平成 26 年度卒業論文
3 次元 Lie 代数の田崎・梅原不変量と左不変 Einstein 計量

広島大学理学部数学科
B113468 日向達也
指導教員 田丸博士 教授

2015 年 2 月 10 日

はじめに

所定の条件をみたす 3 次元 Lie 代数には, 田崎・梅原不変量と呼ばれる不変量が存在することが知られている. そして, この不変量を用いて 3 次元 Lie 代数を分類することができる (Tasaki and Umehara[2]). 一方で, Lie 群上には左不変 Einstein 計量と呼ばれるものが定義できる. 本論文の目的は, 田崎・梅原不変量と左不変 Einstein 計量 (Einstein 内積) との関係を明らかにすることである.

第 1 章では, Lie 代数の定義といくつかの具体例を述べ, 最後に 3 次元 Lie 代数の分類結果 (Milnor [3]) を述べる.

第 2 章では, 3 次元 Lie 代数における田崎・梅原不変量を紹介し, 章の後半で実際にすべての 3 次元 Lie 代数に関して田崎・梅原不変量を求めていく.

第 3 章では, Lie 代数における左不変 Einstein 計量 (Einstein 内積) の定義を述べ, 章の後半では実際に具体的な 3 次元 Lie 代数について左不変 Einstein 計量 (Einstein 内積) が存在するかどうかを調べる. そして最後に, 各 3 次元 Lie 代数について第 2 章で求めた田崎・梅原不変量と本章で調べた左不変 Einstein 計量 (Einstein 内積) の存在・非存在の結果から導き出せる両者の関係を定理の形で紹介する.

本論文を書くにあたり, 指導教員の田丸博士先生をはじめ, 奥田隆幸先生, 橋永貴弘先生ならびに先輩方にはご多忙の中多くのご指導をいただきましたことを, この場をお借りして深く御礼申し上げます.

目次

1　3 次元 Lie 代数について

この章では, 前半で Lie 代数の定義や例について述べる．章の後半では特に 3 次元 Lie 代数の分類結果を述べる (Milnor [3]).

1.1　Lie 代数の定義

この節では, Lie 代数の定義といくつかの例を紹介する.

定義 1.1. 実線型空間 $\mathfrak{g}$ と 写像 $[,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ を考える. このとき, 組 $(\mathfrak{g},[,])$ が Lie 代数とは, 以下が成り立つこと:

(i) (双線型性) 写像 $[,]$ は双線型.

(ii) (交代性) 任意の $X,Y\in\mathfrak{g}$ に対して, $[X,Y]=-[Y,X]$.

(iii) 任意の $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ に対して, $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$.

Lie 代数 $(\mathfrak{g},[,])$ に対して, 写像 $[,]$ を括弧積と呼び, 条件式 (iii) をヤコビ律と呼ぶ. また, 線型空間としての次元を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の次元とする.

命題 1.2. 写像 $[,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ を双線型とする. このとき, 定義 1.1 の (ii) の条件は, 次の条件と同値である: 任意の $X\in\mathfrak{g}$ に対して, $[X,X]=0$.

証明. 定義 1.1 の条件 (ii) を仮定する. ここで任意の $X\in\mathfrak{g}$ に対して, 仮定より $[X,X]=-[X,X]$ となるから, $2[X,X]=0$ となり $[X,X]=0$ を得る.

一方, 任意の $X\in\mathfrak{g}$ に対して, $[X,X]=0$ と仮定する. ここで任意の $X,Y\in\mathfrak{g}$ に対して, 仮定から $[X+Y,X+Y]=0$ となるが, この左辺は, 括弧積の双線型性と, 仮定である任意の $X\in\mathfrak{g}$ に対して, $[X,X]=0$ であることにより以下のように式変形できる:

$$\begin{aligned}[X+Y,X+Y]&=[X+Y,X]+[X+Y,Y]\\&=[X,X]+[Y,X]+[X,Y]+[Y,Y]\\&=[Y,X]+[X,Y].\end{aligned}$$

よって, $[Y,X]+[X,Y]=0$ となるので, $[X,Y]=-[Y,X]$ は示された. □

例 1.3. $M(n,\mathbb{R})$ に括弧積を $[X,Y]:=XY-YX$ で定義したものは n^2 次元 Lie 代数である. また, これを一般線型 Lie 代数と呼び, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ で表す.

