目次

第 1 章

テンソル代数

この章では, 実線型空間のテンソル積およびテンソル代数を紹介する. ここで述べる内容は, [6] の前半部分の要約である. また, 話を簡単にするために, 有限次元の実線型空間のみを扱う.

1.1 テンソル積

この項を通して, 特に断らない限り V, W, U は有限次元実線型空間を表すものとする. ここでは, 二つの実線型空間のテンソル積を定義し, その性質を見る.

1.1.1 テンソル積の定義

テンソル積の定義を与える前に, 用語を準備する. 線型写像の定義は既知とする.

定義 1.1 $\varphi : V \times W \to U$ が **双線型** であるとは, 以下が成り立つこと: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall v, v' \in V$, $\forall w, w' \in W$,

$$\varphi(av + bv', w) = a\varphi(v, w) + b\varphi(v', w),$$
$$\varphi(v, aw + bw') = a\varphi(v, w) + b\varphi(v, w').$$

テンソル積 $V \otimes W$ は, 荒く言うと, 以下をみたす実線型空間である:

- $\{v \otimes w \mid v \in V,\ w \in W\}$ で張られる.
- $V \times W \to V \otimes W : (v, w) \mapsto v \otimes w$ が双線型.

そこで, 実線型空間 U_0 と双線型写像 $\iota : V \times W \to U_0$ の組 (U_0, ι) で, 所定の性質をみたすものとして, テンソル積を定義する. 所定の性質は, 次と関連する.

2014/07/07 公開. 本稿は「数学概説」の講義ノートとして作成されました.

問題 1.2　$\varphi : V \times W \to U$ を双線型写像, $f : U \to U'$ を線型写像とする. このとき $f \circ \varphi$ は双線型写像であることを示せ.

このような状況のときに, $f \circ \varphi$ は φ によって支配されていると呼ぶ. テンソル積は, $V \times W$ 上の全ての双線型写像を支配するものとして定義される.

定義 1.3　U_0 を実線型空間, $\iota : V \times W \to U_0$ を双線型写像とする. このとき (U_0, ι) が V と W の **テンソル積** であるとは, 次が成り立つこと:

(T)　任意の実線型空間 U, 任意の双線型写像 $\Phi : V \times W \to U$ に対して, 線型写像 $F : U_0 \to U$ が唯一つ存在して, $\Phi = F \circ \iota$.

上記の条件 (T) をテンソル積の **普遍性** と呼ぶ.

定理 1.4　V, W を実線型空間とする. このとき, V と W のテンソル積が存在し, ある意味で一意的である.

存在性は次項で示す. 一意性は, 正確に述べると次のようになる.

命題 1.5　(U_0, ι), (U_0', ι') が (T) をみたすとする. このとき線型同型写像 $F_0 : U_0 \to U_0'$ が存在して, $F_0 \circ \iota = \iota'$.

問題 1.6　命題 1.5 を示せ.

V と W のテンソル積 (U_0, ι) が一意であるので, 改めて $V \otimes W := U_0$ と表すこととする. また, 各 $(v, w) \in V \times W$ に対して $v \otimes w := \iota(v, w)$ と表す.

1.1.2　基底を用いた構成

ここでは, テンソル積を基底を用いて構成する.

命題 1.7　$\{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の基底, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ を W の基底とする. また, $U_0 := \mathbb{R}^{mn}$ とおき, $\iota : V \times W \to U_0$ を双線型写像とする. このとき, もし $\{\iota(v_i, w_j)\}$ が U_0 の基底ならば, (U_0, ι) は V と W のテンソル積である.

この命題の仮定をみたす ι が存在することは容易に分かるので, テンソル積が存在することが従う.

系 1.8　$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$. とくに $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ をそれぞれ V, W の基底とすると, $\{v_i \otimes w_j\}$ は $V \otimes W$ の基底である.

これでテンソル積の次元が分かった. 次は, 次元を用いた判定条件.

