平成 26 年度卒業論文
直交リー代数に付随する群による一般線型群の両側剰余類の計算

広島大学理学部数学科
B111318 稲葉勇哉
指導教員 田丸博士 教授

2015 年 2 月 10 日

はじめに

私は, ゼミで主に線型リー群とリー代数について学習してきた. 本論文では, 3 次直交リー代数 $\mathfrak{o}(3)$ の自己同型群と 3 次直交リー群 $\mathrm{O}(3)$ による 3 次一般線型群 $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ の両側剰余類を計算し, 応用として両側剰余類の計算結果から $\mathfrak{o}(3)$ のミルナー基底が与えられることを示す. 本論文で生成されたミルナー基底は, 参考文献 [4] での生成方法と異なる方法で生成されたものである.

第 1 章では, 準備として線型リー群, リー代数等を定義し, 線型リー群, リー代数の中でも特に本論文で扱うものを紹介する.

第 2 章では, $\mathfrak{o}(3)$ の自己同型群と $\mathrm{O}(3)$ による $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ の両側剰余類を計算する. この計算結果が本論文の主定理である.

第 3 章では, 応用として, 参考文献 [4] とは異なる方法でミルナー基底が与えられることを定理として述べる.

本論文を書くにあたり, 指導教員の田丸博士先生をはじめ, 奥田隆幸先生, 橋永貴弘先生ならびに先輩方にはご多忙の中多くのことを指導していただきました. 最後になりましたが, この場をお借りして深く御礼申し上げます.

目次

1　線型リー群・リー代数等の定義

この章では, 本論文で必要な数種類の線型リー群とリー代数等について定義する.

以下, n を自然数, $M(n,\mathbb{R})$ を $n\times n$ 実行列の全体を表すものとする. また, 行列 $g\in M(n,\mathbb{R})$ の行列式を $\det g$, 転置を ${}^t g$, $M(n,\mathbb{R})$ 内の単位行列を I_n で表す.

1.1　線型リー群の定義

この節では, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ の 3 種類の線型リー群を紹介する.

定義 1.1. 次で定義される $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ を 一般線型群 (general linear group) と呼ぶ:

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) := \{g\in M(n,\mathbb{R}) \mid \det g \neq 0\}. \tag{1.1}$$

線型リー群の定義を述べるために, まずは $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ に位相を定義する. $M(n,\mathbb{R})$ には, $\mathbb{R}^{n^2}$ との自然な同一視により, 標準的な位相が入る. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ は $M(n,\mathbb{R})$ 内の部分集合なので, 標準的な位相から決まる相対位相を入れる.

定義 1.2. $G\subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ とする. このとき G が $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の 線型リー群 (linear Lie group) であるとは, 以下が成り立つこと:

(1) G は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 内の部分群.

(2) G は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 内で, 上記の位相に関して閉集合.

定義により $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ は, 線型リー群である.

定義 1.3. 次で定義される $\mathrm{O}(n)$ は線型リー群である. これを 直交リー群 (orthogonal Lie group) と呼ぶ:

$$\mathrm{O}(n) := \{g\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n\}. \tag{1.2}$$

次に, 直交群 $\mathrm{O}(n)$ と $\mathbb{R}^n$ 上の自然な内積が関係することをみる. ここで, $\mathbb{R}^n$ 上の自然な内積 $\langle , \rangle$ は, $\mathbb{R}^n$ の元を縦ベクトルとして,

$$\langle v,w\rangle := {}^t v w \quad (u,w\in\mathbb{R}^n) \tag{1.3}$$

により定義されていたことに注意する.

命題 1.4. 各 $g\in M(n,\mathbb{R})$ に対して, 以下は互いに同値である:

(1) $g\in \mathrm{O}(n)$.

(2) g は $\langle , \rangle$ を保つ. すなわち, 任意の $v,w\in\mathbb{R}^n$ に対して, $\langle gv,gw\rangle = \langle v,w\rangle$.

(3) $g=(v_1\cdots v_n)$ と表すと, $\{v_1,\ldots,v_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底.

