1　数学通論 I (2013/04/11): 概要説明・$\mathbb{R}$ の開集合 (1)

概要説明

この講義の内容は以下の通り:

- 集合の上に距離が定まっているものを距離空間と呼ぶ. この講義では, 実数 $\mathbb{R}$, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と順を追って, 最終的に距離空間を解説する.
- 講義は, 以下の内容を基にして行われます: 解析学で習った実数の性質・数列の収束・連続関数, 数学概説で習った論理・集合・写像, など.
- 特に, 論理は非常に大事です. 論理記号の使い方や証明の書き方を, (まだの場合は) ここで身に付けましょう.

以下は単位について:

- 成績は主に試験の点数で付けます. しかし, レポート問題も一定頻度で出します.
- 合否は演習と連動します. 演習で一回も発表していない場合は, 自動的に不可とします.

記号の復習

この講義を通して, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す.

定義 1.1. 以下で定義されるような集合 (a,b) を <u>**開区間**</u>, $[a,b]$ を <u>**閉区間**</u> と呼ぶ:

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

定義 1.2. A, B を集合とする. 次が成り立つとき, A は B の <u>**部分集合**</u> であると言い, 記号 $A \subset B$ で表す: $\forall x \in A,\ x \in B$.

内点と内部

定義 1.3. $A \subset \mathbb{R}$ とする.

(1) 次が成り立つときに, x $(\in \mathbb{R})$ は A の <u>**内点**</u> であるという: $\exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.

(2) 次で定義される A° を A の <u>**内部**</u> と呼ぶ: $A^\circ := \{x \in \mathbb{R} \mid x$ は A の内点 $\}$.

例 1.4. $[0,2) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $1 \in [0,2)^\circ$.

(2) $0 \notin [0,2)^\circ$.

命題 1.5. $A, B \subset \mathbb{R}$ とする. このとき次が成り立つ: $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.

2　数学通論 I (2013/04/11): レポート問題 (1)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

問題 2.1. $A := [0, 2)$ とする. 次を示せ: $(0, 2) \subset A^\circ$.

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

3　数学通論 I (2013/04/11): レポート問題 (2)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

問題 3.1. $A, B \subset \mathbb{R}$ とする. 次を示せ: $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$.

学生番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

4 数学通論 I (2013/04/18): $\mathbb{R}$ の開集合 (2)

内点と内部 (続き)

命題 4.1. $A \subset \mathbb{R}$ とする. 以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.

(2) $(a,b) \subset A$ ならば $(a,b) \subset A^\circ$.

(3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

例 4.2. 内部について, 以下が成り立つ:

(1) $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$, $\emptyset^\circ = \emptyset$.

(2) $(a,b)^\circ = [a,b]^\circ = [a,b)^\circ = (a,b]^\circ = (a,b)$.

(3) $(a,+\infty)^\circ = [a,+\infty)^\circ = (a,+\infty)$.

(4) $(-\infty,b)^\circ = (-\infty,b]^\circ = (-\infty,b)$.

開集合

定義 4.3. $A\ (\subset \mathbb{R})$ が <u>**開集合**</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.

命題 4.4. $A\ (\subset \mathbb{R})$ が開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $A = A^\circ$.

例 4.5. 以下は開集合: (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $\ldots$

定理 4.6. $\mathbb{R}$ の開集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}$ は開集合.

(2) $O_i\ (i = 1, \ldots, n)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ も開集合.

(3) $O_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ も開集合.

すなわち, 有限個の開集合の共通部分は開集合であり, 開集合の和集合は (有限個でも無限個でも) 開集合である. 無限個の開集合の共通部分は, 開集合になるとは限らない. 次が反例.

例 4.7. $A_n := (-1, \dfrac{1}{n})$ とすると, 次が成り立つ: $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = (-1, 0]$.

5　数学通論 I (2013/04/18): レポート問題 (3)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

問題 5.1. $A := (0, +\infty)$ が開集合であることを, 定義に従って示せ. ただしここで, $A\ (\subset \mathbb{R})$ が開集合であることの定義は, 次が成り立つことである: $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$.

学生番号 ____________________ 氏名 ____________________

6　数学通論 I (2013/04/25): $\mathbb{R}$ の閉集合 (1)

触点と外部

定義 6.1. $A \subset \mathbb{R}$ とする.

