

# 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part I \*

田丸 博士<sup>†</sup> (広島大学大学院理学研究科)

## 概要

カンドル (quandle) は, Joyce によって導入された代数系であり, 主として結び目の研究に用いられてきた. 我々の研究テーマは, カンドルを離散的な対称空間と考えて, その構造理論を構築することである. 本稿では, 我々の研究の解説の Part I として, 等質なカンドルと “対称対のカンドル版” が対応することを紹介する.

## 1 カンドル入門

カンドルは, Joyce ([4]) によって 1982 年に導入された代数系である. ここでは, その定義と周辺の状況について簡単に述べる. まずは天下りに定義を述べる.

**定義 1.1** (Joyce ([4])).  $X$  を集合とし, 二項演算  $*$  :  $X \times X \rightarrow X$  を考える. このとき  $(X, *)$  がカンドルとは, 以下が成り立つこと:

$$(Q1) \quad \forall x \in X, x * x = x.$$

$$(Q2) \quad \forall x, y \in X, \exists! z \in X : z * y = x.$$

$$(Q3) \quad \forall x, y, z \in X, (x * y) * z = (x * z) * (y * z).$$

本稿の題目ではカンドル代数という言葉を使っているが, 代数系であることが明示的に分かるように付けている, という以上の意味はない. 以下では, カンドル代数という言葉は使わず, 単にカンドルと呼ぶことにする.

また, カンドルという名前を付けたのは Joyce だが, 同等な概念や関連する概念はいくつか独立に知られていたことに注意しておく. 例えば, 高崎 ([7]) によって 1943 年に導入された 壺 (kei) という概念は, カンドルの特別な場合に相当する. これら関連する事項や歴史については, Carter による概説 [1] に詳しく記載されている.

---

\* 福岡大学微分幾何研究会 (2014) 報告集

<sup>†</sup> tamaru@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

カンドルは、結び目の研究の過程で導入されたものである。実際、(Q1), (Q2), (Q3) は、古典的な結び目 ( $\mathbb{R}^3$  内に埋め込まれた  $S^1$ ) のライデマイスター変形 (I), (II), (III) にそれぞれ対応したものである。例えば、結び目  $K$  の射影図 (すなわち適当な  $\mathbb{R}^2$  への射影) を  $[K]$  とし、 $(X, *)$  をカンドルとする。このとき、写像  $[K] \rightarrow X$  がカンドル彩色であるとは、全ての交点で、その情報とカンドルの演算  $*$  が“ある関係”をみたすことを言う。このとき、カンドル彩色がライデマイスター変形で不変なことが、カンドルの公理 (Q1), (Q2), (Q3) から従う。よってカンドル彩色は (例えばその個数は) 結び目の不変量となる。詳細については、鎌田による本 [5] を参照して頂きたい。

上記のことから、カンドルを与えると、結び目の不変量が作られる (上では彩色数についてしか触れていないが、それ以外にもいろいろある)。当然ながら、カンドルが簡単過ぎると情報量が少なく、カンドルが複雑だと計算不可能になる。まず計算可能性の観点から、カンドルは有限であることが望ましい。その上で、さらに付加的な良い条件をみたすもの、あるいは“適度な複雑さ”を持ったものを探す、ということが問題になる。

我々の研究は、カンドルを離散的な対称空間と考えると、対称空間論の道具やアイデアを用いて、カンドルの構造を調べて行こう、というものである。このことは、対称空間論に異なる視点を与えるものとしても興味深いと思われる。(構築される理論は、多様体もリー群も登場しないので、対称空間論への入門として良い題材になると考えている。) さらに、我々の研究により“良い”カンドルが体系的に供給されたとすると、上記のような結び目の研究に応用を持つ可能性もある。

## 2 カンドルと対称空間

この章では、対称空間はカンドルであることを紹介する。そのために、カンドルの定義を対称空間風に言い換える。また、それを用いて、いくつかの基本的な例を紹介する。

### 2.1 カンドルの再定式化

ここではまず、二項演算を各点に写像を与える対応に置き換えることにより、カンドルの条件を言い換える。次は定義から容易に確かめられる。

**命題 2.1.**  $X$  を集合とし、写像  $s : X \rightarrow \text{Map}(X, X) : x \mapsto s_x$  を考え、対応する二項演算を  $* : X \times X \mapsto X : (y, x) \mapsto s_x(y)$  で表す。このとき、 $(X, *)$  がカンドルであるための必要十分条件は、以下が成り立つこと:

$$(S1) \quad \forall x \in X, s_x(x) = x.$$

(S2)  $\forall x \in X, s_x$  は全単射.