証明. まず, (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. そのために, $g \in \mathrm{O}(n)$ と仮定する. 任意に $v, w \in \mathbb{R}^n$ をとる. 内積 $\langle , \rangle$ の定義より,

$$\langle gv, gw \rangle = {}^t(gv)(gw) = {}^tv({}^tgg)w = {}^tvw = \langle v, w \rangle. \tag{1.4}$$

よって, g は $\langle , \rangle$ を保つ.

次に, (2) $\Rightarrow$ (3) を示す. そのために, g が自然な内積 $\langle , \rangle$ を保つと仮定する. また, $g = (v_1 \cdots v_n)$ と表す. $\mathbb{R}^n$ の標準的な基底を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ とすると,

$$ge_i = (v_1 \cdots v_n)e_i = v_i. \tag{1.5}$$

よって, δ_{ij} をクロネッカーのデルタとすると,

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle ge_i, ge_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}. \tag{1.6}$$

すなわち, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である.

最後に, (3) $\Rightarrow$ (1) を示す. そのために, $g = (v_1 \cdots v_n)$ と仮定したとき, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底であると仮定する. すると,

$${}^tgg = {}^t(v_1 \cdots v_n)(v_1 \cdots v_n) = ({}^tv_iv_j) = (\delta_{ij}) = I_n. \tag{1.7}$$

また, 上の式と行列式の性質 $\det({}^tg) = \det(g)$ により $\det(g) \neq 0$ である. よって, $g \in \mathrm{O}(n)$ である. □

定義 1.5. 次で定義される $\mathrm{SO}(n)$ は線型リー群である. これを <u>特殊直交リー群</u> (special orthogonal Lie group) と呼ぶ:

$$\mathrm{SO}(n) := \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det g = 1, {}^tgg = I_n\}. \tag{1.8}$$

1.2 リー代数の定義

この節では, リー代数を定義し $\mathfrak{o}(n)$ というリー代数を紹介する.

定義 1.6. 実線型空間 $\mathfrak{g}$ と写像 $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を考える. このとき, 組 $(\mathfrak{g}, [,])$ が <u>リー代数</u> (Lie algebra) とは, 以下が成り立つこと:

(1) (双線型性) 写像 $[,]$ は双線型.

(2) (交代性) 任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して, $[X, Y] = -[Y, X]$.

(3) (ヤコビ律) 任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して, $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

定義 1.7. $M(n, \mathbb{R})$ に括弧積を $[X, Y] := XY - YX$ で定義したものはリー代数であり, その次元は n^2 である. これを <u>一般線型リー代数</u> (general linear Lie algebra) と呼び, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ で表す.

定義 1.8. リー代数 $\mathfrak{g}$ 内の部分集合 $\mathfrak{g}'$ が <u>リー部分代数</u> (Lie subalgebra) とは, 以下が成り立つこと:

(1) $\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ 内の線型部分空間.

(2) $\mathfrak{g}'$ は括弧積に関して閉じている. すなわち, 任意の $X, Y \in \mathfrak{g}'$ に対して, $[X, Y] \in \mathfrak{g}'$.

命題 1.9. リー部分代数は, リー代数である.

定義 1.10. 次で定義される $\mathfrak{o}(n)$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 内のリー部分代数であり, その次元は $n(n-1)/2$ である. これを 直交リー代数 (orthogonal Lie algebra) と呼ぶ:

$$\mathfrak{o}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid {}^t X + X = 0\}. \tag{1.9}$$

特に, 命題 1.9 により, $\mathfrak{o}(n)$ はリー代数になる.

1.3 リー代数の同型写像の定義

この節では, リー代数の同型写像を定義する.

定義 1.11. $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ をリー代数とする. 写像 $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ がリー代数の 同型写像 (isomorphism) とは, 以下が成り立つこと:

(1) f は 線型写像.

(2) f は全単射.

(3) 任意の $X, Y \in \mathfrak{g}_1$ に対して, $f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$.

定義 1.12. リー代数 $\mathfrak{g}$ から自分自身への同型写像を, 特に 自己同型写像 (automorphism) と呼び, 自己同型写像全体の集合を $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ と表す.

命題 1.13. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は群である.

2 $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))\backslash \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ の計算

この章では直交リー代数 $\mathfrak{o}(3)$ に付随する群である $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))$ と $\mathrm{O}(3)$ による $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ の両側剰余類を求める. この計算結果が本論文の主定理である.