(1) 次が成り立つときに, x $(\in \mathbb{R})$ は A の **触点** であるという: $\forall \varepsilon > 0, (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(2) 次で定義される $\overline{A}$ を A の **閉包** と呼ぶ: $\overline{A} := \{x \in \mathbb{R} \mid x$ は A の触点 $\}$.

例 6.2. 次が成り立つ:

(1) $1 \in \overline{[0,1)}$.

(2) $2 \notin \overline{[0,1)}$.

命題 6.3. $A \subset \mathbb{R}$ とする. 次が成り立つ:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) $(a,b) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $(a,b) \cap A \neq \emptyset$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

例 6.4. 閉包について, 次が成り立つ:

(1) $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(2) $\overline{(a,b)} = \overline{[a,b]} = \overline{[a,b)} = \overline{(a,b]} = [a,b]$.

(3) $\overline{(a,+\infty)} = \overline{[a,+\infty)} = [a,+\infty)$.

(4) $\overline{(-\infty,b)} = \overline{(-\infty,b]} = (-\infty,b]$.

命題 6.5. A が有限集合のとき, 次が成り立つ: $\overline{A} = A$.

命題 6.6. 数列 $\{a_n\}$ が A に含まれ, a に収束するとき, 次が成り立つ: $a \in \overline{A}$.

例 6.7. 閉包について, 次が成り立つ:

(1) $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.

(2) $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

(3) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

7 数学通論 I (2013/04/25): レポート問題 (4)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

問題 7.1. $A \subset \mathbb{R}$ とし, m が A の上限であるとする. このとき $m \in \overline{A}$ を定義に従って示せ.

注意 7.2. 実数 m が A の上限であるとは, 次が成り立つこと:

(i) $\forall a \in A,\ a \leq m$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A : m - \varepsilon < a$.

注意 7.3. 証明を書く際には, 命題 6.6 の証明の書き方を参考にすること.

学生番号 ________________ 氏名 ____________________

8　数学通論 I (2013/05/02): $\mathbb{R}$ の閉集合 (2)

閉集合の定義

定義 8.1. A $(\subset \mathbb{R})$ が <u>**閉集合**</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\overline{A} \subset A$.

例 8.2. 以下は閉集合: $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, 有限集合, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, ...

「閉集合である」ことと「開集合でない」ことは, 全く意味が異なることに注意する. 例えば $\emptyset$, $\mathbb{R}$ は開集合かつ閉集合である. また, $(a,b]$ は開集合でも閉集合でもない.

閉集合の性質

命題 8.3. 次が成り立つ: $\mathbb{R} - \overline{A} = (\mathbb{R} - A)^{\circ}$.

ここで $X - Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$. これを差集合という. 差集合は $X \setminus Y$ と表記することもある. 全集合からの差集合 $\mathbb{R} - A$ を補集合と呼び, A^c と表すこともある.

定理 8.4. A が閉集合であるための必要十分条件は, $\mathbb{R} - A$ が開集合となること.

定理 8.5. $\mathbb{R}$ の閉集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}$ は閉集合.

(2) F_i $(i = 1, \ldots, n)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ も閉集合.

(3) F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

9　数学通論 I (2013/05/02): $\mathbb{R}$ のコンパクト集合 (1)

コンパクト集合の定義

以下では $A \subset \mathbb{R}$ とする．

定義 9.1. $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \subset \mathbb{R} \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合族とする．$\mathfrak{U}$ が A の <u>**開被覆**</u> (<u>**open cover**</u>) とは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, U_λ は開集合,

(ii) $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

例 9.2. 以下は $(0,2)$ の開被覆:

(1) $\{(-1,1),(0,1),(0,3)\}$.

(2) $\{(1/n,2) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(3) $\{\mathbb{R}\}$.

定義 9.3. A が <u>**コンパクト**</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: A の開被覆, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$: $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$.

コンパクト集合の性質

以下では $A, K \subset \mathbb{R}$ とする．コンパクト集合は K で表すことが多い.

定義 9.4. A が <u>**有界**</u> とは, 次が成り立つこと: $\exists a, b \in \mathbb{R}$: $A \subset [a,b]$.

命題 9.5. K をコンパクト集合とする．このとき K は有界閉集合である.

例 9.6. 以下はコンパクト集合ではない:

(1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $(0,+\infty)$, $[0,+\infty)$, $\ldots$

(2) (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $\ldots$

10　数学通論 I (2013/05/02): レポート問題 (5)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

問題 10.1. 二点集合 $K := \{0, 1\}$ がコンパクトであることを, 定義に従って示せ.