(S3)  $\forall x, y \in X, s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$ .

以下では, 対応  $s : X \rightarrow \text{Map}(X, X)$  を用いて, カンドルを  $(X, s)$  で表すことにする. また, このときの  $s$  をカンドル構造と呼ぶ. このような定式化をすると, 対称空間と関連することは自然に思える. 実際, 以前から次が知られていた.

**命題 2.2** (Joyce ([4])). 連結リーマン対称空間はカンドルである.

証明. 連結リーマン対称空間  $M$  に対して, (S1), (S2) が成り立つことは定義から明らか. また, (S3) を示すためには, 次を示せば良い:

$$s_x \circ s_y \circ s_x^{-1} = s_{s_x(y)}. \quad (2.1)$$

この式の両辺は, 等長変換であり,  $s_x(y)$  を固定し, その点での微分が  $-\text{id}$  となる. 従って,  $M$  は連結なので, 上記の式が示される.  $\square$

従って, カンドルは対称空間の一般化である. 特にカンドルは, 対称空間の点対称だけを抽出し, リーマン多様体としての構造や位相構造などを全て忘れたもの (すなわち離散化したもの) だと考えることができる.

## 2.2 カンドルの例

ここではカンドルの典型的な例を紹介する. 典型的な例は, 対称空間から来るものが多いが, そうではない例もあることに注意する.

**例 2.3.**  $(X, s)$  は  $s_x := \text{id}_X$  ならばカンドルである. これを **自明カンドル** と呼ぶ.

**例 2.4.**  $\mathbb{R}^n$  とし,  $x, y \in \mathbb{R}^n$  に対して  $s_x(y) := 2x - y$  と定める (これを  $\mathbb{R}^n$  の **通常**の点対称 と呼ぶ). このとき  $(\mathbb{R}^n, s)$  はカンドルである.

この例が (S3) をみたすことを確かめるのは, 学部生向けの演習問題. 図を描いて確かめても良いし, 点対称の式を用いて計算で確かめても良い.

**例 2.5.**  $G$  を群とし,  $g, h \in G$  に対して  $s_g(h) := gh^{-1}g$  と定める (これを **群構造**から決まる点対称 と呼ぶ). このとき  $(G, s)$  はカンドルである.

ここで紹介した群上のカンドル構造は, リー群を対称空間と見るときの点対称と同じである (単位元  $e$  に対して  $s_e(h) = h^{-1}$  とし, それ以外の点での点対称は  $s_e$  を左移動でば

ら撒いたもの、と考えると分かりやすい). ちなみに、 $\mathbb{R}^n$  の加法群としての構造から決まるカンドル構造は、 $\mathbb{R}^n$  上の通常の点対称と一致する.

**例 2.6.**  $S^1$  を  $\mathbb{R}^2$  内の原点  $o$  中心の単位円とし、 $x \in S^1$  に対して、 $s_x$  を直線  $ox$  に関する折り返しとする. このとき  $(S^1, s)$  はカンドルである.

この点対称は、 $S^1$  をリーマン対称空間とする際に用いられるものと一致する. また、 $S^1$  と  $SO(2)$  と同一視すると、群構造から決まる点対称とも一致する.

**例 2.7.**  $X$  を  $S^1$  上の  $n$  等分点の集合とし、 $x \in X$  に対して  $s_x$  を上記の  $S^1$  上の点対称の制限とする. このとき  $(X, s)$  はカンドルである (これを 二面体カンドル と呼び、 $R_n$  で表すことが多い).

ここまでで挙げた例は、基本的に対称空間から得られていたので、全て  $s_x^2 = \text{id}$  をみたしていた. しかし、そうではないカンドルも当然ながら存在する.