証明. 簡単な計算により, 括弧積 $[X,Y]=XY-YX$ が定義 1.1 を満たすことを確かめることができる. □

定義 1.4. $(\mathfrak{g},\ [,])$ を Lie 代数とし, $\mathfrak{g}'\subset\mathfrak{g}$ とする. このとき $\mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}$ 内の Lie 部分代数とは, 以下が成り立つこと:

(i) $\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ 内の線型部分空間.

(ii) $\mathfrak{g}'$ は括弧積について閉じている. すなわち, 任意の $X,\ Y \in \mathfrak{g}'$ に対して, $[X, Y] \in \mathfrak{g}'$.

例 1.5. 次で定義される $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ と $\mathfrak{h}_3$ はそれぞれ $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ と $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ 内の 3 次元 Lie 部分代数である. またこのとき, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ を 3 次元特殊線型 Lie 代数, $\mathfrak{h}_3$ を 3 次元 Heisenberg Lie 代数と呼ぶ:

(1) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) := \{X \in M(2, \mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$.

(2) $\mathfrak{h}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

証明. (1) 示すことは, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ が $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ の線型部分空間であることと, 括弧積について閉じていることであるが, これらは以下のようなトレースの性質を用いれば簡単に示すことができる:

$$\mathrm{tr}(X + Y) = \mathrm{tr}X + \mathrm{tr}Y,\ \mathrm{tr}(cX) = c\ \mathrm{tr}X,\ \mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX).$$

また次元については, 次の $\{e_1, e_2, e_3\}$ が $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の基底になることから 3 次元である:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 示すことは, (1) と同様に $\mathfrak{h}_3$ が $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ の線型部分空間であることと, 括弧積について閉じていることであるが, これは簡単な行列計算により確かめることができる. また次元については, 次の $\{f_1, f_2, f_3\}$ が $\mathfrak{h}_3$ の基底になることから 3 次元である:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

1.2　3 次元 Lie 代数の分類

この節では, 本論文で主として扱うことになる 3 次元の場合について述べる. 特に任意の 3 次元の Lie 代数は, 本節の最後で紹介する Lie 代数の内のいずれかに同型であることが知られている. 以下, $(\mathfrak{g}_1, [,]_1), (\mathfrak{g}_2, [,]_2)$ を Lie 代数とする.

定義 1.6. 写像 $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ が準同型写像とは, 以下が成り立つこと :

(i) f は線型写像.

(ii) f は括弧積を保つ. すなわち, 任意の $X, Y \in \mathfrak{g}_1$ に対して, $f([X, Y]_1) = [f(X), f(Y)]_2$.

定義 1.7. 写像 $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ が同型写像とは, f が全単射かつ準同型であること. また, $(\mathfrak{g}_1, [,]_1)$ と $(\mathfrak{g}_2, [,]_2)$ が同型であるとは, 同型写像 $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ が存在すること.

定理 1.8. 任意の 3 次元 Lie 代数は以下の 3 次元 Lie 代数の内のいずれかただひとつに同型である.

3 次元 Lie 代数	括弧積（ただし 0 のものを除く）	
$\mathfrak{o}(3)$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = e_2$	simple
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = -e_2$	simple
$\mathfrak{h}_3$	$[e_1, e_2] = e_3$	nilpotent
$\mathfrak{r}_3$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_2 + e_3$	solvable
$\mathfrak{r}_{3,\lambda}, \lvert\lambda\rvert \leq 1$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = \lambda e_3$	solvable
$\mathfrak{r}'_{3,\lambda}, \lambda \geq 0$	$[e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3, [e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3$	solvable
$\mathbb{R}^3$		abelian

証明. 参考文献 [1] と [3] を参照. □

2 3 次元 Lie 代数の田崎・梅原不変量について

この章では, 本論文で必要となる 3 次元 Lie 代数の田崎・梅原不変量について説明する.