定義 2.1. G を群, K, H を G の部分群とする. $g \in G$ が属する K と H による 両側剰余類 $[[g]]$ を次のように定義する:

$$[[g]] := KgH := \{kgh \mid k \in K, h \in H\}. \tag{2.1}$$

また, 商集合を $K\backslash G/H := \{[[g]] \mid g \in G\}$ で表す.

以下, 次のように記号を定義する:

$$\mathbb{R}^\times := \{c \cdot \mathrm{id} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \mid c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \tag{2.2}$$
$$\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) := \{c\varphi \mid c \in \mathbb{R}^\times, \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\}, \tag{2.3}$$
$$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$
$$\tag{2.5}$$

補題 2.2. $\mathfrak{o}(3)$ の基底 $\{y_1, y_2, y_3\}$ が存在し, 次を満たす:

$$[y_1, y_2] = y_3,\ [y_2, y_3] = y_1,\ [y_3, y_1] = y_2. \tag{2.6}$$

証明. 次のように y_1, y_2, y_3 を定める:

$$y_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, y_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

このとき, $\{y_1, y_2, y_3\}$ は $\mathfrak{o}(3)$ の基底である. また, 括弧積の条件は行列の計算により従う. □

以降, $\{y_1, y_2, y_3\}$ に関して, $\mathfrak{o}(3)$ と $\mathbb{R}^3$ を同一視する. 特に, $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3)) \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ とみなす.

本論文の目標は, 商集合 $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))\backslash \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ を求めることであるが, そのためにまず, $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))$ の群について調べる.

補題 2.3. 次が成り立つ:

$$\mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3)). \tag{2.8}$$

証明. 任意の $g \in \mathrm{SO}(3)$ をとり, $g := (a_{ij})$ とする. このとき, $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))$ を示す. つまり, 自己同型群の定義より, (1) g が線型, (2) g は全単射, (3) g が括弧積を保つことを示せばよい.

$g \in \mathrm{SO}(3)$ で, $\det g \neq 0$ を満たすことから (1), (2) は成り立つ.

次に, (3) すなわち, 以下を示す:

$$
{}^t g[gy_i, gy_j] = [y_i, y_j], \ (i, j) \in \{(1,2), (2,3), (3,1)\}. \tag{2.9}
$$

任意の $(i, j) \in \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ をとる.

$$
\begin{aligned}
{}^t g[gy_i, gy_j] &= {}^t g[\sum_{k=1}^{3} a_{ki} y_k, \sum_{k=1}^{3} a_{kj} y_k] \\
&= {}^t g((a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i})y_3 + (a_{2i}a_{3j} - a_{2j}a_{3i})y_1 + (a_{3i}a_{1j} - a_{3j}a_{1i})y_2) \\
&= (a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}){}^t g y_3 + (a_{2i}a_{3j} - a_{2j}a_{3i}){}^t g y_1 + (a_{3i}a_{1j} - a_{3j}a_{1i}){}^t g y_2 \\
&= \sum_{k=1}^{3} ((a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i})a_{3k} + (a_{2i}a_{3j} - a_{2j}a_{3i})a_{1k} + (a_{3i}a_{1j} - a_{3j}a_{1i})a_{2k}) y_k \\
&= \sum_{k=1}^{3} \det A(i, j, k) y_k.
\end{aligned}
$$

上の式での $A(i, j, k)$ は以下で定義されたものである:

$$
A(i, j, k) := \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2j} & a_{2k} \\ a_{3i} & a_{3j} & a_{3k} \end{pmatrix}. \tag{2.10}
$$

また, 計算により, $\det A(i, j, i) = \det A(i, j, i) = 0$ となるので,

$$
\sum_{k=1}^{3} \det A(i, j, k) y_k = \det A(i, j, k) y_k, \ k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\} \tag{2.11}
$$

となり, $k \neq i, j$ のとき $\det A(1,2,3) = \det A(2,3,1) = \det A(3,1,2) = \det g = 1$ となること及び括弧積の条件から, $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\det A(i, j, k) y_k &= y_k \\
&= [y_i, y_j]
\end{aligned}
$$