**例 2.8.**  $X := \{1, 2, 3, 4\}$  とし、 $s$  を以下の巡回置換で定めると、 $(X, s)$  はカンドルである (これを 正四面体カンドル と呼ぶ):

$$s_1 := (234), s_2 := (143), s_3 := (124), s_4 := (132). \quad (2.2)$$

正四面体カンドルは、正四面体の頂点集合に、 $s_x$  を所定の向きに  $120^\circ$  回転させる変換で定義したものとも考えることもできる. (カンドルの公理をみたすためには、全体の回転の方向に整合性があることが必要.)

### 3 等質カンドルとカンドル組

この章では、等質カンドル  $(X, s)$  と、カンドル組  $(G, K, \sigma)$  が対応することを紹介する. カンドル組とは、大雑把に言うと、対称空間論に登場する“対称対”のカンドル版である. この対応について、限定的な結果については [4] にも書かれているが、ここで述べる内容がこのような形で書かれている論文を少なくとも著者は知らない. 従って、対称空間論を知っていると当たり前の内容ではあるのだが、紹介する価値はあると思われる.

#### 3.1 等質カンドルと連結カンドル

ここでは、カンドルに対して等質性と連結性を定義する. 以下、 $(X, s)$ ,  $(X, s^X)$ ,  $(Y, s^Y)$  はカンドルを表すものとする.

**定義 3.1.** 写像  $f : (X, s^X) \rightarrow (Y, s^Y)$  が準同型であるとは、次が成り立つこと:  $\forall x \in X, f \circ s_x^X = s_{f(x)}^Y \circ f$ .

すなわち準同型写像とは、ざっくり言うと“点对称と可換”な写像である。ちなみに、カンドル構造を二項演算  $*$  で書いた場合には、準同型写像とは二項演算  $*$  を保つ写像に他ならない。

**定義 3.2.** カンドル間の写像が同型であるとは、全単射かつ準同型であること。

ちなみに、全単射かつ準同型ならば、逆写像も準同型になる。さらに、準同型と準同型の合成が準同型になることも、容易に確かめられる。従って、カンドル上の自己同型写像全体は群を成す。

**定義 3.3.**  $(X, s)$  をカンドルとする。このとき、

- (1)  $\text{Aut}(X, s) := \{f : X \rightarrow X : \text{同型写像}\}$  を  $(X, s)$  の自己同型群と呼ぶ。
- (2)  $(X, s)$  が等質とは、 $\text{Aut}(X, s)$  が  $X$  に推移的に作用すること。

ここで、等質より弱い条件として、カンドルの連結性を定義する。そのために必要となるのは、次の観察である。命題 2.1 の条件 (S2), (S3) から、次が直ちに従う。

**命題 3.4.**  $\forall x \in X, s_x \in \text{Aut}(X, s)$ .

これを踏まえて、自己同型群に含まれる別の変換群を考える。

**定義 3.5.**  $(X, s)$  をカンドルとする。このとき、

- (1)  $\text{Inn}(X, s) := \langle \{s_x \mid x \in X\} \rangle$  を  $(X, s)$  の内部自己同型群と呼ぶ。
- (2)  $(X, s)$  が連結とは、 $\text{Inn}(X, s)$  が  $X$  に推移的に作用すること。

定義より、連結ならば等質である。逆は成り立つとは限らない。すなわち、 $\text{Inn}(X, s) \subsetneq \text{Aut}(X, s)$  となる例も存在する。最も簡単な例は次のものであろう。

**例 3.6.**  $(X, s)$  を自明カンドルとする。このとき、 $X$  から  $X$  への任意の全単射は自己同型なので、 $(X, s)$  は等質。一方で  $\text{Inn}(X, s)$  は単位元だけの群なので、 $(X, s)$  は ( $\#X = 1$  の場合を除いて) 連結でない。

少しだけ非自明な例として、二面体カンドルの場合を考える。証明は、きちんと書くのは多少面倒だが、図形的に感触を掴むだけなら難しくない。

例 3.7. 二面体カンドル  $R_n$  について以下が成り立つ:

- (1)  $R_n$  は常に等質.
- (2)  $R_n$  が連結であるための必要十分条件は,  $n$  が奇数となること.

