1　幾何学 A (2014/04/10): 概要説明

概要説明

幾何学 A および同演習では, 多様体について学ぶ. 多様体とは, (なめらかな) 曲線や曲面の一般化であり, 位相空間に対して「微分が定義できるような条件を課したもの」である. この講義では, 曲線や曲面の話題から出発して, 以下の流れに沿って, 多様体論の基礎的な部分を解説する:

[1] 曲線
[2] 曲面
[3] 多様体

講義について

講義では, 毎回プリントを配布し, それに沿って講義を行います. 教科書として「多様体の基礎」(松本幸夫, 東京大学出版会, 1988) を指定していますが, 教科書の通りに進む訳ではありません.

試験・レポートについて

中間試験と期末試験を行う予定です. 試験は, 講義と演習共通で行います. どちらか一方しか履修していない学生も, 原則として試験は受けて頂きます. また, 試験の前には「試験問題を予想せよ」というレポートを出す予定です.

成績に関して

講義と演習の合否は連動します. 合否は, 主に試験の点数と演習での発表点によって決めますが, レポートの点数も考慮します. 演習での発表点は, 次で定義します:

$$\text{演習での発表点} := (\text{発表した問題数} - 1) \times 10\ \text{点}.$$

ただし適当なところで上限は設ける予定です. 発表点を上のようにする代わりに, 今回は「演習で一回も発表していない学生に単位は認めない」という規則は撤廃します.

情報

この講義に関する情報については, 下記の webpage を参照して下さい. 講義中に配布するプリントや試験などの情報が, 適宜記載される予定です.

`http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~tamaru/kougi/14kika-a.html`

2　幾何学 A (2014/04/10): 平面曲線 (1)

曲線の助変数表示

以下, I は $\mathbb{R}$ の開集合を表すものとする.

定義 2.1. 写像 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が なめらかな曲線 とは, 次が成り立つこと:

(i) c は C^∞ 級.

(ii) $\forall t \in I$, $c'(t) \neq (0, 0)$.

ベクトル $c'(t)$ を 速度ベクトル と呼ぶ. 像 $c(I)$ のことをなめらかな曲線と呼び, 写像 c あるいは $c(t)$ をその 助変数表示 と呼ぶこともある.

例 2.2. 次の (1), (2) はなめらかな曲線であり, (3) はなめらかな曲線ではない:

(1) (半径 $r > 0$ の円) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$.

(2) (C^∞ 級関数 f のグラフ) $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, f(t))$.

(3) ($y = |x|$ のグラフ) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, |t|)$.

曲線の曲率: 定義

定義 2.3. なめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2$ に対して, 次の $\kappa(t)$ を 曲率 と呼ぶ:

$$\kappa(t) := \det(c'(t), c''(t))/|c'(t)|^3.$$

曲線を $c(t) = (x(t), y(t))$ とおくと, 曲率の定義式の分母と分子は, それぞれ以下で表される:

$$\det(c'(t), c''(t)) = \det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t),$$
$$|c'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

例 2.4. 半径 $r > 0$ の円の曲率に対して, 以下が成り立つ:

(1) $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$ とすると, $\kappa(t) = 1/r$.

(2) 定数 $a \neq 0$ を用いて $c(t) = (r \cos(at), r \sin(at))$ とすると, $a > 0$ なら $\kappa(t) = 1/r$, $a < 0$ なら $\kappa(t) = -1/r$.

問題 2.5. 半径 $r > 0$ の円の上半分を $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ のグラフだと思って, $c(t) = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$ を考える (ただし $t \in (-r, r)$). このときの曲率 $\kappa(t)$ を求めよ.

問題 2.6. 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ の曲率を計算し, 曲率の絶対値が最大になる点と最小になる点を求めよ. ただし $a > b > 0$ とする.

3　幾何学 A (2014/04/17): 平面曲線 (2)

復習: 合成写像の微分

ここでは, 合成写像の微分の公式を復習する. いわゆるチェインルールだが, ヤコビ行列を使って書く方法が便利 (かつ覚えやすい) と思われる.

定義 3.1. C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ に対し, $\mathbb{R}^m$ の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ で表し, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ とおく. このとき, f の $p \in \mathbb{R}^m$ における ヤコビ行列 を次で定義する:

$$(Jf)_p := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

命題 3.2 (合成写像の微分)**.** C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ および $p \in \mathbb{R}^m$ に対して, 次が成り立つ: $(J(g \circ f))_p = (Jg)_{f(p)}(Jf)_p$.

例 3.3. 上の命題で $m = n = l = 1$ のとき, $y = g(u)$, $u = f(x)$ とすると, 次が成り立つ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

曲率の性質: パラメータ変換での不変性

ここでは, 曲線の曲率が助変数表示の取り方に依存しないことを示す. 直感的には, 道路の曲がり具合は車でどう走ろうが変わらない, ということと同様. 以下では I, I' を $\mathbb{R}$ の開集合とする.

定義 3.4. 写像 $t : I' \to I$ が 正のパラメータ変換 であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) 全単射.
(ii) C^∞ 級.
(iii) $\forall s \in I'$, $t'(s) > 0$.

上記の条件のうち, (iii) を「$\forall s \in I'$, $t'(s) < 0$」に置き換えたものを負のパラメータ変換と呼ぶ. 正のパラメータ変換は, 車の走行で言うと「走り方は変えても方向は変えない」ことに対応する.

命題 3.5. $c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とし, $t : I' \to I$ を正のパラメータ変換とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $c \circ t : I' \to \mathbb{R}^2$ はなめらかな曲線.
(2) $\forall s \in I'$, $\kappa_c(t(s)) = \kappa_{c \circ t}(s)$.