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

11　数学通論 I (2013/05/09)

コンパクト集合の性質 (続き)

命題 11.1. 閉区間 $[a, b]$ はコンパクト.

命題 11.2. コンパクト集合内の閉集合はコンパクト. すなわち, K を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合, F を $\mathbb{R}$ 内の閉集合とし, $F \subset K$ が成り立つとすると, F はコンパクト集合である.

定理 11.3. $K \subset \mathbb{R}$ とする. K がコンパクトであるための必要十分条件は, K が有界閉集合となること.

系 11.4. $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合は, 最大値と最小値をもつ.

連続写像の定義

定義 11.5. 写像 $f : X \to Y$ を考える.

(1) $A \subset X$ に対して, 次を f による <u>**像**</u> と呼ぶ: $f(A) := \{f(a) \in Y \mid a \in A\}$.

(2) $B \subset Y$ に対して, 次を f による <u>**逆像**</u> と呼ぶ: $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

定義 11.6. $a \in A \subset \mathbb{R}$ とする. 写像 $f : A \to \mathbb{R}$ が <u>**点 a で連続**</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : f((a - \delta, a + \delta) \cap A) \subset (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

命題 11.7. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が a $(\in \mathbb{R})$ で連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

写像 f を「x を入力したら $f(x)$ が出力されるもの」だと思うと, 連続写像の条件は「入力の誤差を十分小さくすれば, 出力の誤差を十分小さくできる」と言うことができる. 条件の記号を用いると, δ が入力の誤差, ε が出力の誤差.

例 11.8. 次の写像は $x = 0$ で連続: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$.

例 11.9. 次の写像は $x = 0$ で連続でない: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$

定義 11.10. $A \subset \mathbb{R}$ とする. 写像 $f : A \to \mathbb{R}$ が <u>**連続**</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A$, f は a で連続.

12　数学通論 I (2013/05/09): レポート問題 (6)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

問題 12.1. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cx + d$ を考える. ただし $c > 0$ とする. このとき f が連続であることを, 定義に従って示せ.

学生番号 ________________　氏名 ________________________

13　数学通論 I (2013/05/16): $\mathbb{R}$ 上の連続写像 (2)

連続写像の性質

定理 13.1. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O$: 開集合, $f^{-1}(O)$: 開集合.

系 13.2. 連続写像と連続写像の合成は連続. すなわち, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とすると, $g \circ f$ も連続.

系 13.3. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall F$: 閉集合, $f^{-1}(F)$: 閉集合.

命題 13.4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とし, K を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合とする. このとき $f(K)$ はコンパクトである.

系 13.5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とし, K を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合とする. このとき f は K 上で最大値と最小値をもつ.

14 数学通論 I (2013/05/16): レポート問題 (7)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

問題 14.1. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であるための必要十分条件は, 任意の開集合の逆像が開集合となることである. このことを用いて, 次の写像が連続でないことを示せ:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

15　数学通論 I (2013/05/23): ユークリッド空間 (1)

$\mathbb{R}^n$ 上の距離

以下では $x = (x_i) = (x_1, \ldots, x_n)$ のように $\mathbb{R}^n$ の元を表す.

定義 15.1. 次で定義される d を $\mathbb{R}^n$ 上の **標準的な距離** と呼ぶ:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)}.$$

上記の標準的な距離は, $\mathbb{R}^n$ 上のノルムを使って表すこともできる. ここで, $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な内積やノルムは次で定義されていた:

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \quad ||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

命題 15.2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = ||x - y||$.

補題 15.3 (Cauchy-Schwarz の不等式)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle \leq ||x|| \cdot ||y||$.

ちなみにこの両辺を二乗したものを成分で書くと, 次のようになる:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right).$$

命題 15.4. $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離 d は次をみたす:

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) \geq 0$, かつ "$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$".

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$. (これを **三角不等式** と呼ぶ)

定義 15.5. $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ に対して, 次を a における **ε-近傍** と呼ぶ:

$$U(a; \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < \varepsilon\}.$$

16　数学通論 I (2013/05/23): ユークリッド空間 (2)

$\mathbb{R}^n$ 内の開集合

定義 16.1. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

(1) 次が成り立つときに, x $(\in \mathbb{R}^n)$ は A の **内点** であるという: $\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.

