第 1 章

平面曲線の曲率

なめらかな平面曲線の曲率を定義し，その意味や性質を紹介する．

1.1 曲線の助変数表示

以下，I は $\mathbb{R}$ 内の空でない開集合を表すものとする．

定義 1.1.1　写像 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が なめらかな曲線 とは，次が成り立つこと：

(i)　c は C^∞ 級．

(ii)　$\forall t \in I$，$c'(t) \neq (0, 0)$．

ベクトル $c'(t)$ を 速度ベクトル と呼ぶ．像 $c(I)$ のことをなめらかな曲線と呼び，写像 c あるいは $c(t)$ をその 助変数表示 と呼ぶこともある．

例 1.1.2　次の (1)，(2) はなめらかな曲線であり，(3) はなめらかな曲線ではない：

(1)　（半径 $r > 0$ の円）$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$．

(2)　（C^∞ 級関数 $f : I \to \mathbb{R}$ のグラフ）$c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, f(t))$．

(3)　（$y = |x|$ のグラフ）$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, |t|)$．

1.2 曲線の曲率の定義

定義 1.2.1　なめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2$ に対して，次の $\kappa(t)$ を 曲率 と呼ぶ：

$$\kappa(t) := \det(c'(t), c''(t))/|c'(t)|^3.$$

写像 κ そのものを曲率, あるいは曲率関数と呼ぶこともある．曲線を $c(t)=(x(t),y(t))$ とおくと，曲率の定義式の分母と分子は，それぞれ以下のように表される：

$$\det(c'(t),c''(t))=\det\begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix}=x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t),$$
$$|c'(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}.$$

定義より $|c'(t)|\neq 0$ であるから，曲率の分母は 0 にならないことに注意する．

例 1.2.2　半径 $r>0$ の円の曲率に対して，以下が成り立つ：

(1)　$c(t)=(r\cos t, r\sin t)$ とすると，$\kappa(t)=1/r$.

(2)　定数 $a\neq 0$ を用いて $c(t)=(r\cos(at), r\sin(at))$ とすると，$a>0$ なら $\kappa(t)=1/r$, $a<0$ なら $\kappa(t)=-1/r$.

問題 1.2.3　半径 $r>0$ の円の上半分を $y=\sqrt{r^2-x^2}$ のグラフだと思って，$c(t)=(t,\sqrt{r^2-t^2})$ を考える（ただし $t\in(-r,r)$）．このときの曲率 $\kappa(t)$ を求めよ．

問題 1.2.4　楕円 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ の曲率を計算し，曲率の絶対値が最大になる点と最小になる点を求めよ．ただし $a>b>0$ とする．

1.3　曲率の性質：合同での不変性

この章では，曲線の曲率が，回転や平行移動をしても変わらないことを紹介する．そのために，まずは回転や平行移動の定義を復習する．

定義 1.3.1　$c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする．このとき，

(1)　c_1 と c_2 が <u>向きを保つ合同</u> であるとは，次が成り立つこと：$\exists g \in \mathrm{SO}(2)$, $\exists v \in \mathbb{R}^2$: $\forall t \in I$，$c_2(t) = gc_1(t) + v$.

(2)　c_1 と c_2 が <u>合同</u> であるとは，次が成り立つこと：$\exists g \in \mathrm{O}(2)$，$\exists v \in \mathbb{R}^2 : \forall t \in I$，$c_2(t) = gc_1(t) + v$.

上記において，$g \in \mathrm{SO}(2)$ は回転を表し，$v \in \mathbb{R}^2$ は平行移動を表す．また，$g \in \mathrm{O}(2)$ による変換は，回転と折り返しの合成を表す．

命題 1.3.2　$c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする．もし c_1 と c_2 が向きを保つ合同であるならば，両者の曲率は等しい．すなわち次が成り立つ：$\kappa_{c_1} = \kappa_{c_2}$.