すなわち, 曲線の曲率は正のパラメータ変換で不変である. また, 負のパラメータ変換をすると曲率は -1 倍される. ここで, κ_c と $\kappa_{c \circ t}$ はそれぞれ c と $c \circ t$ の曲率を表す.

4　幾何学 A (2014/04/17): 平面曲線 (3)

曲率の意味: 加速度

ここでは, 助変数表示を車の走行と考え, 曲率は「一定の速度で走ったときの加速度」を表していることを示す. 当然ながら, 大きな加速度を感じる道路の方が, 大きく曲がっている.

定義 4.1. $c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする. このとき, c が <u>弧長パラメータ表示</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall t \in I$, $|c'(t)| = 1$.

弧長パラメータ表示することが「一定の速度で走る」ことに対応する. 次に, 「どんな道路でも一定の速度で走ることができる」ことを示す.

命題 4.2. $c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする. このとき, 次が成り立つ: $\exists t = t(s)$ (正のパラメータ変換) : $c \circ t$ は弧長パラメータ表示.

すなわち, どんな道路でも速さ 1 で走ることができる. そのときの加速度を表示するために, 次のベクトルを用いる.

定義 4.3. $c(t) = (x(t), y(t))$ を弧長パラメータ表示とする. このとき, $n(t) := (-y'(t), x'(t))$ を (左向きの) <u>単位法ベクトル</u> と呼ぶ.

命題 4.4. $c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とすると, 次が成り立つ: $\forall t \in I$, $c''(t) = \kappa_c(t) n(t)$.

特に $|c''| = |\kappa_c|$ が成り立つ. すなわち, 曲率の絶対値は, 加速度ベクトル c'' の大きさと一致することが示された. これが曲率の意味 (の一つの解釈) である.

5　幾何学 A (2014/04/24): 平面曲線 (4)

前回の補足: 逆写像定理

全てのなめらかな曲線は弧長パラメータ表示できる. これを示すためには, 次の逆写像定理 (逆関数定理と呼ぶこともある) を用いる.

定理 5.1 (逆写像定理)**.** $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ を C^∞ 級写像とし, $p \in \mathbb{R}^m$ とする. もし $\det(Jf)_p \neq 0$ ならば, f は p の周りで C^∞ 級の逆写像を持つ.

例えば $m = 1$ のとき, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して $f'(p) \neq 0$ とする. すると f は p の周りで単調増加または単調減少. 従って全単射なので, 逆関数が存在する. 逆写像定理は, この逆関数が C^∞ 級であることを主張している.

命題 5.2 (再掲)**.** $c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする. このとき, 次が成り立つ: $\exists t = t(s)$ (正のパラメータ変換) : $c \circ t$ は弧長パラメータ表示.

これを示すために, $t_0 \in I$ を一つ取り, $c(t_0)$ から $c(t)$ への道のりを $s(t)$ とする:

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} |c'(t)| dt.$$

補題 5.3. 上記の $s = s(t)$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) $s'(t) = |c'(t)| > 0$. 従って s は C^∞ 級の逆関数 $t = t(s)$ を持つ.

(2) $t = t(s)$ は正のパラメータ変換である.

(3) $c \circ t$ は弧長パラメータ表示.

6　幾何学 A (2014/04/24): 平面曲線 (5)

曲線の陽関数表示

なめらかな曲線 $c(t)$ を $y = f(x)$ などのグラフで表すことを陽関数表示と呼ぶ. グラフの定義を, 念のために正確に述べておく.

定義 6.1. $f : I \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とする. このとき,

(1) $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\}$ を $\underline{y = f(x)\ \text{のグラフ}}$,
(2) $\{(f(y), y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in I\}$ を $\underline{x = f(y)\ \text{のグラフ}}$ と呼ぶ.

なめらかな曲線の定義の項で述べたように, グラフはなめらかな曲線である. 逆は, 一般には正しくない. 例えば, 円 $c(t) = (\cos t, \sin t)$ を一つのグラフで表すことはできない. しかしこのような場合でも, $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$ の 4 つのグラフを用いて表すことができる.

命題 6.2. $c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする. このとき, $c(I)$ は, 局所的にはグラフで表される. すなわち, 次が成り立つ: $\forall t_0 \in I, \exists I' \subset I$ (t_0 の開近傍) : $c(I')$ はグラフで表される.

証明. 方針だけを述べる. なめらかな曲線 $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ に対して, 次のようにおく:

$$x = c_1(t), \quad y = c_2(t).$$

もし t_0 の近くで c_1 に C^∞ 級の逆写像があれば, $y = c_2 \circ c_1^{-1}(x)$ と表すことができる (c_2 についても同様). 従って, このような逆写像の存在を示せば良い. このことは, 逆写像定理から従う. □

なめらかな曲線は, 局所的にグラフで表すことにより, 概形を描くことが (原理的には) できる. 実際, この考え方により, 以下の曲線の概形を描くことができる.

例 6.3. 次は C^∞ 級写像だが, なめらかな曲線ではない: $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3, t^2)$. 実際, この曲線は $c(0) = (0, 0)$ において尖っている.

上記の例は, なめらかな曲線の定義に $c'(t) \neq (0, 0)$ が必要であることの, 一つの証拠になっている.

例 6.4. 次はなめらかな曲線: $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. この曲線は $c(\pm 1) = (0, 0)$ において自己交叉する.

7　幾何学 A (2014/05/01): 平面曲線 (6)

曲線の陰関数表示: 定義と例

単位円を表すためには, $x^2 + y^2 = 1$ という表示を用いることができる. このような表示方法を, なめらかな曲線の陰関数表示と呼ぶ.

定義 7.1. U を $\mathbb{R}^2$ 内の開集合とし, $F : U \to \mathbb{R}$ とする. このとき, $F(x,y) = 0$ が (なめらかな曲線の) <u>陰関数表示</u> であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\exists (x,y) \in U \, : \, F(x,y) = 0$.