(2) 次で定義される A° を A の **内部** と呼ぶ: $A^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ は A の内点 $\}$.

例 16.2. $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $(1,0) \in A^\circ$.

(2) $(2,0) \notin A^\circ$.

命題 16.3. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. 以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.

(2) $U(x;\varepsilon) \subset A$ ならば $U(x;\varepsilon) \subset A^\circ$.

(3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

中間試験事前救済レポート

問題 16.4 (事前レポート問題, 2013/05/30 講義時提出)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する中間試験問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け. ただし, レポートの一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと. 表紙は不要.

(1) 開集合. (2) 閉集合. (3) コンパクト集合. (4) 連続写像.

17　数学通論 I (2013/05/23): レポート問題 (8)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

問題 17.1. $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ とおく. このとき次を示せ: $A \subset A^{\circ}$.

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

18　数学通論 I (2013/05/30): ユークリッド空間 (3)

$\mathbb{R}^n$ 内の開集合 - 続き

例 18.1. 内部について, 以下が成り立つ:

(1) $(\mathbb{R}^n)^\circ = \mathbb{R}^n$, $\emptyset^\circ = \emptyset$.

(2) $U(a;\varepsilon)^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) \leq \varepsilon\}^\circ = U(a;\varepsilon)$.

定義 18.2. A $(\subset \mathbb{R}^n)$ が <u>**開集合**</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.

命題 18.3. A $(\subset \mathbb{R}^n)$ が開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $A = A^\circ$.

例 18.4. 以下は開集合: $U(a;\varepsilon)$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, ...

定理 18.5. $\mathbb{R}^n$ の開集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ は開集合.

(2) O_i $(i = 1, \ldots, n)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ も開集合.

(3) O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ も開集合.

$\mathbb{R}^n$ 内の閉集合

定義 18.6. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

(1) 次が成り立つときに, x $(\in \mathbb{R}^n)$ は A の <u>**触点**</u> であるという: $\forall \varepsilon > 0$, $U(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(2) 次で定義される $\overline{A}$ を A の <u>**閉包**</u> と呼ぶ: $\overline{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ は A の触点 $\}$.

例 18.7. $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $(0,0) \in \overline{A}$.

(2) $(0,-1) \notin \overline{A}$.

命題 18.8. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. 次が成り立つ:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) $U(a;\varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $U(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

例 18.9. 閉包について, 次が成り立つ:

(1) $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(2) $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) \leq \varepsilon\}$ とすると, $\overline{U(a;\varepsilon)} = \overline{A} = A$.

19 数学通論 I (2013/06/06): 中間試験

注意

証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を必ず書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

定義や用語

解答する際には以下の定義などを参考にして良い.

- $x(\in \mathbb{R})$ が $A(\subset \mathbb{R})$ の内点 $:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.
- $x(\in \mathbb{R})$ が $A(\subset \mathbb{R})$ の触点 $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
- 内部 A° とは, A の内点全体の集合. 閉包 $\overline{A}$ とは, A の触点全体の集合.
- $\mathbb{R}^n \supset A$ が開 $:\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$. ただし $U(x;\varepsilon)$ は x の ε-近傍.
- $\mathbb{R}^n \supset A$ が閉 $:\Leftrightarrow \overline{A} = A$.
- $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が A の開被覆 $:\Leftrightarrow$ (i) 全ての U_λ は開, (ii) $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.
- $A(\subset \mathbb{R})$ がコンパクトとは, 任意の開被覆に対して, 有限部分被覆が存在すること.
- 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続 $:\Leftrightarrow$ f は任意の点 $a(\in \mathbb{R})$ で連続.
- 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $a(\in \mathbb{R})$ で連続 $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f((a-\delta, a+\delta)) \subset (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.

問題

[1] A を $\mathbb{R}$ 内の部分集合とする. このとき $\mathbb{R} - \overline{A} \subset (\mathbb{R} - A)^\circ$ を定義に従って示せ. ただしここで $X - Y$ は差集合を表すものとする. (20 点)

[2] 以下の (1), (2) に対して, 正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ. ただし, 反例については例を挙げれば良く, 証明をする必要はない.
(1) $\mathbb{R}^2$ 内の無限個の開集合の和集合は開集合である. (20 点)
(2) $\mathbb{R}^2$ 内の無限個の開集合の共通部分は開集合である. (20 点)

[3] 以下の集合が $\mathbb{R}$ 内で開集合かどうか, 閉集合かどうか, コンパクト集合かどうかを, 解答欄の所定の箇所に○×で答えよ. (20 点, 誤答は減点)
$\{0\}$, $\mathbb{Z}$, $(0,1]$, $[0,+\infty)$.