2.1 3 次元 Lie 代数の田崎・梅原不変量の導出

この節では本論文で使用する 3 次元 Lie 代数の田崎・梅原不変量の導出の手順を述べる. 以下, $(\mathfrak{g}, [,])$ を 3 次元 Lie 代数とし, $\{e_1, e_2, e_3\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底とする. まず, 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ を次のように定め, この行列 A の余因子行列を A^* とする:

$$\begin{aligned}
[e_2, e_3] &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, \\
[e_3, e_1] &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, \\
[e_1, e_2] &= a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3.
\end{aligned}$$

定義 2.1. (1) 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して線型写像 ad_X を以下で定義する:

$$\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : Y \mapsto [X, Y].$$

(2) 次の双線型写像 F を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式と呼ぶ:

$$F : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y).$$

定理 2.2 ([2])**.** $(\mathfrak{g}, [,])$ を 3 次元 Lie 代数とする. ただし, $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{h}_3$ および $\mathbb{R}^3$ に同型でないものとする. また, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 $F : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ の表現行列を P とする. このとき, 行列 P と先に定めた行列 A^* に対して以下を満たすような $(\mathfrak{g}, [,])$ の不変量 $\chi(\mathfrak{g}) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が存在する:

$$P = (\chi(\mathfrak{g}) - 2)A^*.$$

ただし, $A^* = 0$ のとき $\chi(\mathfrak{g}) = \infty$ とする.

証明. 参考文献 [2] を参照. $\square$

注意 2.3. $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{h}_3$ または $\mathbb{R}^3$ に同型となるときは $P = A^* = 0$ となるので, 定理 2.2 ではこれらの場合は除く.

以下, この定理 2.2 における $\chi(\mathfrak{g})$ を 3 次元 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [,])$ の田崎・梅原不変量と呼ぶ.

2.2 3 次元 Lie 代数の田崎・梅原不変量の具体例

この節では前節で与えた 3 次元 Lie 代数の田崎・梅原不変量を実際に具体的な 3 次元 Lie 代数で求める. また今回, 不変量を求める 3 次元 Lie 代数は, $\mathfrak{h}_3$ と $\mathbb{R}^3$ を除いたすべての 3 次元 Lie 代数である.

はじめに, 3 次元 Lie 代数 $\mathfrak{r}_{3,\lambda}, |\lambda| \leq 1$ の田崎・梅原不変量を求める. 3 次元 Lie 代数 $\mathfrak{r}_{3,\lambda}$ の基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ は第 1 章で紹介したものと同様で, 括弧積 $[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = \lambda e_3, [e_2, e_3] = 0$ を満たすような基底とする. このとき, 行列 A は次のようになる:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

補題 2.4. 行列 A の余因子行列 A^* は次のようになる:

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

証明. まず, 行列 A の (i, j) 余因子 $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ を求める. ただし, D_{ij} は A の (i, j) 小行列式とする. すなわち, 一般に n 次正方行列 $T = (t_{ij})$ の小行列式 D_{ij} とは以下のことである:

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} t_{11} & \dots & t_{1\ j-1} & t_{1\ j+1} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{i-1\ 1} & \dots & t_{i-1\ j-1} & t_{i-1\ j+1} & \dots & t_{i-1\ n} \\ t_{i+1\ 1} & \dots & t_{i+1\ j-1} & t_{i+1\ j+1} & \dots & t_{i+1\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{n\ j-1} & t_{n\ j+1} & \dots & t_{nn} \end{vmatrix}.$$

はじめに, A_{11} と A_{12} を求める.