(ii) F は C^∞-級.

(iii) $\forall (x,y) \in U \ (F(x,y) = 0), \ \ (JF)_{(x,y)} \neq (0,0)$.

例 7.2. 以下の F に対して, $F(x,y) = 0$ はなめらかな曲線の陰関数表示:

(1) $F(x,y) = ax + by + c$, ただし $(a,b) \neq (0,0)$.

(2) $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

例 7.3. 以下の F に対して, $F(x,y) = 0$ はなめらかな曲線の陰関数表示でない:

(1) $F(x,y) = c$, ただし c は定数.

(2) $F(x,y) = xy$.

復習: 陰関数定理

陰関数表示 $F(x,y) = 0$ から陽関数表示を得るために, 次の陰関数定理を用いる. 簡単のために, y に関するものだけを述べるが, x に関しても同様のことが成り立つ.

定理 7.4 (陰関数定理)**.** $F : U \to \mathbb{R}$ を C^∞-級関数とし, $F(a,b) = 0$ とする. もし $F_y(a,b) \neq 0$ ならば, $F(x,y) = 0$ は (a,b) の周りで $y = f(x)$ のグラフで表される.

ここで, F_y は $F(x,y)$ の y による偏導関数を表す. 陰関数定理の主張を確かめるために, 直線と円に対して適用してみると, 以下のようになる.

例 7.5. 以下が成り立つ:

(1) $ax + by + c = 0$ は, $b \neq 0$ ならば $y = -(a/b)x - (c/b)$ と表せる.

(2) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 上の点 (a,b) を考える. もし $b \neq 0$ ならば, (a,b) の近傍で $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ いずれかのグラフで表せる.

8　幾何学 A (2014/05/01): 平面曲線 (7)

曲線の陰関数表示: 性質

曲線の陽関数表示と陰関数表示の間には, 次のような関係がある.

命題 8.1. グラフとなめらかな曲線の陰関数表示は, 以下の意味で対応する:

(1) グラフは, 陰関数表示することができる.

(2) $F(x,y)=0$ をなめらかな曲線の陰関数表示とすると, 局所的にはグラフで表される (すなわち, $\forall(a,b)\in U$ $(F(a,b)=0)$, $\exists U'\subset U$ $((a,b)$ の開近傍$)$: $\{(x,y)\in U' \mid F(x,y)=0\}$ はグラフで表される).

例 8.2. 以下の F に対して, $F(x,y)=0$ はなめらかな曲線の陰関数表示でない:

(1) $F(x,y)=x^2-y^3$. この曲線は $(0,0)$ において尖っている.

(2) $F(x,y)=y^2-x^3-x^2$. この曲線は $(0,0)$ において自己交叉する.

なめらかな曲線の助変数表示は自己交叉を許していたが, 上の例から分かるように, 陰関数表示は自己交叉を許さない.

9　幾何学 A (2014/05/15): 曲面 (1)

曲面の助変数表示

以下, D は $\mathbb{R}^2$ の (空集合でない) 開集合を表すものとする.

定義 9.1. 写像 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ が (なめらかな曲面の) 助変数表示 とは, 次が成り立つこと:

(i) φ は C^∞ 級.

(ii) $\forall (u,v) \in D$, $\mathrm{rank}\,(J\varphi)_{(u,v)} = 2$.

ここで rank は行列の階数を表す. 一般に, (2,3)-行列 $A = (x, y)$ に対して, $\mathrm{rank}(A) = 2$ となる必要十分条件は, $\{x, y\}$ が一次独立となることである.

例 9.2. 以下は曲面の助変数表示:

(1) (xy 平面) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (u, v, 0)$.

(2) $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ をなめらかな曲線としたとき, $\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (x(u), y(u), v)$.

上の例の (2) は, c を xy 平面内の曲線だと思って, その各点に z 軸に平行な直線を付け足したものである. 次に, 助変数表示でない例を挙げる. これらの例から分かるように, 定義の条件 (ii) を「$(J\varphi)_{(u,v)}$ は零行列でない」とすると, 条件が弱くなりすぎる.

例 9.3. 以下は曲面の助変数表示でない:

(1) (一点) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (0,0,0)$.

(2) (曲線) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (x(u), y(u), z(u))$.

(3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (u^3, u^2, v)$.

命題 9.4. $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto c(t) = (x(t), z(t))$ をなめらかな曲線とし, 次をみたすと仮定する: $\forall t \in I$, $x(t) > 0$. このとき, 次は曲面の助変数表示である:

$$\varphi : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

上のように定義された φ を, 曲線 c の 回転面 と呼ぶ. これは, c を xz 平面内の曲線だと思って, それを z 軸を中心に回転させたものに他ならない. 以下は, 回転面の簡単な例.

例 9.5. 以下は曲面の助変数表示である:

(1) (円柱) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$.

(2) (球面) $\varphi : \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$.

(3) (トーラス) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (\cos u(2 + \cos v), \sin u(2 + \cos v), \sin v)$.

10　幾何学 A (2014/05/22): 曲面 (2)

曲面の陽関数表示

なめらかな曲面を $z = f(x, y)$ などのグラフで表すことを陽関数表示と呼ぶ. 曲線の場合と同様に, グラフは以下のように定義される.

定義 10.1. $f : D \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とする. このとき,

(1) $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\}$ を $z = f(x, y)$ のグラフ と呼ぶ.

(2) $x = f(y, z)$ や $y = f(x, z)$ のグラフも同様に定義する.

例 10.2. $z = (x^2/a^2) + (y^2/b^2)$ のグラフを 楕円放物面 と呼ぶ. また, $a = b$ の場合を特に 回転放物面 と呼ぶ.