[4] A, B が共に $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合であるとする. このとき, $A \cup B$ も $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合であることを, 定義に従って示せ. (20 点)

[5] 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であるとする. このとき, $\mathbb{R}$ 内の任意の開集合の f による逆像が開集合であることを, 定義に従って示せ. (20 点)

[6] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.

20　数学通論 I (2013/06/06): レポート問題 (9)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

定義 20.1. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, A が開集合であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.

問題 20.2. $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ とする. このとき, $U(a;\varepsilon)$ が開集合であることを定義に従って示せ.

学生番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

21　数学通論 I (2013/06/13): ユークリッド空間 (4)

以下では特に断らない限り $A \subset \mathbb{R}^n$ であるとする.

$\mathbb{R}^n$ 内の閉集合 - 続き

定義 21.1. A が <u>閉集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\overline{A} \subset A$.

命題 21.2. 次が成り立つ: $\mathbb{R}^n - \overline{A} = (\mathbb{R}^n - A)^\circ$.

定理 21.3. A が閉集合であるための必要十分条件は, $\mathbb{R}^n - A$ が開集合となること.

定理 21.4. $\mathbb{R}^n$ の閉集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ は閉集合.

(2) F_i $(i = 1, \ldots, n)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ も閉集合.

(3) F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

$\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合

定義 21.5. $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \subset \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合族とする. $\mathfrak{U}$ が A の <u>開被覆</u> (<u>**open cover**</u>) であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, U_λ は開集合,

(ii) $A \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

定義 21.6. A が <u>コンパクト</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: A の開被覆, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda : A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$.

定義 21.7. A が <u>有界</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists a \in \mathbb{R}^n$, $\exists R > 0 : A \subset U(a; R)$.

ちなみに A が有界であることは次と同値: $\exists R > 0 : A \subset U(0; R)$.

命題 21.8. A をコンパクト集合とする. このとき A は有界閉集合である.

22　数学通論 I (2013/06/13): レポート問題 (10)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

定義 22.1. $A\ (\subset \mathbb{R}^n)$ が 有界 であるとは, 次が成り立つこと: $\exists a \in \mathbb{R}^n, \exists R > 0 : A \subset U(a; R)$.

問題 22.2. $A\ (\subset \mathbb{R}^n)$ が有界であるとする. このとき, 次を示せ: $\exists R > 0 : A \subset U(0; R)$. ただしここで, $U(0; R)$ の中の 0 は $\mathbb{R}^n$ の零ベクトルを表しているものとする.

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

23　数学通論 I (2013/06/27): ユークリッド空間 (5)

$\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合 (続き)

命題 23.1. 次の集合はコンパクト: $D := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \ (\forall i)\}$.

命題 23.2. コンパクト集合内の閉集合はコンパクト. すなわち, K を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合, F を $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合とし, $F \subset K$ が成り立つとすると, F はコンパクト集合である.

定理 23.3. $K \subset \mathbb{R}^n$ とする. K がコンパクトであるための必要十分条件は, K が有界閉集合となること.

$\mathbb{R}^n$ 上の連続写像

定義 23.4. $a \in \mathbb{R}^n$ とする. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が <u>**点 a で連続**</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : f(U(a;\delta)) \subset U(f(a);\varepsilon)$.

定義 23.5. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が <u>**連続**</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in \mathbb{R}^n$, f は a で連続.

例 23.6. 次の写像は連続: $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$.

定理 23.7. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O$: $\mathbb{R}^m$ 内の開集合, $f^{-1}(O)$: $\mathbb{R}^n$ 内の開集合.

系 23.8. 連続写像と連続写像の合成は連続. すなわち, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ を連続写像とすると, $g \circ f$ も連続.

系 23.9. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall F$: $\mathbb{R}^m$ 内の閉集合, $f^{-1}(F)$: $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合.

命題 23.10. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を連続写像とし, K を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合とする. このとき $f(K)$ は $\mathbb{R}^m$ 内のコンパクトである.

命題 23.11. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対し, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ と表す. このとき, f が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続.

