対称空間論の離散化とカンドル代数

田丸 博士

広島大学

福岡大学微分幾何研究会
2014/11/01

Abstract

カンドル (quandle):

- 結び目の研究に現れる代数系 (集合 + 二項演算).
- 対称空間 $\Rightarrow$ カンドル.

Theme

カンドルの構造理論を, 対称空間論を参考にして作れ.
($\leftrightarrow$ 離散的な対称空間論を作れ.)

§1: Introduction: カンドル入門
§2: Preliminary: カンドルの基礎
§3: Result 1: 二点等質カンドル
§4: Result 2: 平坦カンドル

Introduction - (1/5)

Def. (Joyce (1982))

X : 集合, $* : X \times X \to X$: 二項演算.
このとき $(X, *)$ が **カンドル**
$:\Leftrightarrow$ (Q1) $\forall x \in X,\ x * x = x$.
(Q2) $\forall x, y \in X,\ \exists! z \in X : z * y = x$.
(Q3) $\forall x, y, z \in X,\ (x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

Introduction - (2/5)

- $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ を **結び目**.
- 結び目 K = 射影図 $[K]$ / Reidemeister 変形.

Def.

K : 有向結び目, $(X, *)$: カンドルとする.
写像 $[K] \to X$ が **カンドル彩色**
$:\Leftrightarrow$ 交点の情報とカンドルの演算が "適合".

Fact

カンドル彩色は Reidemeister 変形で不変
((Q1), (Q2), (Q3) が Reidemeister (I), (II), (III) に対応).
よって特に, その個数は結び目の不変量.

Introduction - (3/5)

カンドルの条件 (再掲)

(Q1) $\forall x \in X,\ x * x = x.$

(Q2) $\forall x, y \in X,\ \exists ! z \in X :\ z * y = x.$

(Q3) $\forall x, y, z \in X,\ (x * y) * z = (x * z) * (y * z).$

Prop.

X: 集合, $s : X \to \mathrm{Map}(X, X) : x \mapsto s_x$ とする.
$* : X \times X \mapsto X : (y, x) \mapsto s_x(y)$ がカンドル構造

$\Leftrightarrow$ (S1) $\forall x \in X,\ s_x(x) = x.$

(S2) $\forall x \in X,\ s_x$ は全単射.

(S3) $\forall x, y \in X,\ s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x.$

Introduction - (4/5)

以下, カンドルを (X, s) で表す. ($s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$)

Prop. (Joyce (1982))

連結リーマン対称空間はカンドル.

証明の概略

(S3) $\Leftrightarrow s_x \circ s_y \circ s_x^{-1} = s_{s_x(y)}$.
両辺とも, $s_x(y)$ を固定, その点での微分 $= -\mathrm{id}$.

Fact

アフィン対称空間, k-対称空間もカンドル.

Introduction - (5/5)

Example

(X, s) は $s_x := \mathrm{id}_X$ ならばカンドル (自明カンドル).

Example

次の (X, s) はカンドル (二面体カンドル):

- $X := \{p_1, \ldots, p_n : S^1$ 上の n 等分点$\}$,
- $s_x :=$ [中心軸 ox に関する折り返し].

Example

次の (X, s) はカンドル (正四面体カンドル):

- $X := \{p_1, p_2, p_3, p_4 :$ 正四面体の頂点$\}$,
- $s_x :=$ [x を上から見て左向きに 120° 回転].

Preliminary - (1/6)

この章の目標

“等質” カンドル $\leftrightarrow (G, K, \sigma)$: “対称対のようなもの”

Preliminary - (2/6)

この章の目標

"**等質**" カンドル $\leftrightarrow (G, K, \sigma)$: "対称対のようなもの"

Def.

$f : (X, s^X) \to (Y, s^Y)$ が **準同型**

$:\Leftrightarrow \ \forall x \in X,\ f \circ s^X_x = s^Y_{f(x)} \circ f.$

Def.

同型 $:\Leftrightarrow$ 準同型かつ全単射.

Prop.

$\forall x \in X,\ s_x : X \to X$ は自己同型写像.

Preliminary - (3/6)

$s_x \in \mathrm{Aut}(X, s)$.