容易に分かるように, グラフはなめらかな曲面である. すなわち, 陽関数表示から助変数表示を得ることができる.

命題 10.3. グラフは, なめらかな曲面の助変数表示を持つ. 例えば, $f : D \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とし, $z = f(x, y)$ のグラフを考えると, 次は助変数表示: $\varphi : D \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$.

逆に, 助変数表示から陽関数表示を得ることも, 局所的にはできる. そのことを示すためには, 曲線の場合と同様に, 次の逆写像定理を用いる.

定理 10.4 (逆写像定理)**.** $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とし, $p \in \mathbb{R}^n$ とする. このとき, もし $\det(J\varphi)_p \neq 0$ ならば, φ は p の近傍で C^∞ 級の逆写像をもつ.

上記の逆写像定理は一般の次元で述べられている. 特にその $n = 2$ の場合を適用することにより, 次を示すことができる.

命題 10.5. $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面の助変数表示とする. このとき, $\varphi(D)$ は局所的にはグラフで表される. すなわち, 次が成り立つ: $\forall (u, v) \in D$, $\exists D' \subset D$ ((u, v) の開近傍) : $\varphi(D')$ はグラフで表される.

11　幾何学 A (2014/05/22): 曲面 (3)

曲面の陰関数表示

$\mathbb{R}^3$ 内の単位球は $x^2+y^2+z^2=1$ と表示することができる．このような表示方法を, なめらかな曲面の陰関数表示と呼ぶ.

定義 11.1. U を $\mathbb{R}^3$ の開集合, $F : U \to \mathbb{R}$ を関数とする．このとき, $F(x,y,z)=0$ が (なめらかな曲面の) <u>陰関数表示</u> とは, 次が成り立つこと:

(i) $\exists (x,y,z) \in U : F(x,y,z)=0$.

(ii) F は C^∞ 級.

(iii) $\forall (x,y,z) \in U \ (F(x,y,z)=0), \ (JF)_{(x,y,z)} \neq (0,0,0)$.

例 11.2. 以下の F に対して, $F(x,y,z)=0$ はなめらかな曲面の陰関数表示:

(1) (平面) $F(x,y,z) := ax+by+cz+d$, ただし $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

(2) (円柱) $F(x,y,z) := x^2+y^2-1$.

(3) (球面) $F(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1$.

例 11.3. 次はなめらかな曲面の陰関数表示でない: $F(x,y,z)=y^2-x^3-x^2=0$.

曲線の場合と同様に, なめらかな曲面の陽関数表示と陰関数表示は対応する．まず, 陽関数表示から陰関数表示を得ることは容易.

命題 11.4. グラフは陰関数表示することができる．例えば, $f : D \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級とし, $z=f(x,y)$ のグラフを考える．このとき $F : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto z-f(x,y)$ に対して, $F(x,y,z)=0$ は陰関数表示.

逆に, 陰関数表示から陽関数表示を得ることも, 局所的にはできる．そのことを示すためには, 曲線の場合と同様に, 次の陰関数定理を用いる.

定理 11.5 (陰関数定理)**.** $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級とし, $(a,b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ は $F(a,b)=0$ をみたすとする．このとき, $\mathrm{rank}\,(JF|_{\{a\}\times\mathbb{R}^n})_{(a,b)} = n$ ならば, $F(x,y)=0$ は (a,b) の周りで $y=f(x)$ のグラフで表される.

上記の陰関数定理は一般の次元で述べられているが, $m=n=1$ の場合は, 曲線の項で紹介したものに他ならない．また, $m=2$, $n=1$ の場合を適用することにより, 次が示される.

命題 11.6. $F(x,y,z)=0$ をなめらかな曲面の陰関数表示とすると, 局所的にはグラフで表される．すなわち, 次が成り立つ: $\forall (a,b,c) \in U \ (F(a,b,c)=0)$, $\exists U' \subset U$ ((a,b,c) の開近傍) : $\{(x,y,z) \in U' \mid F(x,y,z)=0\}$ はグラフで表される.

12　幾何学 A (2014/05/29): 可微分多様体の定義 (1)

復習: 位相空間

可微分多様体は, 位相空間であって所定の性質をみたすものとして定義される. ここでは, 位相空間について, 後に必要となる部分を復習する.

定義 12.1. X を集合, $\mathcal{O}$ を X の部分集合族とする. このとき, $(X, \mathcal{O})$ が 位相空間 であるとは, 以下をみたすこと:

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(T2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(T3) $\forall O_\lambda \in \mathcal{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

命題 12.2. 以下が成り立つ:

(1) (X, d) を距離空間とする. このとき, その開集合全体の集合は位相である (これを $\mathcal{O}_d$ で表し, 距離から決まる位相 と呼ぶ).

(2) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $A \subset X$ とする. このとき, 次の $\mathcal{O}_A$ は A の位相である (これを $\mathcal{O}$ から決まる A の 相対位相 と呼ぶ): $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$.

(3) $(X_1, \mathcal{O}_1)$, $(X_2, \mathcal{O}_2)$ を位相空間とし, $\langle \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \rangle$ を $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ で生成される集合族とする. このとき, $\langle \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \rangle$ は $X_1 \times X_2$ の位相である (これを $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_1$ の 積位相 と呼ぶ).

(4) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $\pi : X \to Y$ を全射とする. このとき, 次の $\mathcal{O}^\pi$ は Y の位相である (これを π による Y の 商位相 と呼ぶ): $\mathcal{O}^\pi := \{O \subset Y \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}\}$.

13　幾何学 A (2014/05/29): 可微分多様体の定義 (2)

ハウスドルフ空間

可微分多様体の定義に登場する条件の一つに, ハウスドルフ性がある. そこで, ここではハウスドルフ空間に関する準備をする.