24　数学通論 I (2013/06/27): レポート問題 (11)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

問題 24.1. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が連続であるとする. このとき次を示せ: $\forall O$: $\mathbb{R}^m$ 内の開集合, $f^{-1}(O)$: $\mathbb{R}^n$ 内の開集合.

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

25 数学通論 I (2013/07/04): 距離空間 (1)

距離空間の定義

定義 25.1. X を集合とする．関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が **距離** または **距離関数** であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ かつ "$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$".

(ii) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

条件 (iii) の不等式を **三角不等式**, 集合 X と距離 d の組 (X, d) を **距離空間** と呼ぶ.

例 25.2. 以下は $\mathbb{R}^n$ 上の距離である:

(1) 標準的な距離 $d_{\mathrm{st}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

(2) $d_{\max} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \max \{|x_i - y_i| \mid i = 1, \ldots, n\}$.

命題 25.3. 任意の集合 X に対して, 次で定義される d_∞ は距離である (これを **離散距離** と呼ぶ):

$$d_\infty : X \times X \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & (\text{if } x = y), \\ 1 & (\text{if } x \neq y). \end{cases}$$

命題 25.4. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ とする．このとき $d_A := d|_{A \times A}$ は A 上の距離である (これを **部分距離** と呼ぶ).

定義 25.5. $a \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して, 次を (X, d) の a における **ε-近傍** と呼ぶ:

$$U(a; \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}.$$

上記の ε-近傍は, (X, d) 内のものであることを強調して $U_X(a; \varepsilon)$ と書くこともある．例えば $a \in A \subset X$ のときに, A 上の部分距離 d_A に関する ε-近傍を $U_A(a; \varepsilon)$ と表し, $U_X(a; \varepsilon)$ と区別する．ちなみに, このとき次が成り立つ: $U_A(a; \varepsilon) = U_X(a; \varepsilon) \cap A$.

例 25.6. $\mathbb{R}^2$ 内の ε-近傍に対して, 以下が成り立つ:

(1) d_{st} に関する ε-近傍は, 円の内部の形をしている.

(2) $d_{\max}$ に関する ε-近傍は, 正方形の内部の形をしている.

(3) d_∞ に関する ε-近傍は, 一点集合または全体集合のいずれか.

26　数学通論 I (2013/07/04): 距離空間 (2)

距離空間内の開集合

以下では特に断らない限り (X, d) を距離空間とする.

定義 26.1. $A \subset X$ とする.

(1) 次が成り立つときに, x $(\in X)$ は A の <u>**内点**</u> であるという: $\exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \subset A$.

(2) 次で定義される A° を A の <u>**内部**</u> と呼ぶ: $A^\circ := \{x \in X \mid x$ は A の内点 $\}$.

例 26.2. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. A の $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}})$ に関する内部を $(A^\circ)_{\mathrm{st}}$ とし, $(\mathbb{R}^2, d_{\max})$ に関する内部を $(A^\circ)_{\max}$ で表す. このとき次が成り立つ: $(A^\circ)_{\mathrm{st}} = (A^\circ)_{\max}$.

命題 26.3. $A \subset X$ とする. (X, d) に関する内部について以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.

(2) $U(x; \varepsilon) \subset A$ ならば $U(x; \varepsilon) \subset A^\circ$.

(3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

例 26.4. (X, d) に関する内部について, 以下が成り立つ:

(1) $X^\circ = X$, $\emptyset^\circ = \emptyset$.

(2) $U(a; \varepsilon)^\circ = U(a; \varepsilon)$.

例 26.5. (X, d_∞) に関する内部について, 以下が成り立つ: $\forall A \subset X$, $A^\circ = A$.

定義 26.6. A $(\subset X)$ が <u>**開集合**</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \subset A$.

命題 26.7. A $(\subset X)$ が開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $A = A^\circ$.

定理 26.8. (X, d) の開集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, X は開集合.

(2) O_i $(i = 1, \ldots, n)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ も開集合.

(3) O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ も開集合.

命題 26.9. $A \subset X$ とし, (X, d) から決まる A 上の部分距離を d_A とする. このとき, U が (A, d_A) の開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\exists O : (X, d)$ の開集合 s.t. $U = O \cap A$.

27　数学通論 I (2013/07/04): レポート問題 (12)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

問題 27.1. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. A の $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}})$ に関する内部を $(A^\circ)_{\mathrm{st}}$ とし, $(\mathbb{R}^2, d_{\max})$ に関する内部を $(A^\circ)_{\max}$ で表す. このとき次を示せ: $(A^\circ)_{\max} \subset (A^\circ)_{\mathrm{st}}$.