となる. したがって, (3) が示された. □

補題 2.4. 次が成り立つ:

$$
\mathrm{O}(3) = \{cg \mid c = \pm 1, g \in \mathrm{SO}(3)\}. \tag{2.12}
$$

証明. まず, ($\subset$) を示す. 任意の $h \in \mathrm{O}(3)$ をとる. $\mathrm{O}(3)$ の定義から ${}^t h h = I_n$ である. この両辺の行列式をとると $(\det {}^t h)(\det h) = \det I_n$ より, $\det h = \pm 1$ となる. $\det h = 1$ のとき, $h \in \mathrm{SO}(3) \subset$ (右辺) となり, $\det h = -1$ のとき, $-h \in \mathrm{SO}(3)$ より, $h = -(-h) \in$ (右辺) となることから, $\mathrm{O}(3) \subset \{cg \mid c = \pm 1, g \in \mathrm{SO}(3)\}$ が成り立つ.

また, ($\supset$) は明らかである. □

命題 2.5. 次が成り立つ:

$$\mathrm{O}(3) \subset \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3)). \tag{2.13}$$

証明. 任意の $g \in \mathrm{O}(3)$ をとる. $g \in \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))$ を示せばよい. 補題 2.4 より, ある $c \in \{-1, 1\}$, $h \in \mathrm{SO}(3)$ が存在し, $g = ch$ となる. このとき, $\mathbb{R}^{\times}$ の定義より $c \in \mathbb{R}^{\times}$, 補題 2.3 より $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))$ となり, $ch = g \in \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3)$ となる. □

以上より, $\mathrm{O}(3) \subset \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))$ が示されたが, 商集合 $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))\backslash\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ を求めるために, 次は, $\mathrm{O}(n)\backslash\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ を調べる.

補題 2.6. 任意の $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ に対して, ある $P \in \mathrm{O}(n)$ と, ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ が存在して, ${}^tP({}^tgg)P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

証明. 任意の $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ をとる. ${}^t({}^tgg) = {}^tgg$ より, ${}^tgg$ は対称行列である. 対称行列 ${}^tgg$ は直交行列により対角化できるので, ある $P \in \mathrm{O}(n)$ と, ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ が存在して, ${}^tP({}^tgg)P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ となる.

したがって, 任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して, $\lambda_i > 0$ を示せばよい. ここで, 任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ をとる. $y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の元で, i 成分が 1, i 以外の成分が 0 であるものとする. $x = Py$ とおくと,

$$\begin{aligned}
0 < {}^t(gx)(gx) &= {}^tx{}^tggx \\
&= {}^ty\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)y \\
&= \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \\
&= \lambda_i
\end{aligned}$$

となることから成り立つ. □

補題 2.7. 任意の $g, h \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ に対して, ${}^tgg = {}^thh$ ならば $gh^{-1} \in \mathrm{O}(n)$.

証明. 任意の $g, h \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ をとる. このとき,

$$\begin{aligned}
{}^t(gh^{-1})gh^{-1} &= {}^t(h^{-1}){}^tggh^{-1} \\
&= {}^t(h^{-1})({}^tgg)h^{-1} \\
&= {}^t(h^{-1})({}^thh)h^{-1} \\
&= {}^t(hh^{-1})(hh^{-1}) \\
&= {}^tI_nI_n \\
&= I_n.
\end{aligned}$$

以上の計算より, $gh^{-1} \in \mathrm{O}(n)$ となる . □

命題 2.8. 任意の $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ に対して, ある $k_1, k_2 \in \mathrm{O}(n)$ と, ある $b_1, \ldots, b_n > 0$ が存在して, $k_1gk_2 = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$. すなわち:

$$\mathrm{O}(n)\backslash\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{O}(n) = \{[[\mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)]] \mid b_i > 0\}. \tag{2.14}$$

証明. 任意の $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ をとる. 補題 2.6 より, ある $P \in \mathrm{O}(n)$ と, ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ が存在して, ${}^tP({}^tgg)P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ となる.