定義 13.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が ハウスドルフ空間 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x, y \in X$ $(x \neq y)$, $\exists O_x, O_y \in \mathcal{O}$: $x \in O_x$, $y \in O_y$, $O_x \cap O_y = \emptyset$.

命題 13.2. 以下が成り立つ:

(1) 距離から決まる位相はハウスドルフである.

(2) ハウスドルフ空間内の部分集合は, 相対位相に関してハウスドルフである.

(3) ハウスドルフ空間とハウスドルフ空間の直積は, 積位相に関してハウスドルフである.

従って, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は自然な位相に関してハウスドルフであり, その部分集合も相対位相に関してハウスドルフである.

ハウスドルフ空間の商位相は, 一般にハウスドルフになるとは限らない. 商位相から得られるハウスドルフ空間の例として, 射影空間を挙げる.

定義 13.3. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \{\ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \ell$ は 1 次元線型部分空間 $\}$ を 実射影空間 と呼ぶ.

補題 13.4. $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の上の同値関係を次で定める: $x \sim y :\Leftrightarrow \exists c \neq 0 : x = cy$. このとき, 商集合 $X/\sim$ と $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の間に全単射が存在する.

以下では $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = X/\sim$ と同一視する. X には $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的な位相から決まる相対位相を入れ, $X/\sim$ には自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ による商位相を入れる.

命題 13.5. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は上の位相に関してハウスドルフである.

14　幾何学 A (2014/06/05): 可微分多様体の定義 (3)

座標近傍

多様体は, ハウスドルフ空間であって, 局所的には $\mathbb{R}^m$ 内の開集合と同相なものとして定義される. この「局所的には $\mathbb{R}^m$ 内の開集合と同相」という条件を定式化したものが, 座標近傍である.

定義 14.1. M を位相空間とし, $U \subset M$, $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ を考える. このとき (U, φ) が M の m 次元 座標近傍 とは, 以下が成り立つこと:

(i) U は M 内の開集合.
(ii) $\varphi(U)$ は $\mathbb{R}^m$ 内の開集合.
(iii) $\varphi : U \to \varphi(U)$ は同相写像.

例 14.2. 以下が成り立つ:

(1) U を $\mathbb{R}^m$ 内の開集合, $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ を包含写像とする. このとき (U, φ) は $\mathbb{R}^m$ の m 次元座標近傍.
(2) $U := \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}$ とし, $\varphi : U \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ とおく. このとき (U, φ) は円周 S^1 の 1 次元座標近傍.
(3) $U := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$ とし, $\varphi : U \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$ とおく. このとき (U, φ) は球面 S^2 の 2 次元座標近傍.

位相多様体

位相多様体は, ハウスドルフ空間であって, (どの点の周りでも) 局所的には $\mathbb{R}^m$ 内の開集合と同相なものとして定義される.

定義 14.3. M を位相空間とする. このとき, M が m 次元 位相多様体 とは, 次が成り立つこと:

(i) M はハウスドルフ空間,
(ii) $\forall p \in M$, $\exists (U, \varphi)$: m 次元座標近傍 s.t. $p \in U$.

命題 14.4. M をハウスドルフ空間とする. このとき, M が m 次元位相多様体であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと:

(ii)' $\exists \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$: $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆であり, 各 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ は m 次元座標近傍.

条件 (ii)' を満たす $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を 局所座標系 と呼ぶ.

15　幾何学 A (2014/06/05): 可微分多様体の定義 (4)

位相多様体 (続き)

例 15.1. 以下が成り立つ:

(1) U を $\mathbb{R}^m$ 内の開集合とする. このとき U は m 次元位相多様体.

(2) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ は位相多様体ではない.

(3) 円周 S^1 は 1 次元位相多様体.

(4) 球面 S^2 は 2 次元位相多様体.

円周 S^1 の局所座標系を作るためには, S^1 を 4 つのグラフの和集合として表せば良い. すなわち, 以下で定義される $\{(U_x^\pm, \varphi_x^\pm), (U_y^\pm, \varphi_y^\pm)\}$ が局所座標系である:

$$\begin{aligned}
U_x^+ &:= \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}, \quad \varphi_x^+ : U_x^+ \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y, \\
U_x^- &:= \{(x, y) \in S^1 \mid x < 0\}, \quad \varphi_x^- : U_x^- \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y, \\
U_y^+ &:= \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}, \quad \varphi_y^+ : U_y^+ \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x, \\
U_y^- &:= \{(x, y) \in S^1 \mid y < 0\}, \quad \varphi_y^- : U_y^- \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x.
\end{aligned}$$

座標変換

可微分多様体は, 位相多様体であって, さらに付加的な条件をみたすものとして定義される. その付加的な条件は, 座標変換に関するものである.

定義 15.2. M を位相多様体とし, (U, φ), (V, ψ) を座標近傍とする. $U \cap V \neq \emptyset$ のとき, 次の写像を (U, φ) から (V, ψ) への <u>座標変換</u> という:

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V).$$

$(U, \varphi) = (V, \psi)$ のときには, 座標変換は恒等写像である. これを自明な座標変換と呼ぶ.

例 15.3. 上で定義した S^1 の座標近傍を考える. このとき, (U_x^+, φ_x^+) から (U_y^+, φ_y^+) への座標変換は次で与えられる:

$$\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1} : (0, 1) \to (0, 1) : y \mapsto \sqrt{1 - y^2}.$$

16　幾何学 A (2014/06/12): 可微分多様体の定義 (5)

座標近傍 (補足)

命題 16.1. グラフは座標近傍になる. すなわち, D を $\mathbb{R}^m$ の開集合, $f : D \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とするとき, 次で定義される (U, φ) は U の m 次元座標近傍:

$$U := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid x \in D\}, \quad \varphi : U \to \mathbb{R}^m : (x, y) \mapsto x.$$

このことから, グラフが位相多様体であることも直ちに従う.