補題 1.9 $\iota' : V \times W \to U$ を双線型写像とする. このとき, もし以下が成り立つならば, (U, ι') は V と W のテンソル積である:

(1) $\dim U = \dim V \cdot \dim W$.

(2) U は $\iota'(V \times W)$ で生成される.

1.1.3 基底に依らない構成

ここで次を考える: $\mathrm{Hom}\,(V, W) := \{F : V \to W : \text{線型}\}$. このとき $\mathrm{Hom}\,(V, W)$ は自然に線型空間であり, その次元は $\dim V \cdot \dim W$ と一致する. とくに, $V^* := \mathrm{Hom}\,(V, \mathbb{R})$ を V の **双対空間** と呼ぶ.

命題 1.10 次の $\iota : V^* \times W \to \mathrm{Hom}\,(V, W)$ によって, $V^* \otimes W = \mathrm{Hom}\,(V, W)$:

$$\mathrm{Hom}\,(V, W) \ni \iota(f, w) : V \to W : v \mapsto f(v)w.$$

次に $\mathcal{L}(V, W; \mathbb{R}) := \{\varphi : V \times W \to \mathbb{R} : \text{双線型}\}$ を考える. このとき $\mathcal{L}(V, W; \mathbb{R})$ は自然に線型空間であり, その次元は $\dim V \cdot \dim W$ と一致する.

命題 1.11 次の $\iota : V^* \times W^* \to \mathcal{L}(V, W; \mathbb{R})$ によって, $V^* \otimes W^* = \mathcal{L}(V, W; \mathbb{R})$:

$$\mathcal{L}(V, W; \mathbb{R}) \ni \iota(f, g) : V \times W \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto f(v)g(w).$$

よって, $V^{**} = V$ であったことを思い出すと, 次が得られる.

命題 1.12 $V \otimes W (= V^{**} \otimes W^{**}) = \mathcal{L}(V^*, W^*; \mathbb{R})$.

普遍性に言及する必要がない場合は, これを $V \otimes W$ の定義とする場合もある.

問題 1.13 次で定義される写像 $V \to V^{**} : v \mapsto v^{**}$ が線型同型であることを示せ:

$$v^{**} : V^* \to \mathbb{R} : f \mapsto v^{**}(f) := f(v).$$

1.1.4 商線型空間を用いた構成

商線型空間を用いた構成については, 講義では触れないが, 原稿には載せておく. V_0 を V 内の線型部分空間とする.

補題 1.14 次で定義される $\sim$ は V 上の同値関係である: $v \sim v' :\Leftrightarrow v - v' \in V_0$.

定義 1.15 V を上記の同値関係 $\sim$ で割った商集合を $V/V_0 := V/\sim$ で表し, V の V_0 による **商線型空間** と呼ぶ.

命題 1.16　商線型空間 V/W は次の演算によって線型空間となる:

$$a[v_1] + b[v_2] := [av_1 + bv_2] \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ v_1, v_2 \in V).$$

ここで, $V \times W$ で生成される線型空間を $\mathcal{V}(V \times W)$ とする (すなわち, $V \times W$ の元の一次結合全体の集合). さらに, 次の形の元全体で生成される部分空間を X とする:

$$\begin{aligned}&(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w),\\ &(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2),\\ &(av, w) - a(v, w),\\ &(v, aw) - a(v, w).\end{aligned}$$

ただしここで, $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, $a \in \mathbb{R}$.

命題 1.17　次の ι によって, $V \otimes W = \mathcal{V}(V \times W)/X$:

$$\iota : V \times W \to \mathcal{V}(V \times W)/X : (v, w) \mapsto [(v, w)].$$

1.2　テンソル代数

この項を通して, 特に断らない限り V, $V_1, \ldots, V_n$ は有限次元実線型空間を表すものとする. ここでは, 実線型空間のテンソル代数を定義し, その性質を見る.

1.2.1　高階のテンソル

先の $V \otimes W$ を二階のテンソルという. ここでは n 階のテンソルを定義する.