### 3.2 カンドル組との対応

ここでは, カンドル組  $(G, K, \sigma)$  について, その定義を述べ, 等質なカンドルとの対応について紹介する. まずは定義を述べる.

定義 3.8.  $G$  を群,  $K$  を  $G$  内の部分群とし,  $\sigma \in \text{Aut}(G)$  とする. このとき  $(G, K, \sigma)$  がカンドル組とは, 次が成り立つこと:  $K \subset \text{Fix}(\sigma, G)$ .

ここで  $\text{Fix}(\sigma, G)$  は,  $\sigma$  による固定点集合を表す. 等質なカンドルとカンドル組が対応することを, 次の定理でまとめて述べておく.

定理 3.9. 等質なカンドルとカンドル組は以下の意味で対応する:

- (1)  $(G, K, \sigma)$  をカンドル組とする. このとき,  $X := G/K$  とおき,  $s$  を次で定めると,  $(X, s)$  は等質なカンドルとなる:

$$s_{[g]}([h]) := [g\sigma(g^{-1}h)].$$

- (2) 逆に, 全ての等質なカンドルは, 同型を除いて (1) の方法で得られる.

証明. まずは (1) についてのみ, 証明の概略を述べる. まず, 上記の  $s_{[g]}([h])$  が well-defined であることは, カンドル組の条件  $K \subset \text{Fix}(\sigma, G)$  から従う. カンドルの条件については, (S1), (S3) は直接計算で確かめられる. (S2) は,  $s_{[g]}$  の逆写像が次で与えられることから示される:

$$(s_{[g]})^{-1}([h]) = [g\sigma^{-1}(g^{-1}h)]. \quad (3.1)$$

最後に, カンドル  $(X, s)$  が等質であることは,  $G$  の  $X = G/K$  への自然な作用が自己同型となることから分かる.  $\square$

ここから, 上記の定理 3.9 (2) を示していく. そのために, まずは等質なカンドルからカンドル組を構成する.

**命題 3.10.**  $(X, s)$  を等質なカンドルとする. このとき, 各  $x \in X$  に対して, 以下で定義される  $(G, K, \sigma)$  はカンドル組である:

$$G := \text{Aut}(X, s), \quad K := \{g \in G \mid g.x = x\}, \quad \sigma(g) := s_x \circ g \circ s_x^{-1}.$$

証明.  $K \subset \text{Fix}(\sigma, G)$  を示せば良い. 任意に  $g \in K$  をとる. すると,  $g$  が準同型であること,  $x$  を固定することを順に用いると,

$$g \circ s_x = s_{g.x} \circ g = s_x \circ g. \quad (3.2)$$

これを  $\sigma$  の定義に代入すると,  $\sigma(g) = g$  が従う.  $\square$

最後に, 上記のカンドル組から構成されるカンドルが, 元のカンドル  $(X, s)$  と同型になることを示せば, 定理 3.9 (2) の証明が完了する.

**命題 3.11.**  $(X, s)$  を等質なカンドルとし,  $(G, K, \sigma)$  を命題 3.10 で定義したカンドル組とする. このとき  $(X, s)$  は,  $(G, K, \sigma)$  から定理 3.9 (1) の方法で構成されるカンドルと同型である.

証明. 証明の方針を述べる.  $(G, K, \sigma)$  から定理 3.9 (1) の方法で構成されるカンドルを  $(G/K, s')$  と表す. このとき  $(G/K, s')$  と  $(X, s)$  が同型であることを示せば良い. ここで定義より,  $G := \text{Aut}(X, s)$  であり,  $K$  はある点  $x \in X$  での固定部分群だった. この  $x \in X$  を用いて, 次の写像を定義する:

$$F : G/K \rightarrow X : [g] \mapsto g.x. \quad (3.3)$$

これが well-defined かつ全単射であることは, 商集合の基本的な演習問題. また,  $F$  が準同型であることは,  $\sigma$  および  $s'$  の定め方を追っていけば, 示すことができる.  $\square$

定理 3.9 の簡単な応用を紹介しよう. まず, リーマン対称対は明らかにカンドル組である. 従って, 定理 3.9 は, リーマン対称空間がカンドルになることの別証明を与えている. また, アフィン対称空間や  $k$ -対称空間を特徴付ける  $(G, K)$  の性質を思い出すと, 次も直ちに従う.