Def.

- $\mathrm{Inn}(X, s) := \langle \{ s_x \mid x \in X \} \rangle$ を **内部自己同型群**.
- (X, s) が **連結** $:\Leftrightarrow \mathrm{Inn}(X, s) \curvearrowright X$ が推移的.
- (X, s) が **等質** $:\Leftrightarrow \mathrm{Aut}(X, s) \curvearrowright X$ が推移的.

Example

- R_n (二面体カンドル) は等質.
- R_n (二面体カンドル) が連結 $\Leftrightarrow$ n が奇数.

Preliminary - (4/6)

この章の目標

等質カンドル $\leftrightarrow$ (G, K, σ) : "対称対のようなもの"

Def.

(G, K, σ) が カンドル組

$:\Leftrightarrow$ G は群, K は G 内の部分群, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$,

$K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$.

Preliminary - (5/6)

この章の目標

等質カンドル $\leftrightarrow (G, K, \sigma)$: カンドル組

Prop.

(1) (X, s) が等質カンドル

$\Rightarrow$ $G := \mathrm{Aut}(X, s)$, $K := G_x$, $\sigma(g) := s_x \circ g \circ s_x^{-1}$

とすると (G, K, σ) はカンドル組.

(2) (G, K, σ) がカンドル組

$\Rightarrow$ $X := G/K$ (with 原点 o) は,

$s_o([h]) := [\sigma(h)]$ を G-作用で "ばらまく" と,

等質なカンドルとなる.

Preliminary - (6/6)

$Q(G, K, \sigma)$: カンドル組から作られるカンドル.

Example

$Q(G, K, \mathrm{id})$ は自明カンドル.

Example

$Q(\mathbb{Z}_n, \{0\}, -\mathrm{id})$ は二面体カンドル.

- 注意: $L_{n-1}([x]) := [(n-1)x] = [-x] = -\mathrm{id}([x])$.

Result 1 - (1/7)

主結果 1 (T., Iwanaga, Vendramin, Wada)

(X, s) : "二点等質" な有限カンドル
$\Leftrightarrow$ $(X, s) \cong$ "ある種の Alexander カンドル".

主結果 1 (再掲)

二点等質 有限カンドル $\Leftrightarrow$ ある Alexander カンドル.

Def. (T. (2013))

カンドル (X, s) が 二点等質

:$\Leftrightarrow$ 相異なる二点の組が内部自己同型で移り合う

i.e. $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X \ (x_1 \neq x_2, \ y_1 \neq y_2)$,
$\exists f \in \mathrm{Inn}(X, s) : (f(x_1), f(x_2)) = (y_1, y_2)$.

Recall

$\mathrm{Inn}(X, s) := \langle \{ s_x \mid x \in X \} \rangle$: 内部自己同型群.

Result 1 - (3/7)

補足

連結リーマン多様体 (M, g) が 二点等質

:$\Leftrightarrow$ 等距離にある二点の組が等長変換で移り合う

$\Leftrightarrow$ (M, g) : isotropic

$(\forall x \in M, \mathrm{Isom}(M, g)_x \curvearrowright T_x M$: 単位球に推移的$)$

$\Leftrightarrow$ $(M, g) \cong \mathbb{R}^n$ or 階数 1 対称空間.

二点等質なカンドルは,

- 二点等質なリーマン多様体の類似物.
- よって "階数 1 対称空間" の類似物とも思える.

Result 1 - (4/7)

二点等質なリーマン多様体は, 固定部分群の作用で特徴付けられた.

Prop. (T. (2013))

(X, s) : カンドルが二点等質
$\Leftrightarrow \forall x \in X$, $\mathrm{Inn}(X, s)_x \curvearrowright X \setminus \{x\}$ は推移的.

Example

- R_3 (位数 3 の二面体カンドル) は二点等質.
- R_n $(n \geq 4)$ は二点等質でない.
- 正四面体カンドルは二点等質.

Result 1 - (5/7)

主結果 1 (再掲)

二点等質有限カンドル $\Leftrightarrow$ ある **Alexander カンドル**.