定義 1.18　U_0 を実線型空間, $\iota : V_1 \times \cdots \times V_n \to U_0$ を多重線型写像とする. このとき (U_0, ι) が $V_1, \ldots, V_n$ の **テンソル積** であるとは, 次が成り立つこと:

(T)　任意の実線型空間 U, 任意の多重線型写像 $\Phi : V_1 \times \cdots \times V_n \to U$ に対して, 線型写像 $F : U_0 \to U$ が唯一つ存在して, $\Phi = F \circ \iota$.

二階のテンソルの場合と同様に, 次が成り立つ.

定理 1.19　$V_1, \ldots, V_n$ のテンソル積が存在し, ある意味で一意的である.

前と同様に, $V_1, \ldots, V_n$ のテンソル積を $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ と表すこととする. また, $v_i \in V_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ に対して, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n := \iota(v_1, \ldots, v_n)$ と表す.

1.2.2 テンソル代数の定義

V の p 個のテンソル積を $T^p(V)$ で表す. すなわち,

$$T^0(V) := \mathbb{R}, \quad T^1(V) := V, \quad T^2(V) := V \otimes V, \ldots$$

定義 1.20 次で定義される $T(V)$ を V の **テンソル代数** と呼ぶ:

$$T(V) := \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(V) := \left\{ \sum_{p=0}^{n} t_p \mid n \in \mathbb{N},\ t_p \in T^p(V) \right\}.$$

テンソル代数 $T(V)$ は代数となる (和・スカラー倍・積をもつ) ことに注意する. 実際, 和とスカラー倍は, 各 $T^p(V)$ が線型空間であることから, 自然に定まる. 積については, $t_p \in T^p(V)$, $t_q \in T^q(V)$ に対して, $t_p \otimes t_q \in T^{p+q}(V)$ を定めることができる. (必要なら基底をとれば良い.) これを双線型に拡張すれば, 次の積が得られる:

$$T(V) \times T(V) \to T(V).$$

1.2.3 テンソル代数の普遍性

テンソル代数の定義から, 各 p に対して $T^p(V) \subset T(V)$ が成り立つ. これを用いて $1 \in \mathbb{R} = T^0(V) \subset T(V)$ とみなす. また $\iota : V(= T^1(V)) \to T(V)$ を包含写像とする.

定理 1.21 A を単位元 e をもつ代数とし, $F : V \to A$ を線型写像とする. このとき $\widetilde{F} : T(V) \to A$ という代数としての準同型写像が一意に存在し, $\widetilde{F}(1) = e$, $\widetilde{F} \circ \iota = F$.

このような性質をテンソル代数の普遍性と呼ぶ. テンソル代数 $T(V)$ はこの普遍性によって特徴付けることもできる.

第 2 章

外積代数

順番的には, テンソル代数を紹介した次には, 外積代数に触れるのが自然であると思われる. しかし, 本稿はクリフォード代数を紹介することを目的とするため, 外積代数の紹介は割愛する. 将来的に加筆する含みを残して, 本章を形だけ入れておく.

第 3 章

クリフォード代数と応用

この章では, クリフォード代数を定義し, その応用の一部を紹介する.

3.1　クリフォード代数

クリフォード代数を定義し, その例と基本的な性質を紹介する.

3.1.1　クリフォード代数の定義

V を有限次元実線型空間とし, $T(V)$ をそのテンソル代数とする. また, $\langle,\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ を対称双線型写像とする. この時点では $\langle,\rangle$ は内積とは限らない.

定義 3.1　$I(V,\langle,\rangle)$ を $\{v\otimes v + \langle v,v\rangle\cdot 1 \mid v\in V\}$ で生成される $T(V)$ 内の両側イデアルとする. このとき次で定義される商代数を **クリフォード代数** と呼ぶ:

$$\mathrm{Cl}\,(V,\langle,\rangle) := T(V)/I(V,\langle,\rangle).$$

各 $v,w\in V$ に対し, $v := [v]$ や $vw := [v\otimes w]$ のように略記することが多い.