問題 1.3.3　なめらかな曲線を折り返すと，その曲率は -1 倍されることを示せ．

1.4　復習：合成写像の微分

ここでは，合成写像の微分の公式，いわゆるチェインルールを復習する．ここでは, 表記を簡単にするために，ヤコビ行列を用いて書く．

定義 1.4.1　$f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とする．また，$\mathbb{R}^m$ の座標を $(x_1,\ldots,x_m)$ で表し，$f=(f_1,\ldots,f_n)$ とおく．このとき次を f の $p\in\mathbb{R}^m$ における ヤコビ行列 と呼ぶ：

$$(Jf)_p := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

命題 1.4.2（合成写像の微分）　$f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$，$g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ を C^∞ 級写像とし，$p\in\mathbb{R}^m$ とする．このとき次が成り立つ：$(J(g\circ f))_p = (Jg)_{f(p)}(Jf)_p$．

1.5　曲率の性質：パラメータ変換での不変性

ここでは，曲線の曲率が助変数表示の取り方に依存しないことを示す．直感的には，道路の曲がり具合は車でどう走ろうが変わらない，ということと同様．以下では I，I' を $\mathbb{R}$ 内の空でない開集合とする．

定義 1.5.1　写像 $t:I'\to I$ が 正のパラメータ変換 であるとは，以下が成り立つこと：

(i)　全単射．
(ii)　C^∞ 級．
(iii)　$\forall s\in I'$，$t'(s)>0$．

上記の条件のうち (iii) を「$\forall s\in I'$, $t'(s)<0$」に置き換えたものを 負のパラメータ変換 と呼ぶ．正のパラメータ変換は，車の走行で言うと「走り方は変えても方向は変えない」ことに対応する．

命題 1.5.2　$c:I\to\mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とし，$t:I'\to I$ を正のパラメータ変換とする．このとき以下が成り立つ：

(1)　$c\circ t:I'\to\mathbb{R}^2$ はなめらかな曲線．
(2)　$\forall s\in I'$，$\kappa_c(t(s))=\kappa_{c\circ t}(s)$．

すなわち，曲線の曲率は正のパラメータ変換で不変である．また，負のパラメータ変換をすると曲率は -1 倍される．ここで，κ_c と $\kappa_{c\circ t}$ はそれぞれ c と $c\circ t$ の曲率を表す．

1.6　曲率の意味：加速度

ここでは，助変数表示を車の走行と考え，曲率が「一定の速度で走ったときの加速度」を表すことを示す．当然ながら，大きな加速度を感じる道路の方が大きく曲がっている．

定義 1.6.1　$c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする．このとき，c が 弧長パラメータ表示 であるとは，次が成り立つこと：$\forall t \in I$，$|c'(t)| = 1$.

弧長パラメータ表示することが「一定の速度（速さ 1）で走る」ことに対応する．次の命題は，「どんな道路でも一定の速度で走ることができる」ことを意味する．

命題 1.6.2　$c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする．このとき次が成り立つ：$\exists t = t(s)$（正のパラメータ変換）: $c \circ t$ は弧長パラメータ表示．

上記の証明には逆関数定理を用いる（今回は省略）．結論としては，どんな道路でも速さ 1 で走ることができる．そのときの加速度を表示するために，次のベクトルを用いる．

定義 1.6.3　$c(t) = (x(t), y(t))$ を弧長パラメータ表示とする．このとき，次を（左向きの）単位法ベクトル と呼ぶ：$n(t) := (-y'(t), x'(t))$.

上記の単位法ベクトルは，$\mathbb{R}^2$ のベクトルを縦で書いて，次のように表すと意味が分かりやすい：

$$\begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

命題 1.6.4　$c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とする．このとき次が成り立つ：$\forall t \in I$，$c''(t) = \kappa_c(t) n(t)$.

特に $|c''| = |\kappa_c|$ が成り立つ．すなわち，曲率の絶対値は，加速度ベクトル c'' の大きさと一致する．これが曲率の意味の一つである．

1.7　曲率の意味：単位法ベクトルの微分

弧長パラメータ表示 $c(t)$ に対し，単位法ベクトルは $n(t) = (-y'(t), x'(t))$ で定義されていた．ここでは，曲率は $n(t)$ の微分と考えることができることを述べる．

定義 1.7.1　$c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とし，$e(t) := c'(t)$ とおく．このとき，$\{e(t), n(t)\}$ を **Frenet 標構** と呼ぶ．

命題 1.7.2　$c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とする．このとき次が成り立つ：$\forall t \in I$, $n'(t) = -\kappa_c(t)e(t)$.