学生番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

28　数学通論 I (2013/07/04): レポート問題 (13)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

問題 28.1. $X := [0,2)$ とおき, d_X を $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ から決まる部分距離とする. このとき, (X, d_X) に関する $A := [0,1)$ の内部 A° を求めよ. (すなわち, A° がどうなるかを予想し, それを示せ.)

学生番号____________________ 氏名____________________________

29　数学通論 I (2013/07/11): 距離空間 (3)

距離空間内の閉集合

以下 (X,d) を距離空間とする.

定義 29.1. $A \subset X$ とする.

(1) 次が成り立つときに, $x\ (\in X)$ は A の **触点** であるという: $\forall \varepsilon > 0,\ U(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(2) 次で定義される $\overline{A}$ を A の **閉包** と呼ぶ: $\overline{A} := \{x \in X \mid x$ は A の触点 $\}$.

例 29.2. $A := (0,1)$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ に関する閉包に対して, $0 \in \overline{A}$.

(2) $(\mathbb{R}, d_{\infty})$ に関する閉包に対して, $0 \notin \overline{A}$.

命題 29.3. $A \subset X$ とする. 次が成り立つ:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) $U(a;\varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $U(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

例 29.4. 閉包について, 次が成り立つ:

(1) $\overline{X} = X$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(2) $A \subset \mathbb{R}$ とする. $(\mathbb{R}, d_{\infty})$ に関する閉包に対して, $\overline{A} = A$.

定義 29.5. A が (X,d) 内の **閉集合** であるとは, 次が成り立つこと: $\overline{A} \subset A$.

命題 29.6. 次が成り立つ: $X - \overline{A} = (X - A)^{\circ}$.

定理 29.7. A が閉集合であるための必要十分条件は, $X - A$ が閉集合となること.

定理 29.8. (X,d) 内の閉集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, X は閉集合.

(2) $F_i\ (i = 1, \ldots, n)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ も閉集合.

(3) $F_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

30　数学通論 I (2013/07/11): 距離空間 (4)

距離空間内のコンパクト集合

以下 (X, d) を距離空間とし, $A \subset X$ とする.

定義 30.1. $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の部分集合族とする. $\mathfrak{U}$ が A の **開被覆** (**open cover**) であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, U_λ は開集合,

(ii) $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

定義 30.2. A が (X, d) 内の **コンパクト部分集合** であるとは, 次が成り立つこと:

$$\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} : A \text{ の開被覆}, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}.$$

例 30.3. $A := [0, 1]$ に対して以下が成り立つ:

(1) A は $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内のコンパクト部分集合.

(2) A は $(\mathbb{R}, d_\infty)$ 内のコンパクト部分集合ではない.

命題 30.4. A が有限集合ならば, コンパクト部分集合である.

定義 30.5. (X, d) が **コンパクト** であるとは, X が (X, d) 内のコンパクト部分集合となること.

命題 30.6. A が (X, d) 内のコンパクト部分集合であることと, 次は同値: 部分距離を入れた距離空間 (A, d_A) がコンパクトである.

定義 30.7. A が **有界** であるとは, 次が成り立つこと: $\exists a \in A$, $\exists R > 0 : A \subset U(a; R)$.

命題 30.8. A を (X, d) 内のコンパクト部分集合とする. このとき A は有界閉集合である.

例 30.9. $(\mathbb{R}, d_\infty)$ に関して, $\mathbb{R}$ は有界閉集合だが, コンパクトではない.

命題 30.10. コンパクト集合内の閉集合はコンパクト.

期末試験事前救済レポート

問題 30.11 (事前レポート問題, 2013/07/25(木) 講義時提出)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する期末問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け. ただし, レポートの一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと. 表紙は不要.

(1) 距離. (2) 開集合. (3) 閉集合. (4) コンパクト. (5) 連続写像.

31　数学通論 I (2013/07/11): レポート問題 (14)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

問題 31.1. d_∞ を X 上の離散距離とし, A を (X, d_∞) 内のコンパクト部分集合とする. このとき A は有限集合であることを示せ.

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

32　数学通論 I (2013/07/25): 距離空間 (5)

以下 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする.