例 3.2　$V := \mathbb{R}$ に対し, $\langle x,y\rangle := xy$ と定める. このとき, 以下が成り立つ:

(1)　$\mathrm{Cl}\,(\mathbb{R},\langle,\rangle) \cong \mathbb{C}$.
(2)　$\mathrm{Cl}\,(\mathbb{R},-\langle,\rangle) \cong \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$.

例 3.3　$V := \mathbb{R}^2$ に対し, $\langle x,y\rangle := {}^t xy$ と定める. このとき, 以下が成り立つ:

(1)　$\mathrm{Cl}\,(\mathbb{R}^2,\langle,\rangle) \cong \mathbb{H}$.
(2)　$\mathrm{Cl}\,(\mathbb{R}^2,-\langle,\rangle) \cong \mathbb{R}(2)$.

ただしここで, $\mathbb{H}$ は四元数体, $\mathbb{R}(n)$ は $n\times n$ 実行列全体の集合を表す.

問題 3.4 上記のうち $\mathrm{Cl}\,(\mathbb{R}^2, \langle,\rangle) \cong \mathbb{H}$ (代数として同型) を示せ.

3.1.2 クリフォード代数の普遍性

テンソル代数と同様に, クリフォード代数も普遍性をもつ. $1 \in \mathbb{R} = T^0(V) \subset T(V)$ に対して, $1 := [1] \in \mathrm{Cl}\,(V, \langle,\rangle)$ と書く. また, 包含写像と自然な射影の合成を $\iota : V \to T(V) \to \mathrm{Cl}\,(V, \langle,\rangle)$ で表す.

定理 3.5 A を単位元 e をもつ代数とし, $f : V \to A$ を線型写像とする. また, 次が成り立つと仮定する: $\forall v \in V,\ f(v) \cdot f(v) = -\langle v, v\rangle \cdot e$. このとき, $\widetilde{f} : \mathrm{Cl}\,(V, \langle,\rangle) \to A$ という代数としての準同型写像が一意に存在し, $\widetilde{f}(1) = e,\ \widetilde{f} \circ \iota = f$.

証明は, テンソル代数の普遍性を用いると比較的容易にできる. また, クリフォード代数は, 上記の普遍性によって特徴付けることもできる.

3.1.3 代数のテンソル積

代数に関する準備をする.

命題 3.6 A, B を代数とする. このとき (実線型空間としての) テンソル積 $A \otimes B$ は, 次で定義される積により代数となる: $(\alpha \otimes \beta) \cdot (\alpha' \otimes \beta') := \alpha\alpha' \otimes \beta\beta'$.

例 3.7 実線型空間としてのテンソル積を考える. このとき, 以下は代数として同型:

(1) $\mathbb{R}(n) \otimes \mathbb{R}(m) \cong \mathbb{R}(nm)$.

(2) $\mathbb{R}(n) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}(n),\ \ \mathbb{R}(n) \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}(n)$.

(3) $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C},\ \ \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2),\ \ \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4)$.

問題 3.8 上記のうち $\mathbb{R}(n) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}(n)$ を示せ.

3.1.4 クリフォード代数の周期性

クリフォード代数のうち, 以下で定義される $\mathrm{Cl}_{r,s}$ を考える:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}_{r,s} &:= \mathrm{Cl}\,(\mathbb{R}^{r+s}, \langle,\rangle_{r,s}), \\ \langle x, y\rangle_{r,s} &:= x_1y_1 + \cdots + x_ry_r - x_{r+1}y_{r+1} - \cdots - x_{r+s}y_{r+s}. \end{aligned}$$

定理 3.9 以下は代数として同型:

(1) $\mathrm{Cl}_{n,0} \otimes \mathrm{Cl}_{0,2} \cong \mathrm{Cl}_{0,n+2}$.