ここで, B, B' を次のように定義する:

$$B := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{2.15}$$

$$B' := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}). \tag{2.16}$$

また, $k_1 := B'{}^tPg^{-1}$, $k_2 := P$, $b_i := \sqrt{\lambda_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ とおき, $k_1 \in \mathrm{O}(n)$ を示す.

$$\begin{aligned} {}^tgg &= PB{}^tP \\ &= PB'B'{}^tP \\ &= {}^t(B'{}^tP)B'{}^tP. \end{aligned}$$

補題 2.7 より $k_1 = B'{}^tPg^{-1} \in \mathrm{O}(n)$ となる. よって,

$$\begin{aligned} k_1gk_2 &= B'{}^tPg^{-1}gP \\ &= B' \\ &= \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n) \end{aligned}$$

となることから, 成り立つ. □

命題 2.5 及び, 命題 2.8 を用いると次の定理が証明できる. この定理が, 本論文の主定理である.

定理 2.9. 次が成り立つ:

$$\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3)) \backslash \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) / \mathrm{O}(3) = \{[[g]] \mid g = \mathrm{diag}(1, a, b),\ a > 0,\ b > 0\}. \tag{2.17}$$

証明. まず, $(\supset)$ は明らかである.

次に $(\subset)$ を示す. 任意の $[[g]] \in \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3)) \backslash \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) / \mathrm{O}(3)$ をとる. ある $a > 0$, $b > 0$ が存在して, $[[g]] = [[\mathrm{diag}(1, a, b)]]$ となることを示せばよい. 命題 2.8 より, ある $k_1, k_2 \in \mathrm{O}(n)$ と, ある $b_1, b_2, b_3 > 0$ が存在して, $k_1gk_2 = \mathrm{diag}(b_1, b_2, b_3)$ となる. ここで,

$$a := \frac{b_2}{b_1},\ b := \frac{b_3}{b_1},\ c := \frac{1}{b_1} \tag{2.18}$$

とすると, $\mathbb{R}^\times$ の定義及び, 命題 2.5 より, $ck_1 \in \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))$ となる. また, 以下の計算をすると,

$$\begin{aligned} [[g]] &= [[ck_1gk_k]] \\ &= [[\frac{1}{b_1}\mathrm{diag}(b_1, b_2, b_3)]] \\ &= [[\mathrm{diag}(1, \frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_1})]] \\ &= [[\mathrm{diag}(1, a, b)]] \end{aligned}$$

となることから成り立つ. □

3　応用

この章では, 第 2 章での $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))\backslash \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ の計算結果を用いて, $\mathfrak{o}(3)$ のミルナー基底を求める定理を導く.

以下, n 次元リー代数 $\mathfrak{g}$ の基底を $\{e_1,\dots,e_n\}$ とし, 基底 $\{e_1,\dots,e_n\}$ に関して, $\mathfrak{g}$ と $\mathbb{R}^n$ を同一視する.

3.1　内積

この節では, 内積の定義を述べる.

定義 3.1. V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間, 写像 $\langle,\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ とする. V の任意の元 x,y,z, $\mathbb{R}$ の任意の元 α,β に対して, 写像 $\langle,\rangle$ が 内積(inner product) とは, 以下が成り立つこと:

(1) $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$.

(2) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$.

(3) $\langle x,x\rangle\geq 0$ かつ $\langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0$.

内積のなかで $a=(a_i), b=(b_i)\in\mathbb{R}^n$ に対して, 次で定義したものを $\mathbb{R}^n$ の標準内積と呼ぶ.

$$\langle a,b\rangle=\sum_{k=1}^{n} a_i b_i. \tag{3.1}$$

また, 標準内積を $\langle,\rangle_0$ と表す.

3.2　群作用

この節では, 群作用の定義を述べる. この節を通して, G を群とし, その単位元を e で表す. また M を集合とする.

定義 3.2. 写像 $\Phi : G\times M\to M$ に対して,

$$g.p := \Phi(g,p) \tag{3.2}$$

と表す. 写像 Φ が G の M への 群作用(group action) であるとは, 以下が成り立つこと:

(1) 任意の $g,h\in G$ および任意の $p\in M$ に対して $(gh).p=g.(h.p)$.

(2) 任意の $p\in M$ に対して, $e.p=p$.

ここで定義した群作用は, 厳密には 左群作用(left group action) と呼ばれるものである. 群 G が集合 M に作用することを, 記号 $G\curvearrowright M$ で表すことが多い.

定義 3.3. 群 G の集合 M への群作用が 推移的(transitive) とは, 次が成り立つこと: 任意の $p,q\in M$ に対して, $g.p=q$ となる $g\in G$ が存在する.