距離空間上の連続写像

定義 32.1. $a \in X$ とする. 写像 $f : X \to Y$ が <u>**点 a で連続**</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $f(U_X(a;\delta)) \subset U_Y(f(a);\varepsilon)$.

定義 32.2. 写像 $f : X \to Y$ が <u>**連続**</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in X$, f は a で連続.

定理 32.3. 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O$: (Y, d_Y) の開集合, $f^{-1}(O)$: (X, d_X) の開集合.

例 32.4. 次は連続写像:

(1) 定値写像, すなわち $y_0 \in Y$ に対して次で決まる写像: $f : X \to Y : x \mapsto y_0$.
(2) $X := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に $\mathbb{R}$ の標準的な距離の部分距離を入れたとき, $f : X \to \mathbb{R} : x \mapsto x/|x|$.
(3) X に離散距離 d_∞ を入れたとき, 任意の写像 $f : X \to Y$.

命題 32.5. 連続写像と連続写像の合成は連続.

命題 32.6. 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall F$: (Y, d_Y) の閉集合, $f^{-1}(F)$: (X, d_X) の閉集合.

命題 32.7. $f : X \to Y$ を連続写像とし, K を (X, d_X) のコンパクト部分集合とする. このとき $f(K)$ は (Y, d_Y) のコンパクト部分集合である.

命題 32.8. 連続写像の制限は連続. すなわち, $f : X \to Y$ を連続写像とし, A を X の部分集合とすると, 制限写像 $f|_A : A \to Y$ は部分距離 d_A に関して連続.

定義 32.9. 写像 $f : X \to Y$ が <u>**同相写像**</u> とは以下が成り立つこと:

(i) f : 全単射.
(ii) f : 連続.
(iii) f^{-1} : 連続.

例 32.10. 恒等写像を id で表す. このとき以下が成り立つ:

(1) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}^2, d_{\max})$ は同相写像.
(2) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}, d_\infty)$ は同相写像でない.

33　数学通論 I (2013/07/25): レポート問題 (15)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

問題 33.1. 恒等写像 $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}, d_{\infty})$ が同相写像でないことを示せ.

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

34 数学通論 I (2013/08/01): 期末試験

注意

証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を必ず書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

定義や用語

解答する際には以下の定義などを参考にして良い.

- x が A の内点 $:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.
- x が A の触点 $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, U(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
- A が開 $:\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.
- $A(\subset X)$ 上の部分距離 $d_A := d|_{A\times A}$.
- $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が A の開被覆 $:\Leftrightarrow$ (i) 全ての U_λ は開, (ii) $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.
- A が (X, d) 内のコンパクト部分集合 $:\Leftrightarrow$ 任意の開被覆に対して, 有限部分被覆が存在.
- (X, d) がコンパクト距離空間 $:\Leftrightarrow$ X が (X, d) 内のコンパクト部分集合.
- 写像 $f : X \to Y$ が連続 $:\Leftrightarrow$ f は任意の点 $a(\in X)$ で連続.
- 写像 $f : X \to Y$ が $a(\in X)$ で連続 $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(U_X(a;\delta)) \subset U_Y(f(a);\varepsilon)$.

問題

以下では (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする.

[1] $a \in X$, $\varepsilon > 0$ とする. このとき, $U(a;\varepsilon) := \{x \in X \mid d_X(a, x) < \varepsilon\}$ が (X, d_X) 内の開集合であることを定義に従って示せ. (20 点)

[2] $X := [0, 2)$ とし, d_X を $\mathbb{R}$ の標準的な距離から決まる部分距離とする. (X, d_X) に関して, $[0, 1)$ および $(1, 2)$ の内部と閉包を書け. (20 点, 証明不要)

[3] 以下の命題はいずれも正しくない. 反例を挙げよ. (20 点, 証明不要. ただし, どのような集合の上で, どのような距離に関して考えているかを明記すること)

(1) 無限個の閉集合の和集合は閉集合である.

(2) 連続写像によるコンパクト部分集合の逆像はコンパクトである.

[4] A を (X, d_X) 内のコンパクト部分集合とし, d_A を A 上の部分距離とする. このとき, (A, d_A) がコンパクト距離空間であることを定義に従って示せ. (20 点)

[5] 写像 $f : X \to Y$ が次をみたすと仮定する: (Y, d_Y) 内の任意の開集合 O に対して, $f^{-1}(O)$ は (X, d_X) 内の開集合である. このとき, f が連続であることを定義に従って示せ. (20 点)

[6] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.