(2) $\mathrm{Cl}_{0,n} \otimes \mathrm{Cl}_{2,0} \cong \mathrm{Cl}_{n+2,0}$.
(3) $\mathrm{Cl}_{r,s} \otimes \mathrm{Cl}_{1,1} \cong \mathrm{Cl}_{r+1,s+1}$.

これらを用いることで, $\mathrm{Cl}_{r,s}$ を帰納的に求めることができる. 例えば,

$$\mathrm{Cl}_{3,0} \cong \mathrm{Cl}_{0,1} \otimes \mathrm{Cl}_{2,0} = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}.$$

特に $\mathrm{Cl}_n := \mathrm{Cl}_{n,0}$ と表す. 定理 3.9 より次の “周期性” が導かれる.

系 3.10 $\mathrm{Cl}_{n+8} \cong \mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_8$.

3.2 スピン群

クリフォード代数を用いることで, スピン群 Spin_n を実現することができる. Spin_n は, 特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ の普遍被覆群である.

3.2.1 偶部分

まずは準備として, $\mathrm{Cl}(V, \langle , \rangle)$ の分解を与える. 普遍性から次が得られる.

補題 3.11 $\alpha' : V \to V : v \mapsto -v$ とする. このとき α' は, 次の代数としての準同型写像に一意的に拡張できる: $\alpha : \mathrm{Cl}(V, \langle , \rangle) \to \mathrm{Cl}(V, \langle , \rangle)$.

ここで $\alpha^2 = \mathrm{id}$ に注意する.

定義 3.12 α による $\mathrm{Cl}(V, \langle , \rangle)$ 内の $(+1)$-固有空間を **偶部分** と呼び, $\mathrm{Cl}^0(V, \langle , \rangle)$ で表す. また, (-1)-固有空間を **奇部分** と呼び, $\mathrm{Cl}^1(V, \langle , \rangle)$ で表す.

特に, 偶部分 $\mathrm{Cl}^0(V, \langle , \rangle)$ は部分代数である.

3.2.2 スピン群の定義

スピン群を定義する. このとき, $\mathrm{Cl}(V, \langle , \rangle)$ の乗法群を用いる:

$$\mathrm{Cl}^{\times}(V, \langle , \rangle) := \{\varphi \in \mathrm{Cl}(V, \langle , \rangle) \mid \varphi \text{ は積に関して可逆 }\}.$$

定義 3.13 以下のような $\mathrm{Cl}^{\times}(V, \langle , \rangle)$ の部分群を定義する:

(1) $\mathrm{Pin}(V, \langle , \rangle) := \langle \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = \pm 1\} \rangle$ (生成される群) を **ピン群** と呼ぶ.
(2) $\mathrm{Spin}(V, \langle , \rangle) := \mathrm{Pin}(V, \langle , \rangle) \cap \mathrm{Cl}^0(V, \langle , \rangle)$ を **スピン群** と呼ぶ.

特に, クリフォード代数が $\mathrm{Cl}_{r,s}$ の場合には, 得られたピン群やスピン群を $\mathrm{Pin}_{r,s}$, $\mathrm{Spin}_{r,s}$ と表す. また $\mathrm{Spin}_n := \mathrm{Spin}_{n,0}$ と書くことが多い.

3.2.3 随伴表現

随伴表現を用いて, Spin_n から $\mathrm{SO}(n)$ への被覆写像が構成できる.

定義 3.14 次で定義される $\mathrm{Ad} : \mathrm{Cl}^{\times}(V, \langle , \rangle) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}\,(V, \langle , \rangle))$ を **随伴表現** と呼ぶ:

$$\mathrm{Ad}_{\varphi}(x) := \varphi x \varphi^{-1} \qquad (\varphi \in \mathrm{Cl}^{\times}(V, \langle , \rangle),\ x \in \mathrm{Cl}\,(V, \langle , \rangle))).$$

問題 3.15 $v \in V$ が $\langle v, v \rangle \neq 0$ をみたすとする. このとき, 次を示せ:

$$\mathrm{Ad}_v(w) = -w + 2\frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} v \quad (w \in V).$$

すなわち, Ad_v は v に関する折り返しである. とくに $\mathrm{Ad}_v \in \mathrm{O}(V, \langle , \rangle)$. このことから, 次の写像が得られる:

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}\,(V, \langle , \rangle) \to \mathrm{SO}(V, \langle , \rangle).$$

特に Spin_n の場合には, この写像が $\mathrm{SO}(n)$ への $2:1$ の普遍被覆写像を与えることが知られている (証明は, 例えば [5] を参照).