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} D_{11} \\ &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \lambda. \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} D_{12} \\ &= - \begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

その他も同様にして計算すると, A_{ij} は次のようになる:

$$A_{ij} = \begin{cases} \lambda & (i = j = 1). \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

よって, 求める A の余因子行列 A^* は以下となる:

$$\begin{aligned} A^* &= {}^t\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \\ &= {}^t\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

補題 2.5. 線型写像 $\mathrm{ad}_{e_i} : \mathfrak{r}_{3,\lambda} \to \mathfrak{r}_{3,\lambda}$ の表現行列 P_{e_i} は次のようになる:

$$P_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, P_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

証明. P_{e_1} のみ示す. まず, 定義 2.1(1) による線型写像 ad_{e_1} の定義と, $\mathfrak{r}_{3,\lambda}$ に今回定義した括弧積 $[,]$ により以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{e_1}(e_1) &= [e_1, e_1] = 0, \\ \mathrm{ad}_{e_1}(e_2) &= [e_1, e_2] = e_2, \\ \mathrm{ad}_{e_1}(e_3) &= [e_1, e_3] = \lambda e_3. \end{aligned}$$

よって, 線型写像 ad_{e_1} の表現行列 P_{e_1} は以下のようになる:

$$P_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

P_{e_2} と P_{e_3} の場合も同様にして求めることができる. □

補題 2.6. Killing 形式 $F : \mathfrak{r}_{3,\lambda} \times \mathfrak{r}_{3,\lambda} \to \mathbb{R}$ の表現行列 P は次のようになる:

$$P = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

証明. まず, 補題 2.5 より以下が成り立つ:

$$(1)\ P_{e_1}P_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

$$(2)\ P_{e_1}P_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(3)\ P_{e_1}P_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) $P_{e_2}P_{e_2} = P_{e_2}P_{e_3} = P_{e_3}P_{e_3} = 0$.

よって, これらとトレースの性質 $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$ を用いると $i, j \in \{1, 2, 3\}$ に対して次が成り立つ:

$$\mathrm{tr}(P_{e_i}P_{e_j}) = \begin{cases} 1+\lambda^2 & (i = j = 1). \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

したがって, 定義 2.1(2) より $F(e_i, e_j) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{e_i}\mathrm{ad}_{e_j}) = \mathrm{tr}(P_{e_i}P_{e_j})$ であることから, Killing 形式 $F : \mathfrak{r}_{3,\lambda} \times \mathfrak{r}_{3,\lambda} \to \mathbb{R}$ の表現行列 P は, 次のようになる:

$$P = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

ここで, 補題 2.4 と補題 2.6 より $\lambda \neq 0$ のとき $P = ((1+\lambda^2)/\lambda)A^*$ となるので, 定理 2.2 より

$$\chi(\mathfrak{r}_{3,\lambda}) = 2 + \frac{1+\lambda^2}{\lambda} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}.$$

また, $\lambda = 0$ のときは A^* が零行列となるので, 定理 2.2 より

$$\chi(\mathfrak{r}_{3,0}) = \infty.$$

他のすべての場合も上の例と同様にして 3 次元 Lie 代数の田崎・梅原不変量を求めることができる. ここでは計算結果のみ下の表にまとめる.

3 次元 Lie 代数	括弧積（ただし 0 のものを除く）	3 次元 Lie 代数の田崎・梅原不変量
$\mathfrak{o}(3)$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = e_2$	0
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = -e_2$	0
$\mathfrak{r}_3$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_2 + e_3$	4
$\mathfrak{r}_{3,\lambda}, \lvert\lambda\rvert \leq 1$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = \lambda e_3$	$(\lambda+1)^2/\lambda$ ($\lambda = 0$ のときは ∞)
$\mathfrak{r}'_{3,\lambda}, \lambda \geq 0$	$[e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3, [e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3$	$4\lambda^2/(1+\lambda^2)$

3 左不変 Einstein 計量について

この章では, すべての 3 次元 Lie 代数について, 左不変 Einstein 計量 (Einstein 内積) が存在するかどうかを調べる. また, Lie 群上の左不変 Riemann 計量と, その Lie 群に対応する Lie 代数上の内積は, 1:1 で対応することが知られている. 以下ではそれらを同一視する.