座標変換 (再掲)

可微分多様体は, 位相多様体であって, さらに付加的な条件をみたすものとして定義される. その付加的な条件は, 座標変換に関するものである.

定義 16.2. M を位相多様体とし, (U, φ), (V, ψ) を座標近傍とする. $U \cap V \neq \emptyset$ のとき, 次の写像を (U, φ) から (V, ψ) への <u>座標変換</u> という:

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap V)} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V).$$

$(U, \varphi) = (V, \psi)$ のときには, 座標変換は恒等写像である. これを自明な座標変換と呼ぶ.

例 16.3. 上で定義した S^1 の座標近傍を考える. このとき, (U_x^+, φ_x^+) から (U_y^+, φ_y^+) への座標変換は次で与えられる:

$$\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1} : (0, 1) \to (0, 1) : y \mapsto \sqrt{1 - y^2}.$$

可微分多様体の定義

定義 16.4. M が <u>m 次元可微分多様体</u> であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) M は m 次元位相多様体.
(ii) 全ての座標変換が C^∞ 級.

例 16.5. 以下が成り立つ:

(1) U を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合とする. このとき U は m 次元可微分多様体.
(2) S^1 は 1 次元可微分多様体.
(3) グラフは可微分多様体である. すなわち, D を $\mathbb{R}^m$ 内の開集合, $f : D \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とすると, f のグラフは m 次元可微分多様体.

17　幾何学 A (2014/06/12): 可微分多様体の定義 (6)

可微分多様体の例

ここでは, n 次元球面 $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ を考える. S^n が n 次元可微分多様体であることを, $2(n+1)$ 個のグラフを用いて示す.

命題 17.1. S^n に対して, 次で定義される $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm) \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ は n 次元局所座標系:

$$\begin{aligned} U_i^+ &:= \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^{n+1} \mid x_i > 0\}, \\ U_i^- &:= \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^{n+1} \mid x_i < 0\}, \\ \varphi_i^\pm &: U_i^\pm \to \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

ここで $\widehat{x_i}$ は「x_i を抜く」ことを表す記号. 例えば $n = 2$, $i = 2$ のとき,

$$\varphi_2^+(x_1, x_2, x_3) = (x_1, \widehat{x_2}, x_3) = (x_1, x_3).$$

S^n が位相多様体になることは比較的容易に分かる. 実際 S^n は, $\mathbb{R}^{n+1}$ から決まる相対位相が入っているので, ハウスドルフであることが分かる. また, 各 $U_i^\pm$ はグラフになっているので, 座標近傍である. 従って, 座標変換が C^∞ 級であることを示すところが, 本質的な部分である.

中間試験について

中間試験を以下の要領で行う:

- 日時: 2014/06/26 の講義時間 (10:30–12:00).
- 場所: E102 (普段の教室とは違うので注意すること).
- 試験範囲: 2014/06/19 の講義でやったところまで.

また, 希望者は以下の課題を事前レポートとして提出しても良い. 提出する場合は, 2014/06/19 講義時に提出すること.

問題 17.2 (事前レポート問題)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する中間試験問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け. ただし, レポートの一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと. 表紙は不要.

(1) 曲線の曲率. (2) 曲線・曲面の表示. (3) 位相空間. (4) 多様体の定義.

18　幾何学 A (2014/06/19): 可微分多様体の定義 (7)

可微分多様体の例 (続き)

S^n の局所座標系のうち, 前に紹介したものとは異なるものを紹介する.

定義 18.1. S^n に対して, $p_\pm := (0, \ldots, 0 \pm 1) \in S^n$ とし, $U_\pm := S^n \setminus \{p_\pm\}$ とおく. このとき次の $\varphi_\pm$ を $p_\pm$ からの <u>立体射影</u> と呼ぶ:

$$\varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (1/(1 \mp x_{n+1}))(x_1, \ldots, x_n).$$

補題 18.2. 各 $x \in U_\pm$ に対して, $p_\pm$ と x を結ぶ直線と $\mathbb{R}^n$ との交点は $\varphi_\pm(x)$ である. ただしここで, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ としている.

補題 18.3. $(U_\pm, \varphi_\pm)$ は S^n の局所座標系である.

命題 18.4. S^n は $\{(U_\pm, \varphi_\pm)\}$ によって n 次元可微分多様体である.

次に実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ が可微分多様体であることを示す. $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ とし, $\pi : X \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ を自然な射影とする. また $\pi(x) = [x] = [x_1 : \cdots : x_{n+1}]$ を同次座標とする.

補題 18.5. 以下が成り立つ:

(1) $U_i := \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid x_i \neq 0\}$ は $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 内の開集合.
(2) 次は well-defined: $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n : [x_1 : \cdots : x_{n+1}] \mapsto (1/x_i)(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1})$.
(3) (U_i, φ_i) は $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の座標近傍.

命題 18.6. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は $\{(U_i, \varphi_i) \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ によって n 次元可微分多様体である.

19　幾何学 A (2014/06/26): 中間試験問題

注意

- 証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

参考: 定義や用語など

- $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ がなめらかな曲面の助変数表示
  $:\Leftrightarrow$ (i) φ は C^∞-級, (ii) $\forall (u,v) \in D$, $\mathrm{rank}(J\varphi)_{(u,v)} = 2$.
- なめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2$ の曲率とは, $\kappa := \det(c', c'')/|c'|^3$.
- $c : I \to \mathbb{R}^2$ がなめらかな曲線
  $:\Leftrightarrow$ (i) c は C^∞-級, (ii) $\forall t \in I$, $c'(t) \neq (0,0)$.
- ハウスドルフとは, 任意の二点が開集合で分けられること.
- $A \subset (X, \mathcal{O})$ の相対位相とは, $\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$.
- (U, φ) から (V, ψ) への座標変換とは, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$.

