)

- 証明 (のアイデア):
  - $\mathrm{O}(n+1) \curvearrowright S^n$: 推移的だった.
  - よって次を示せば良い: $\exists o \in S^n$: [o での固定部分群] $= \{1\} \times \mathrm{O}(n)$.
  - これを示すには, $o := e_1$ とすれば良い. $\square$

3.2 球面の場合 (2)

- 再掲:
  - $o := e_1$ とおく.
  - 次を示せば良い: [o での固定部分群] $= \{1\} \times \mathrm{O}(n)$.
- レポート問題 (3):
  - 上を証明せよ.
- 補足説明:
  - 次のように略記することが多い: $S^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$.

3.3 実射影空間の場合

▼ 定理.

- $\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(1),\ \beta \in \mathrm{O}(n) \right\}$

  $\Rightarrow\ \mathrm{O}(n+1)/(\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n)) \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ (全単射が存在)

▼ 証明 (のあらすじ):

- $\mathrm{O}(n+1) \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{P}^n$: 推移的を示す.
- $o := [e_1] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ とおく.
- 次を示す: [o での固定部分群] $= \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n)$. □

▼ レポート問題 (4):

- $\mathrm{O}(n+1) \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は次で定義される: $g.[v] := [gv]$.

  これが well-defined であることを示せ.

4 応用

4.1 軌道

▼ 定義:

- $G \curvearrowright M,\ p \in M$ とする.
- このとき $G.p := \{g.p \in M \mid g \in G\}$ を 軌道 という.

▼ 注意:

- 一般に $G.p \subset M$.
- $G.p = M \iff G \curvearrowright M$: 推移的.

▼ 命題:

- $M \supset G.p \cong G/G_p$.

  (ただし G_p は p での固定部分群)

4.2 応用例: 部分多様体

▼ 命題:

- $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \mathrm{O}(3)/(\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(2)) \subset \mathbb{R}^5$.

▼ 証明:

- $V := \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0,\ {}^tX = X\}\ (\cong \mathbb{R}^5)$ とおく.
  すると, 次によって $\mathrm{O}(3) \curvearrowright V$: $g.X := gXg^{-1}$.

- [step 1: V の部分集合 M を定める]

$$A := \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \in V, \qquad M := \mathrm{O}(3).A \text{ とおく.}$$

- [step 2: $M = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ を示す]

  次を示せば良い: [A における固定部分群] $= \mathrm{O}(1)\times\mathrm{O}(2)$. □

4.3 補足

▼ 補足 (1):

- $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \subset \mathbb{R}^5$ を示したが, 実は次が成り立つ: $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \subset S^4$.

  ($\mathbb{R}^5 = V$ 上の内積を考えると分かる.)

▼ 補足 (2):

- 先の命題と同様に次が成り立つ:

  $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \subset \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2-1} = \{X \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0,\ {}^tX = X\}.$

5 まとめ

- まとめ:
  - G/K (等質空間) の幾何は, 群 G, K (代数) を使って研究可能.
  - 行列群 (例えば $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ や $\mathrm{O}(n)$) は重要な例.
  - 「等質空間の幾何 = 群論と線型代数を使った幾何」
    (注: イメージです)