3.2.4 スピン表現

W を実線型空間とする. $\mathrm{End}\,(W)$ は自然に代数となることに注意する.

定義 3.16 $\Delta : \mathrm{Cl}\,(V, \langle , \rangle) \to \mathrm{End}\,(W)$ を代数としての準同型 (表現) とする. このとき, その $\mathrm{Spin}\,(V, \langle , \rangle)$ への制限を **スピン表現** と呼ぶ.

スピン表現は, 数学の様々な分野に登場する, 重要な対象である.

3.3 ハイゼンベルグ型リー代数

ハイゼンベルグ型リー代数を紹介する. リー代数に関する基礎的な知識は仮定して, 粗筋のみを述べる. 詳細は [2] を参照.

3.3.1 定義

$(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ を内積付き 2-step 冪零リー代数とする. ここで 2-step 冪零とは, 次が成り立つこと: $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \neq 0$, $[\mathfrak{n}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]] = 0$. これに対し, 以下の記号を用いる:

- $\mathfrak{z} := \mathrm{center}\,(\mathfrak{n}) := \{Z \in \mathfrak{n} \mid [Z, \mathfrak{n}] = 0\}$.
- $\mathfrak{v} := \mathfrak{z}^\perp := \{X \in \mathfrak{n} \mid \langle X, \mathfrak{z}\rangle = 0\}$.

このとき定義より以下が成り立つ: $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$, $[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{z}$.

定義 3.17 上記の $(\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}, \langle,\rangle)$ に対し, 写像 $J : \mathfrak{z} \to \mathrm{End}\,(\mathfrak{v})$ を次で定義する:

$$\langle J_Z(X), Y\rangle = \langle Z, [X, Y]\rangle \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{v}).$$

定義 3.18 上記の $(\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}, \langle,\rangle)$ が **ハイゼンベルグ型** とは, 次が成り立つこと:

$$J_Z^2 = -\langle Z, Z\rangle \cdot \mathrm{id} \quad (\forall Z \in \mathfrak{z}).$$

問題 3.19 次で定義される $(\mathfrak{n}, \langle,\rangle)$ を (古典的な) **ハイゼンベルグ代数** と呼ぶ. これがハイゼンベルグ型であることを示せ:

$$\mathfrak{n} := \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & * & \cdots & * & * \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right) \;\middle|\; \text{成分は実数} \right\}, \quad \langle X, Y\rangle := \mathrm{tr}\,({}^t XY).$$

3.3.2 分類

包含写像を $\iota : \mathfrak{z} \to \mathrm{Cl}\,(\mathfrak{z}, \langle,\rangle)$ で表す. また, $J : \mathfrak{z} \to \mathrm{End}\,(\mathfrak{v})$ であった. このとき, クリフォード代数の普遍性から次が従う.

命題 3.20 $(\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}, \langle,\rangle)$ がハイゼンベルグ型であるとする. このとき, 代数としての準同型 $\widetilde{J} : \mathrm{Cl}\,(\mathfrak{z}, \langle,\rangle) \to \mathrm{End}\,(\mathfrak{v})$ が一意に存在し, $J = \widetilde{J} \circ \iota$.

このことから, ハイゼンベルグ型リー代数の分類は, クリフォード代数 Cl_n の表現の分類に帰着させることができる.