問題

[1] $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$ がなめらかな曲面の助変数表示であることを, 定義に従って示せ. (20 点)

[2] $\mathbb{R}^2$ 内において $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを考える (ただし $a \neq 0$). このグラフ上で曲率の絶対値が最大になる点を求めよ. (20 点)

[3] $c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線の助変数表示とする. このとき $c(I)$ は可微分多様体になるとは限らない. その理由を簡潔に述べよ. (20 点)

[4] $(X, \mathcal{O})$ をハウスドルフ位相空間とし, $A \subset X$ とする. このとき A に相対位相を入れた空間はハウスドルフであることを示せ. (20 点)

[5] S^2 を 2 次元球面とし, グラフによる座標近傍を考える. 例えば,

$$U_1^+ := \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_1 > 0\}, \quad \varphi_1^+ : U_1^+ \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3),$$
$$U_2^- := \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_2 < 0\}, \quad \varphi_2^- : U_2^- \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3).$$

(1) U_1^+ は S^2 内の開集合であることを示せ ($\mathbb{R}^3$ 内の開集合は既知として良い). (20 点)
(2) (U_2^-, φ_2^-) から (U_1^+, φ_1^+) への座標変換を求めよ (定義域と値域も明記すること). (20 点)

[6] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.

20 幾何学 A (2014/07/03): 可微分多様体の定義 (8)

可微分多様体の例 (続き)

補題 20.1 (再掲)**.** 以下が成り立つ:

(1) $U_i := \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid x_i \neq 0\}$ は $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 内の開集合.

(2) 次は well-defined: $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n : [x_1 : \cdots : x_{n+1}] \mapsto (1/x_i)(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1})$.

(3) (U_i, φ_i) は $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の座標近傍.

命題 20.2 (再掲)**.** $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は $\{(U_i, \varphi_i) \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ によって n 次元可微分多様体である.

可微分多様体と陰関数表示

$\mathbb{R}^2$ 内の曲線を考える. まず, $y = f(x)$ などのグラフは座標近傍だった. また, 陰関数表示 $F(x, y) = 0$ で与えられる曲線は, 局所的にはグラフで表すことができた. このことから次が従う.

命題 20.3. U を $\mathbb{R}^2$ 内の空でない開集合, $F : U \to \mathbb{R}$ とする. もし $F(x, y) = 0$ がなめらかな曲線の陰関数表示ならば, 次は 1 次元可微分多様体である: $M := \{(x, y) \in U \mid F(x, y) = 0\}$.

全く同様の方法により, 陰関数表示されたなめらかな曲面にも, グラフを用いることにより, 局所座標系が定義される. より高次元の場合に関しても同様に, 次が成り立つ.

定理 20.4. U を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合, $F : U \to \mathbb{R}^n$ を C^∞-級写像とし, $M := \{p \in U \mid F(p) = 0\}$ とおく. もし $\mathrm{rank}(JF)_p = k$ $(\forall p \in M)$ であるならば, M は $m - k$ 次元可微分多様体になる.

例 20.5. 以下が成り立つ:

(1) $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ は n 次元可微分多様体である.

(2) 陰関数表示されたなめらかな曲面は, 2 次元可微分多様体である.

(3) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \{g \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ は 3 次元可微分多様体である.

21　幾何学 A (2014/07/10): 多様体上の可微分写像 (1)

以下では特に断らない限り L, M, N を可微分多様体とする.

C^∞ 級関数

ここでは $f : M \to \mathbb{R}$ は連続関数を表すものとし, $p \in M$ とする.

定義 21.1. f が $\underline{p \text{ で } C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\exists(U, \varphi)$: p を含む座標近傍 s.t. $f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

命題 21.2. f が p で C^∞ 級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall(U, \varphi)$: p を含む座標近傍, $f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

定義 21.3. $f : M \to \mathbb{R}$ が (M 上で) $\underline{C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M$, f は p で C^∞ 級.

単位円 S^1 に対して, グラフによって局所座標系を定めた多様体を $(S^1)_{\mathrm{gr}}$, 立体射影によって局所座標系を定めた多様体を $(S^1)_{\mathrm{pr}}$ と便宜的に表す.

例 21.4. 円周 S^1 上の関数 $f : S^1 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$ を考える.

(1) 定義域を $(S^1)_{\mathrm{gr}}$ と考えたとき, f は C^∞ 級関数.

(2) 定義域を $(S^1)_{\mathrm{pr}}$ と考えたとき, f は C^∞ 級関数.

C^∞ 級写像

ここでは $f : M \to N$ は連続写像を表すものとし, $p \in M$ とする.

定義 21.5. f が $\underline{p \text{ で } C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\exists(U, \varphi)$: p を含む M の座標近傍, $\exists(V, \psi)$: $f(p)$ を含む N の座標近傍 s.t. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

命題 21.6. f が p で C^∞ 級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall(U, \varphi)$: p を含む座標近傍, $\forall(V, \psi)$: $f(p)$ を含む N の座標近傍 s.t. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

定義 21.7. f が (M 上で) $\underline{C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M$, f は p で C^∞ 級.

例 21.8. 恒等写像 $\mathrm{id} : (S^1)_{\mathrm{gr}} \to (S^1)_{\mathrm{pr}}$ および $\mathrm{id} : (S^1)_{\mathrm{pr}} \to (S^1)_{\mathrm{gr}}$ は共に C^∞ 級.

命題 21.9. C^∞ 級写像と C^∞ 級写像の合成は, C^∞ 級写像である.