**系 3.12.** アフィン対称空間,  $k$ -対称空間はカンドルである.

### 3.3 カンドル組の例

ここでは, カンドル組および対応するカンドルの例を紹介する. 簡単のため, カンドル組  $(G, K, \sigma)$  から得られるカンドルを  $Q(G, K, \sigma)$  で表すことにする.

例 3.13.  $Q(G, K, \text{id})$  は自明カンドル.

例 3.14.  $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  を  $n$  次巡回群とする. このとき  $Q(\mathbb{Z}_n, \{0\}, -\text{id})$  は二面体カンドル  $R_n$  と同型.

証明.  $R_n$  は  $S^1$  上の正  $n$  等分点の集合だった. その一点を  $0$  に対応させ, そこから反時計回り (時計回りでも可) に順に  $1, 2, \dots, n-1$  を対応させる. これによって全単射  $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow R_n$  が与えられる. この  $f$  が準同型であることは容易に分かる.  $\square$

上記は極めて簡単な例だが, これらだけからでも, 対称空間論において対称対がみだしていた性質のいくつかは, カンドル組に対しては成立しないことが分かる. 例えば,  $(\mathbb{Z}_n, \{0\}, \sigma)$  をカンドル組にする  $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$  は一意ではない ( $\sigma = \pm \text{id}$  どちらでも良い). また, 二面体カンドル  $R_n = Q(\mathbb{Z}_n, \{0\}, -\text{id})$  に対して,  $R_n$  の自己同型群は  $\mathbb{Z}_n$  より真に大きい (少なくとも折り返しがある). これらの観察を, 次の注意にまとめておく.

注意 3.15. カンドル組について, 以下に注意する:

- (1) 与えられた  $(G, K)$  に対して,  $(G, K, \sigma)$  をカンドル組とする  $\sigma \in \text{Aut}(G)$  は一般に一意ではない.
- (2) 与えられた  $\sigma \in \text{Aut}(G)$  に対して,  $(G, K, \sigma)$  をカンドル組とする  $K$  も一般に一意ではない.
- (3) 異なるカンドル組が同型なカンドルを与えることもある (例えば,  $Q(G, K, \sigma) \cong Q(G', K', \sigma')$  としても,  $G$  と  $G'$  は群として同型とは限らない).

等質なカンドルとカンドル組は  $1:1$  に対応している訳ではないが, しかし, カンドル組はカンドルを研究する際に極めて有用な道具である. 実際, 著者および周辺の人々の研究 ([2, 3, 6, 8, 10]) においては, 基本的な役割を果たしている. これらについては, 本稿の続編である [9] において解説したい.

## 謝辞

最後になりましたが, 事前に原稿を読んで有益なコメントを下された久保亮, 石原吉崇の両氏に感謝します. また, 本研究は JSPS 科研費 24654012, 26287012 の助成を受けたものです.

## 参考文献

- [1] Carter, J. S.: *A Survey of Quandle Ideas*, in: *Introductory Lectures on Knot Theory*, Ser. Knots Everything **46** (2012), 22–53.
- [2] Ishihara, Y., Tamaru, H.: *Flat connected finite quandles*, in preparation.
- [3] 岩永 翔: 位数  $p^2$  の two-point homogeneous カンドルの分類, 修士論文, 東京理科大学理工学研究科, 2013/03.
- [4] Joyce, D.: *A classification invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), 37–65.
- [5] 鎌田 聖一: 曲面結び目理論, シュプリンガー現代数学シリーズ, 丸善出版, 2012.
- [6] Kamada, S., Tamaru, H., Wada, K.: *On classification of quandles of cyclic type*, preprint, arXiv:1312.6917.
- [7] 高崎 光久: 対称変換ノ抽象化, 東北数学雑誌 **49** (1943), 145–207.
- [8] Tamaru, H.: *Two-point homogeneous quandles with prime cardinality*, J. Math. Soc. Japan **65** (2013), 1117–1134.
- [9] 田丸 博士: 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part II, 部分多様体論・湯沢 2014 記録集, to appear.
- [10] Wada, K.: *Two-point homogeneous quandles with cardinality of prime power*, preprint.