3.1 Lie 代数の Einstein 内積の定義

この節では, Lie 代数の Einstein 内積の定義を述べる. 以下, $(\mathfrak{g}, [,])$ を Lie 代数とし, $\langle , \rangle$ を $\mathfrak{g}$ の内積とする.

定義 3.1. $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ が Levi-Civita 接続であるとは, 次が成り立つこと：

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle.$$

また, Levi-Civita 接続を求めるために, 次を満たす対称写像 $U : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を定義する:

$$2\langle U(X, Y), Z\rangle = \langle [Z, X], Y\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle.$$

また, この U は括弧積と内積の双線型性より双線型となる. さらに, この U を用いると Levi-Civita 接続は次のように表せる:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] + U(X, Y).$$

命題 3.2. Levi-Civita 接続 ∇ は双線型性を持つ. すなわち, 任意の $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\nabla_{a_1 X_1 + a_2 X_2} Y = a_1 \nabla_{X_1} Y + a_2 \nabla_{X_2} Y$.
(2) $\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2$.

証明. (1) を示す. 括弧積 $[,]$ と U の双線型性により

$$\begin{aligned}
\nabla_{a_1 X_1 + a_2 X_2} Y &= (1/2)[a_1 X_1 + a_2 X_2, Y] + U(a_1 X_1 + a_2 X_2, Y) \\
&= (1/2)a_1[X, Y] + (1/2)[X, Y] + a_1 U(X_1, Y) + a_2 U(X_2, Y) \\
&= a_1 \nabla_{X_1} Y + a_2 \nabla_{X_2} Y.
\end{aligned}$$

(2) も (1) と同様に括弧積 [,] と U の双線型性により示すことができる. $\square$

定義 3.3. 次で定義される $R : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g} : (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$ をリーマン曲率という:

$$R(X, Y)Z := \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z.$$

命題 3.4. リーマン曲率 R は次をみたす:

(1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z.$
(2) $R(X, X)Z = 0.$

証明. (1) を示す.

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z \\ &= \nabla_{-[Y,X]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z \\ &= -(\nabla_{[Y,X]}Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_X\nabla_Y Z) \\ &= -R(Y, X)Z. \end{aligned}$$

(2) は (1) より簡単に導くことができる. $\square$

命題 3.5. リーマン曲率 R は多重線型性を持つ. すなわち, 任意の $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) $R(a_1X_1 + a_2X_2, Y)Z = a_1R(X_1, Y)Z + a_2R(X_2, Y)Z.$
(2) $R(X, a_1Y_1 + a_2Y_2)Z = a_1R(X, Y_1)Z + a_2R(X, Y_2)Z.$
(3) $R(X, Y)(a_1Z_1 + a_2Z_2) = a_1R(X, Y)Z_1 + a_2R(X, Y)Z_2.$

証明. (1) を示す. 括弧積 [,] と 命題 3.2 より Levi-Civita 接続 ∇ は双線型なので

$$\begin{aligned} &R(a_1X_1 + a_2X_2, Y)Z \\ =&\nabla_{[a_1X_1+a_2X_2,Y]}Z - \nabla_{a_1X_1+a_2X_2}\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_{a_1X_1+a_2X_2}Z \\ =&\nabla_{a_1[X_1,Y]+a_2[X_2,Y]}Z - (a_1\nabla_{X_1}\nabla_Y Z + a_2\nabla_{X_2})\nabla_Y Z) + (\nabla_Y a_1\nabla_{X_1}Z + \nabla_Y a_2\nabla_{X_2}Z) \\ =&a_1\nabla_{[X_1,Y]}Z + a_2\nabla_{[X_2,Y]}Z - a_1\nabla_{X_1}\nabla_Y Z - a_2\nabla_{X_2}\nabla_Y Z + a_1\nabla_Y\nabla_{X_1}Z + a_2\nabla_Y\nabla_{X_2}Z \\ =&a_1R(X_1, Y)Z + a_2R(X_2, Y)Z. \end{aligned}$$