22 幾何学 A (2014/07/17): 多様体上の可微分写像 (2)

C^∞ 級写像 (続き)

命題 22.1 (再掲)**.** C^∞ 級写像と C^∞ 級写像の合成は, C^∞ 級写像である.

C^∞ 同相

定義 22.2. 写像 $f : M \to N$ が <u>C^∞ 同相写像</u> であるとは, 次が成り立つこと:

(i) f は同相写像,

(ii) f と f^{-1} は C^∞ 級写像.

また, M と N の間に C^∞ 同相写像が存在するときに, M と N は <u>C^∞ 同相</u> であるという.

例 22.3. 次が成り立つ:

(1) $(S^1)_{\mathrm{gr}}$ と $(S^1)_{\mathrm{pr}}$ は C^∞ 同相.

(2) 円と楕円は C^∞ 同相.

期末試験について

期末試験を以下の要領で行う:

- 日時: 2014/07/31, 10:30–12:00.
- 場所: E211 (普段の教室とは違うので注意すること).
- 試験範囲: 2014/07/24 の講義でやったところまで.

また, 希望者は以下の課題を事前レポートとして提出しても良い. 提出する場合は, 2014/07/24 講義時に提出すること.

問題 22.4 (事前レポート問題)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する期末試験問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け. ただし, レポートの一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと. 表紙は不要.

(1) 多様体の定義. (2) C^∞ 級写像. (3) 接空間.

23　幾何学 A (2014/07/17): 接空間 (1)

可微分多様体の接空間を定義する．接空間は, 曲線の接線や曲面の接平面の一般化である．

曲線の接線

なめらかな曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ に対して, $c'(0)$ を速度ベクトルと呼んでいた．速度ベクトルを使って, 接線を定式化することができる．

定義 23.1. M をなめらかな平面曲線とし, $p \in M$ とする．このとき,

(1) $v \in \mathbb{R}^2$ が M の p での 接ベクトル とは, 次が成り立つこと:
$\exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2 : C^\infty$ 級 s.t. $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$.

(2) $T_pM := \{p + v \in \mathbb{R}^2 \mid v$ は p での接ベクトル $\}$ を M の p での 接線 と呼ぶ．

例 23.2. 円周 S^1 に対して次が成り立つ: $\forall a \in \mathbb{R}$, $(0, a)$ は $p = (1, 0)$ における接ベクトル．

接ベクトルと接空間

以下, M を可微分多様体とする．その接空間は, “速度ベクトル” の全体として定義する．速度ベクトルを定義するために, 次を用いる: $C^\infty(M) := \{\xi : M \to \mathbb{R} : C^\infty$ 級 $\}$.

定義 23.3. $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を C^∞ 級写像とする．このとき, 次の $c'(0)$ を c の 0 における 速度ベクトル と呼ぶ:

$$c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \tfrac{d}{dt}(\xi \circ c)(0).$$

例 23.4. $M = \mathbb{R}^n$ とし, その標準的な基底を $\{e_1, \ldots, e_n\}$, 座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ で表す．また, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n : t \mapsto te_i$ とおく．このとき次が成り立つ: $c'(0) = (\frac{\partial}{\partial x_i})_0$. ただしここで,

$$(\tfrac{\partial}{\partial x_i})_0 : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \tfrac{\partial \xi}{\partial x_i}(0).$$

定義 23.5. 写像 $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が $p \in M$ における 接ベクトル とは, 次が成り立つこと:
$\exists c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty$ 級 s.t. $c(0) = p$, $c'(0) = v$.

定義 23.6. 次で定義される T_pM を M の $p \in M$ での 接空間 と呼ぶ:

$$\begin{aligned} T_pM &:= \{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid v \text{ は } p \text{ での接ベクトル}\} \\ &= \{c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty,\ c(0) = p\}. \end{aligned}$$

24　幾何学 A (2014/07/24): 接空間 (2)

接空間と方向微分の空間

$C^\infty(M)$ には自然に和・スカラー倍・積が定義されることに注意する．すなわち，$a, b \in \mathbb{R}$, $\xi, \eta \in C^\infty(M)$ に対して，

$$(a\xi + b\eta)(p) := a\xi(p) + b\eta(p), \quad (\xi\eta)(p) := \xi(p) \cdot \eta(p).$$

定義 24.1. $p \in M$, $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ とする．

(1) 次を <u>積の微分の公式</u> と呼ぶ: $\forall f, g \in C^\infty(M)$, $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.

(2) 次を <u>方向微分の空間</u> と呼ぶ: $D_pM := \{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid$ 線型, 積の微分の公式を満たす $\}$.

補題 24.2. $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を C^∞ 級とし，$\xi, \eta \in C^\infty(M)$ とする．このとき以下が成り立つ:

(1) $(a\xi + b\eta) \circ c = a\xi \circ c + b\eta \circ c$.

(2) $(\xi\eta) \circ c = (\xi \circ c)(\eta \circ c)$.

命題 24.3. $T_pM \subset D_pM$.

命題 24.4. D_pM は線型空間である．

接空間と座標近傍

(U, φ) を M の座標近傍とする．また，$p \in U$ とし，$\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ で表す．

定義 24.5. 上記の記号の下で，$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ を次で定義する:

$$(\tfrac{\partial}{\partial x_i})_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\xi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

補題 24.6. $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to M$ は C^∞-級写像．

命題 24.7. $\mathrm{span}\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\} \subset T_pM$.

接空間まとめ

定理 24.8. (U, φ) を M の座標近傍，$p \in U$ とし，$\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ と表す．次が成り立つ:

$$\mathrm{span}\{(\tfrac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\tfrac{\partial}{\partial x_n})_p\} = T_pM = D_pM.$$

系 24.9. 可微分多様体 M が n 次元のとき，T_pM は n 次元ベクトル空間になる．