3.3　3 次直交リー代数のミルナー基底

この節では,$\mathfrak{o}(3)$ のミルナー基底を与える.

以下, $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ 上の内積全体の集合とし, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}}$ への作用を以下で定義する:

$$g.\langle\cdot,\cdot\rangle := \langle g^{-1}(\cdot), g^{-1}(\cdot)\rangle,\ (\langle,\rangle \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}},\ g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})). \tag{3.3}$$

命題 3.4. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}}$ への作用は推移的.

証明. 任意の $\langle,\rangle_p \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}}$ をとる. このとき, ある $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ が存在して, $g.\langle,\rangle_p = \langle,\rangle_0$ が成り立つことを示す. 内積に対して, 正規直交基底が定義できるので, $\langle,\rangle_p$ に関する正規直交基底を $\{p_1,\ldots,p_n\}$ とする. また, $\langle,\rangle_0$ に関する正規直交基底は $\{e_1,\ldots,e_n\}$ であった. ここで, $\{p_1,\ldots,p_n\}$ から $\{e_1,\ldots,e_n\}$ への基底変換を表す行列を $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ とする. すなわち, $g(p_i) = e_i$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$ を満たすものとする. 任意に $x, y \in \mathfrak{g}$ をとる. このとき, $g.\langle x,y\rangle_p = \langle x,y\rangle_0$ が成り立つことを示せばよい.

$\mathfrak{g}$ は実線形空間なので, ある $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{R}$ が存在して, 次が成り立つ:

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k,\ y = \sum_{l=1}^{n} b_l e_l. \tag{3.4}$$

以上を用いて, 式変形すると,

$$\begin{aligned}
g.\langle x,y\rangle_p &= g.\langle \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \sum_{l=1}^{n} b_l e_l\rangle_p \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k b_l g.\langle e_i, e_j\rangle_p \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k b_l \langle g^{-1}(e_i), g^{-1}(e_j)\rangle_p \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k b_l \langle p_i, p_j\rangle_p \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= \langle x,y\rangle_0
\end{aligned}$$

となり, 成り立つ. □

また, 以下のように記号を定める:

$$[\langle,\rangle] := \{c\varphi.\langle,\rangle \mid c \in \mathbb{R}^\times, \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\}, \tag{3.5}$$

$$\mathbb{R}^\times\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}} := \{[\langle,\rangle] \mid \langle,\rangle \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}}\}. \tag{3.6}$$

$\mathbb{R}^\times\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}}$ と第 2 章の $\mathbb{R}^\times\mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))\backslash\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ の関係は以下のとおりである.

定義 3.5. 次の式を満たす $U \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ を <u>代表系</u>(system of representives) という:

$$\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}} = \{[h.\langle,\rangle_0] \mid h \in U\}. \tag{3.7}$$

命題 3.6. $U \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ は以下を満たすとする:

$$\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(n) = \{[[g]] \mid g \in U\}. \tag{3.8}$$

このとき, U は $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}}$ の代表系.

証明. 以下の式を示せばよい:

$$\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}} = \{[h.\langle,\rangle_0] \mid h \in U\}. \tag{3.9}$$

まず, $(\supset)$ は明らかである.
次に, $(\subset)$ を示す. 任意の $[\langle,\rangle] \in \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}}$ をとる. 命題 3.4 より, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}}$ への作用は推移的であるので, ある $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ が存在して, $\langle,\rangle = g.\langle,\rangle_0$ となる. また, 仮定から, ある $\varphi \in \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $p \in \mathrm{O}(n)$, $q \in U$ が存在し, $g = \varphi q p$ となる. 次に, 命題 1.4 を用いて式変形を行うと,

$$\begin{aligned}
[\langle,\rangle] &= [g.\langle,\rangle_0] \\
&= [\varphi q p.\langle,\rangle_0] \\
&= [qp.\langle,\rangle_0] \\
&= [q.\langle,\rangle_0]
\end{aligned}$$

となり, $[\langle,\rangle] \in \{[h.\langle,\rangle_0] \mid h \in U\}$ が成り立つ. □

以下の定理は, ミルナー基底の生成に必要な定理である.