(2) と (3) も, (1) と同様に括弧積 [,] と Levi-Civita 接続 ∇ の双線型性により示すことができる. $\square$

定義 3.6. $\{E_i\}$ を $\langle,\rangle$ の正規直交基底とする. 次で定義される $\mathrm{Ric} : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ を $\langle,\rangle$ に関する Ricci 曲率という:

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum\langle R(X, E_i)Y, E_i\rangle.$$

定義 3.7. $(\mathfrak{g}, [,])$ を Lie 代数とする. $\langle,\rangle$ が Einstein とは, 次が成り立つこと:

$$\exists\alpha\in\mathbb{R};\ \forall X, Y\in\mathfrak{g},\ \mathrm{Ric}(X, Y) = \alpha\langle X, Y\rangle.$$

3.2 3 次元 Lie 代数の Einstein 内積

この節では前節で紹介した Einstein 内積の定義に基づき, すべての 3 次元 Lie 代数について Einstein 内積が存在するかどうかを調べる. まずはじめに, $\mathfrak{o}(3)$ について調べる. ここで基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ は次の括弧積を満たすような $\mathfrak{o}(3)$ の基底とし, 内積 $\langle , \rangle$ は基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を正規直交基底とするような $\mathfrak{o}(3)$ の内積とする:

$$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_2, e_3] = e_1,\ [e_3, e_1] = e_2.$$

補題 3.8. 3 次元 Lie 代数 $(\mathfrak{o}(3),\ [,],\ \langle , \rangle)$ に対して, 以下が成り立つ:

$$U(e_i, e_j) = 0 \quad (i, j \in \{1, 2, 3\}).$$

証明. $U(e_1, e_1)$ についてのみ示す. 対称双線型写像 U の定義により

- $2\langle U(e_1, e_1), e_1\rangle = \langle [e_1, e_1], e_1\rangle + \langle e_1, [e_1, e_1]\rangle = \langle 0, e_1\rangle + \langle e_1, 0\rangle = 0.$
- $2\langle U(e_1, e_1), e_2\rangle = \langle [e_2, e_1], e_1\rangle + \langle e_1, [e_2, e_1]\rangle = \langle -e_3, e_1\rangle + \langle e_1, -e_3\rangle = 0.$
- $2\langle U(e_1, e_1), e_3\rangle = \langle [e_3, e_1], e_1\rangle + \langle e_1, [e_3, e_1]\rangle = \langle e_2, e_1\rangle + \langle e_1, e_2\rangle = 0.$

したがって, $U(e_1, e_1) = 0$ となる. また, その他も同様にして示すことができる. □

補題 3.9. 3 次元 Lie 代数 $(\mathfrak{o}(3),\ [,],\ \langle , \rangle)$ に対して, 以下が成り立つ:

$$\nabla_{e_i} e_j = \frac{1}{2}[e_i, e_j].$$

証明. Levi-Civita 接続 ∇ の定義と 補題 3.8 より以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} e_j &= (1/2)[e_i, e_j] + U(e_i, e_j) \\ &= (1/2)[e_i, e_j]. \end{aligned}$$

□

次に, $(\mathfrak{o}(3),\ [,],\ \langle , \rangle)$ のリーマン曲率 R を求める.