Recall

G : 群, $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$

$\Rightarrow$ $(G, \{e\}, \varphi)$: カンドル組

$\Rightarrow$ $Q(G, \varphi) := Q(G, \{e\}, \varphi)$: カンドル.

Def.

上記の $Q(G, \varphi)$ が **Alexander カンドル**

$:\Leftrightarrow$ G : 可換群.

Result 1 - (6/7)

主結果 1 (T., I., V., W.) 詳細版

(X, s) : 二点等質な有限カンドル

$\Leftrightarrow$ $(X, s) \cong Q(\mathbb{F}_q, L_a)$,

ただし $\mathbb{F}_q$: 位数 q の有限体, a は $\mathbb{F}_q$ の原始根.

役割分担 (?)

- T. (2013): $\#X$ が素数の場合の分類.
- Iwanaga (修論 2013): $\#X$ が 素数^2 の場合の分類.
- Vendramin (in press): 二点等質 $\Rightarrow$ $\#X$ は素数冪.
- Wada (in preparation): $\#X$ が素数冪の場合の分類.

Result 1 - (7/7)

補足

なぜ原始根が関係するのか？

Prop.

$Q(\mathbb{F}_q, L_a)$ $(a \in \mathbb{F}_q)$ について以下が成り立つ:

- 固定部分群 $G_0 = \langle s_0 \rangle = \langle L_a \rangle$.
- $(G_0).1 = \{(L_a)^k(1)\} = \{1, a, a^2, a^3, \ldots\}$.
- よって, $G_0 \curvearrowright \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$: 推移的 $\Leftrightarrow$ a が原始根.

Result 2 - (1/4)

主結果 2 (Ishihara-T.)

(X, s) : 平坦な有限カンドル

$\Leftrightarrow \exists q_1, \ldots, q_n$: 奇素数冪 s.t. $(X, s) \cong R_{q_1} \times \cdots \times R_{q_n}$.

Result 2 - (2/4)

主結果 2 (再掲)

平坦 な有限カンドル $\Leftrightarrow$ R_{q_i} の直積.

定義

連結カンドル (X, s) が 平坦

$:\Leftrightarrow$ $G^0(X, s) := \langle \{ s_p \circ s_q \mid p, q \in X \} \rangle$ が可換.

復習 (cf. Loos の本)

連結リーマン対称空間 (M, g) が平坦 (i.e., 曲率 $\equiv 0$)

$\Leftrightarrow$ $G^0(M, g) := \langle \{ s_p \circ s_q \mid p, q \in M \} \rangle$ が可換.

Result 2 - (3/4)

主結果 2 (再掲)

平坦 な有限カンドル $\Leftrightarrow$ R_{q_i} の直積.

Example

S^1 は (リーマン多様体としてもカンドルとしても) 平坦. このとき,

- $\mathrm{Isom}(S^1) = \mathrm{O}(2) = \mathrm{Inn}(S^1)$.
- $\mathrm{Isom}^0(S^1) = \mathrm{SO}(2) = G^0(S^1)$.

Example

二面体カンドル R_n (n : 奇数) は平坦.
(n が偶数のときは連結でないので除外.)

Result 2 - (4/4)

主結果 2 (再掲)

(X, s) : 平坦な有限カンドル

$\Leftrightarrow$ $\exists q_1, \ldots, q_n$: 奇素数冪 s.t. $(X, s) \cong R_{q_1} \times \cdots \times R_{q_n}$.

証明の方針 ($\Rightarrow$)

(X, s) : 平坦な有限カンドルとする.

(Step 1) $G^0(X, s)$: 有限可換群.

(Step 2) $(X, s) \cong Q(\mathbb{Z}_{q_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q_n}, \varphi)$

(Step 3) φ がどうなるかを調べる.

Further Plans

Theme

カンドルに対して, 対称空間論の類似を作る.

Results

- 二点等質カンドルの定式化, 有限な場合の分類.
- 平坦カンドルの定式化, 有限な場合の分類.

Further Plans

- 極大平坦部分カンドルの共役性？
- "階数" の概念が定義できる？
- 二点等質性と階数との関連？
- 有限ではなく, 無限離散カンドルだと？

Thank you!