定理 3.7 ([3])**.** U を $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}}$ の代表系とする. 任意の $\langle,\rangle \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}}$ に対して, ある $h \in U, \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}), k > 0$ が存在し, $\{\varphi h e_1, \ldots, \varphi h e_n\}$ は $\mathfrak{g}$ の $k\langle,\rangle$ に関する正規直交基底となる.

証明. 任意の $\langle,\rangle \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}}$ をとる. U は $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\backslash\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{g}}$ の代表系であるので, 代表系の定義より, ある $h \in U$ が存在し $[\langle,\rangle] = [h.\langle,\rangle_0]$ が成り立つ. また剰余類の定義から, ある $c \in \mathbb{R}^{\times}, \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ が存在し, $\langle,\rangle = (c\varphi h).\langle,\rangle_0$ が成り立つ.

ここで, $k := c^2 > 0$ とする. すると内積及び作用の定義から, $0 < i, j < n$ に対して,

$$\begin{aligned}
k\langle \varphi h e_i, \varphi h e_j\rangle &= c^2\langle \varphi h e_i, \varphi h e_j\rangle \\
&= c^2(c\varphi h).\langle \varphi h e_i, \varphi h e_j\rangle_0 \\
&= c^2\langle (c\varphi h)^{-1}\varphi h e_i, (c\varphi h)^{-1}\varphi h e_j\rangle_0 \\
&= c^2 \cdot c^{-2}\langle (\varphi h)^{-1}\varphi h e_i, (\varphi h)^{-1}\varphi h e_j\rangle_0 \\
&= \langle e_i, e_j\rangle_0 \\
&= \delta_{ij}
\end{aligned}$$

となり, $\{\varphi h e_1, \cdots, \varphi h e_n\}$ は $\mathfrak{g}$ の $k\langle,\rangle$ に関する正規直交基底となる. □

定理 3.7 を用いて, ミルナー基底を生成する.

定理 3.8. 任意の $\mathfrak{o}(3) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}(3)}$ に対して, ある $a > 0$, $b > 0$, $k > 0$, $k\langle , \rangle$ に関する正規直交基底 $\{x_1, x_2, x_3\}$ が存在し, 次が成り立つ:

$$[x_1, x_2] = \frac{a}{b}x_3,\ [x_2, x_3] = abx_1,\ [x_3, x_1] = \frac{b}{a}x_2. \tag{3.10}$$

証明. 任意の $\mathfrak{o}(3) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}(3)}$ をとる. また, $U := \{\mathrm{diag}(1, a, b) \mid a > 0,\ b > 0\}$ とする. 定理 2.9 より, 次が成り立つ:

$$\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))\backslash \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{O}(3) = \{[[g]] \mid g \in U\}. \tag{3.11}$$

命題 3.6 より, U は $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3))\backslash\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{o}(3)}$ の代表系であるので, 定理 3.7 を $\mathfrak{o}(3)$ に適用すると, ある $h = \mathrm{diag}(1, a, b) \in U, \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(3)), k > 0$ が存在し, $\{\varphi hy_1, \varphi hy_2, \varphi hy_3\}$ は $\mathfrak{o}(3)$ の $k\langle , \rangle$ に関する正規直交基底となる.
$x_i := \varphi hy_i (i = 1, 2, 3)$ とおく. 以下の括弧積を計算する:

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2] &= [\varphi hy_1, \varphi hy_2] \\
&= \varphi[hy_1, hy_2] \\
&= \varphi[y_1, ay_2] \\
&= \varphi(ay_3) \\
&= a\varphi(y_3) \\
&= a\varphi(\frac{1}{b}hy_3) \\
&= \frac{a}{b}(\varphi hy_3) \\
&= \frac{a}{b}x_3.
\end{aligned}$$

$[x_2, x_3], [x_3, x_1]$ についても同様である. □

定理 3.8 の式 (3.10) の $\{x_1, x_2, x_3\}$ はミルナー基底と呼ばれるものである. 本論文で与えたミルナー基底は参考文献 [4] での方法とは異なる方法で与えられたものである.

参考文献

[1] 田丸 博士: 集合としての対称空間, preprint.

[2] 田丸 博士: 多様体としての対称空間, preprint.

[3] Hashinaga, T., Tamaru, H., Terada, K.: *Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups*, J. Math. Soc. Japan, to appear.

[4] Milnor, J.: *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Advances in Math. **21** (1976), no. 3, 293–329.