3.3.3 性質

ハイゼンベルグ型リー代数 $(\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}, \langle,\rangle)$ は (正確に言うと対応する単連結リー群は), リーマン幾何的に良い性質をもつことが知られている. 例えば,

- $(\mathfrak{n}, \langle,\rangle)$ はリッチソリトンである.
- 所定の一次元可解拡大 $(\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \langle,\rangle)$ は, アインシュタイン, 非正曲率, さらに調和多様体である.
- 上記の $(\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \langle,\rangle)$ は, 所定の条件をみたすとき, 階数 1 対称空間である.

3.4　球面内の等径超曲面

クリフォード代数 Cl_n の表現から, 球面内の等径超曲面 (主曲率一定超曲面) を構成することができる. 講義では触れることはできなかったが, せっかくなので載せておく.

3.4.1　準備

ここでは, $\Delta' : \mathrm{Cl}_n \to \mathrm{End}\,(W)$ を表現 (代数としての準同型) とする.

命題 3.21　W 上の内積 $\langle , \rangle_W$ で次をみたすものが存在する: $\forall e \in \mathbb{R}^n$ $(\langle e, e \rangle = 1)$, $\Delta'(e)$ は $\langle , \rangle_W$ を保つ (すなわち, 直交変換である).

また, $\mathrm{Cl}_{0,n+2} \cong \mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_{0,2}$ および $\mathrm{Cl}_{0,2} \cong \mathbb{R}(2)$ から, 次が得られる.

命題 3.22　上記の Δ' から, 表現 $\Delta : \mathrm{Cl}_{0,n+2} \to \mathrm{End}\,(W \otimes \mathbb{R}^2)$ が自然に得られる.

ここで $W \otimes \mathbb{R}^2 \cong W \oplus W$ に注意する.

3.4.2　構成

上の設定と記号を引き継ぎ, $W \oplus W$ 上の内積を $\langle , \rangle := \langle , \rangle_W \oplus \langle , \rangle_W$ で定める.

定義 3.23　$\{P_1, \ldots, P_{n+2}\}$ を $\mathbb{R}^{n+2}$ $(\subset \mathrm{Cl}_{0,n+2})$ の正規直交基底とする. このとき, 関数 $F : W \oplus W \to \mathbb{R}$ を次で定める:

$$F(x) := \langle x, x \rangle^2 - 2 \textstyle\sum_{i=1}^{n+2} \langle \Delta(P_i) x, x \rangle^2.$$

この関数 F は正規直交基底の取り方に依らないことが知られている. ここで, $l := \dim W$ とおき, $W \oplus W$ 内の単位球面を S^{2l-1} で表す.

定理 3.24　上記の関数 $F : W \oplus W \to \mathbb{R}$ を考える. このとき各 $c \in (-1, 1)$ に対して, 次は S^{2l-1} 内の主曲率一定超曲面である:

$$M_c := \{x \in S^{2l-1} \mid F(x) = c\}.$$

このような超曲面を **OT-FKM 型** と呼ぶ. OT-FKM 型超曲面は, 非等質な例を無限に含むことが知られている.

参考文献

[1] Atiyah, M., Bott, R., Shapiro, A.: *Clifford Modules*. Topology **3**, Suppl. 1 (1964), 3–38.

[2] Berndt, J., Tricerri, F., Vanhecke, L.: *Generalized Heisenberg Groups and Damek-Ricci Harmonic Spaces*. Springer, 1995.

[3] 本間 泰史: スピン幾何入門その 1 — クリフォード代数とスピン群. `http://www.f.waseda.jp/homma_yasushi/homma2/download/spin1.pdf`

[4] Kaplan, A.: *Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules*. Geom. Dedicata **11** (1981), 127–136.

[5] Lawson, H. B., Michelsohn, M.-L.: *Spin geometry*. Princeton University Press, 1989.

[6] 横沼 健雄: テンソル空間と外積代数. 岩波書店, 1977.

参考文献は暫定的なもので, いろいろ不完全です. 原稿を update する機会がもしあれば, その時に追加する予定です.