補題 3.10. 3 次元 Lie 代数 $(\mathfrak{o}(3),\ [,],\ \langle , \rangle)$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) $R(e_1, e_1) = R(e_2, e_2) = R(e_3, e_3) = 0.$
(2) $R(e_1, e_2)e_1 = (1/4)e_2,\ R(e_1, e_2)e_2 = -(1/4)e_1,\ R(e_1, e_2)e_3 = 0.$
(3) $R(e_2, e_1)e_1 = -(1/4)e_2,\ R(e_2, e_1)e_2 = (1/4)e_1,\ R(e_2, e_1)e_3 = 0.$
(4) $R(e_1, e_3)e_1 = (1/4)e_3,\ R(e_1, e_3)e_2 = 0,\ R(e_1, e_3)e_3 = -(1/4)e_1.$
(5) $R(e_3, e_1)e_1 = -(1/4)e_3,\ R(e_3, e_1)e_2 = 0,\ R(e_3, e_1)e_3 = (1/4)e_1.$
(6) $R(e_2, e_3)e_1 = 0,\ R(e_2, e_3)e_2 = (1/4)e_3,\ R(e_2, e_3)e_3 = -(1/4)e_2.$
(7) $R(e_3, e_2)e_1 = 0,\ R(e_3, e_2)e_2 = -(1/4)e_3,\ R(e_3, e_2)e_3 = (1/4)e_2.$

証明. まず, (1) を示すが, これは 命題 3.4 より簡単に示せる. 次に (2) を示す. $\mathfrak{o}(3)$ の Levi-Civita 接続 ∇ は 補題 3.9 より $\nabla_{e_i} e_j = (1/2)[e_i, e_j]$ であるので, $\mathfrak{o}(3)$ のリーマン曲率 $R(e_i, e_j)e_k$ は次のようになる:

$$\begin{aligned} R(e_i, e_j)e_k &= \nabla_{[e_i, e_j]} e_k - \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_k + \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_k \\ &= (1/2)[[e_i, e_j], e_k] - (1/2)[e_i, (1/2)[e_j, e_k]] + (1/2)[e_j, (1/2)[e_i, e_k]] \\ &= (1/2)[[e_i, e_j], e_k] - (1/4)[e_i, [e_j, e_k]] + (1/4)[e_j, [e_i, e_k]]. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_1 &= (1/2)[[e_1, e_2], e_1] - (1/4)[e_1, [e_2, e_1]] + (1/4)[e_2, [e_1, e_1]] \\ &= (1/2)[e_3, e_1] - (1/4)[e_1, -e_3] + (1/4)[e_2, 0] \\ &= (1/2)e_2 - (1/4)e_2 + 0 \\ &= (1/4)e_2. \\ R(e_1, e_2)e_2 &= (1/2)[[e_1, e_2], e_2] - (1/4)[e_1, [e_2, e_2]] + (1/4)[e_2, [e_1, e_2]] \\ &= (1/2)[e_3, e_2] - (1/4)[e_1, 0] + (1/4)[e_2, e_3] \\ &= -(1/2)e_1 + 0 + (1/4)e_1 \\ &= -(1/4)e_1. \\ R(e_1, e_2)e_3 &= (1/2)[[e_1, e_2], e_3] - (1/4)[e_1, [e_2, e_3]] + (1/4)[e_2, [e_1, e_3]] \\ &= (1/2)[e_3, e_3] - (1/4)[e_1, e_1] + (1/4)[e_2, -e_2] \\ &= 0. \end{aligned}$$

(4), (6) も (2) と同様にして示せる. さらに, (3), (5), (7) に関しては 命題 3.4 よりそれぞれ (2), (4), (6) の結果を用いれば示すことができる. □

補題 3.11. $X = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i, Y = \sum_{j=1}^{3} \beta_j e_j \in \mathfrak{o}(3)$ に対して, リッチ曲率 $\mathrm{Ric}(X, Y)$ は次のようになる:

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3).$$

証明. リッチ曲率の定義と, 内積の性質, 補題 3.10 によりリッチ曲率 $\mathrm{Ric}(X, Y)$ は以下のように

なる:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) &= \sum_{k=1}^{3}\langle R(X,e_k)Y,e_k\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{3}\langle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_i\beta_j R(e_i,e_k)e_j,e_k\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_i\beta_j\langle R(e_i,e_k)e_j,e_k\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_i\beta_j\langle R(e_i,e_1)e_j,e_1\rangle + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_i\beta_j\langle R(e_i,e_2)e_j,e_2\rangle + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_i\beta_j\langle R(e_i,e_3)e_j,e_3\rangle \\
&= (\frac{1}{4}\alpha_2\beta_2 + \frac{1}{4}\alpha_3\beta_3) + (\frac{1}{4}\alpha_1\beta_1 + \frac{1}{4}\alpha_3\beta_3) + (\frac{1}{4}\alpha_1\beta_1 + \frac{1}{4}\alpha_2\beta_2) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3).
\end{aligned}
$$

□

命題 3.12. 3 次元 Lie 代数 $(\mathfrak{o}(3),\ [,],\ \langle,\rangle)$ は Einstein.

証明. 任意の $X = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i e_i, Y = \sum_{j=1}^{3}\beta_j e_j \in \mathfrak{o}(3)$ をとる. すると, 内積 $\langle,\rangle$ は $\{e_1,e_2,e_3\}$ を正規直交基底とする内積であるので, 以下が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
\langle X,Y\rangle &= \langle\sum_{i=1}^{3}\alpha_i e_i,\sum_{j=1}^{3}\beta_j e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_i\beta_j\langle e_i,e_j\rangle \\
&= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.
\end{aligned}
$$

よって, この結果と 補題 3.11 より次が成り立つ:

$$
\mathrm{Ric}(X,Y) = \frac{1}{2}\langle X,Y\rangle.
$$

よって, 3 次元 Lie 代数 $(\mathfrak{o}(3),\ [,],\ \langle,\rangle)$ は Einstein.

□

Einstein 内積が存在するかどうかに関して, その他の 3 次元 Lie 代数の場合では [1] と [3] を参考にした. 以下ではすべての 3 次元 Lie 代数について, Einstein 内積が存在するかどうかを, 結果のみの形でまとめる. ただし, 存在する場合の Einstein 内積は, それぞれ下の括弧積を満たすような基底を正規直交基底とする内積である.

3 次元 Lie 代数	括弧積（ただし 0 のものを除く）	Einstein 内積
$\mathfrak{o}(3)$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = e_2$	存在する
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = -e_2$	存在しない
$\mathfrak{h}_3$	$[e_1, e_2] = e_3$	存在しない
$\mathfrak{r}_3$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_2 + e_3$	存在しない
$\mathfrak{r}_{3,\lambda}, \lvert\lambda\rvert \leq 1$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = \lambda e_3$	$\lambda = 1$ のときのみ存在する
$\mathfrak{r}'_{3,\lambda}, \lambda \geq 0$	$[e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3, [e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3$	存在する
$\mathbb{R}^3$		存在する

最後に, 第 2 章で求めた 3 次元 Lie 代数の田崎・梅原不変量と本章で調べた左不変 Einstein 計量の存在性の関係を次のように定理の形でまとめておく.

定理 3.13. $(\mathfrak{g}, [,])$ を $\mathfrak{h}_3$ および $\mathbb{R}^3$ に同型でない任意の 3 次元 Lie 代数とする. このとき, 以下が成り立つ:

Einstein となるような $\mathfrak{g}$ の内積 $\langle , \rangle$ が存在するならば $0 \leq \chi(\mathfrak{g}) \leq 4$.

参考文献

[1] Takahiro Hashinaga and Hiroshi Tamaru, *Three-dimensional solvsoliton and the minimality of the corresponding submanifolds*, preprint.

[2] Hiroyuki Tasaki and Masaaki Umehara, *An invariant on 3-dimensional Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), no. 2, 293–294.

[3] John Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Advances in Math. **21** (1976), no. 3, 304–310.