命題 1.6.4，1.7.2 を合わせて書くと，次のようになる．

命題 1.7.3（Frenet の公式）　$c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とする．このとき，Frenet 標構 $\{e(t), n(t)\}$ に対して，次が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} e & n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} e & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Frenet の公式を用いることで，次を示すことができる．

定理 1.7.4（平面曲線の基本定理）　任意の C^∞-関数 $\kappa : I \to \mathbb{R}$ に対して，κ を曲率とする曲線の弧長パラメータ表示 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が，向きを保つ合同を除いて一意的に存在する．

第 2 章

曲面の曲率

なめらかな曲面の曲率を定義し，その意味や性質を紹介する．

2.1　曲面の助変数表示

以下，D は $\mathbb{R}^2$ 内の空でない開集合を表すものとする．

定義 2.1.1　写像 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ が なめらかな曲面 とは，以下が成り立つこと：

(i)　φ は C^∞ 級．

(ii)　$\forall (u,v) \in D$，$\mathrm{rank}\,(J\varphi)_{(u,v)} = 2$.

ここで $(J\varphi)_{(u,v)} := (\varphi_u, \varphi_v)_{(u,v)}$ は Jacobi 行列である（ただし φ_u，φ_v は偏微分を表す）．このとき，$\mathrm{rank}\,(J\varphi)_{(u,v)} = 2$ となるための必要十分条件は，$\{\varphi_u, \varphi_v\}$ が一次独立となること．

例 2.1.2　以下はなめらかな曲面である：

(1)　（xy 平面）$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (u,v,0)$.

(2)　（曲線の平行移動）$c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ をなめらかな曲線としたとき，$\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (x(u), y(u), v)$.

例 2.1.3　以下はなめらかな曲面でない：

(1)　(一点) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (0,0,0)$.

(2)　(曲線) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (x(u), y(u), z(u))$.

(3)　$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (u^3, u^2, v)$.

これらの例から分かるように，定義の条件 (ii) を「$(J\varphi)_{(u,v)}$ は零行列でない」とすると，条件が弱くなりすぎる．

2.2 回転面

なめらかな曲線が所定の条件をみたしているとき，それを回転させてなめらかな曲面を作ることができる．

命題 2.2.1 $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto c(t) = (x(t), z(t))$ をなめらかな曲線とし，次をみたすと仮定する：$\forall t \in I$，$x(t) > 0$．このとき，次はなめらかな曲面である：

$$\varphi : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

上のように定義された φ を，曲線 c の 回転面 と呼ぶ．これは，c を xz 平面内の曲線だと思って，それを z 軸を中心に回転させたものに他ならない．

例 2.2.2 以下はなめらかな曲面である：

(1) (円柱) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$.

(2) (球面) $\varphi : \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$.

(3) (トーラス) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u(2 + \cos v), \sin u(2 + \cos v), \sin v)$.

これらの例は全て回転面である．上で与えた球面の助変数表示は，球面の一部しか表していないことに注意する（定義域を $\mathbb{R}^2$ に拡げたものは助変数表示にはならない）．

2.3　曲面の曲率の定義

なめらかな曲線の曲率を定義する．曲線の曲率は単位法ベクトルを用いて表すことができたが，曲面の曲率にも単位法ベクトルが登場する．

定義 2.3.1　$a = {}^t(a_1, a_2, a_3)$，$b = {}^t(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して，次を <u>ベクトル積</u> と呼ぶ：

$$a \times b := {}^t\left(\det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right).$$

定義より，$a \times b$ は a と b の両方に直交する．また，$a \times b = 0$ となるための必要十分条件は，a と b が一次従属となることである．

定義 2.3.2　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲線とする．このとき，次を φ の <u>単位法ベクトル</u> と呼ぶ：

$$n(u, v) := \varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v) / |\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)|.$$

なめらかな曲面の定義より，$\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ が成り立つことに注意する．

定義 2.3.3　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲線とする．このとき，

(1)　$E := \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$，$F := \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$，$G := \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ を <u>第一基本量</u> と呼ぶ．

(2)　$L := \langle \varphi_{uu}, n \rangle$，$M := \langle \varphi_{uv}, n \rangle$，$N := \langle \varphi_{vv}, n \rangle$ を <u>第二基本量</u> と呼ぶ．

(3)　以下をそれぞれ <u>第一基本行列</u>，<u>第二基本行列</u> と呼ぶ：

$$\widehat{\mathrm{I}} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathrm{II}}_p := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

(4)　$A := \widehat{\mathrm{I}}^{-1}\widehat{\mathrm{II}}$ を <u>形作用素</u> と呼ぶ．

(5)　$K := \det(A)$ を <u>ガウス曲率</u>，$H := (1/2)\mathrm{tr}(A)$ を <u>平均曲率</u> と呼ぶ．

形作用素 A が定義されるためには，第一基本行列 $\widehat{\mathrm{I}}$ が逆行列をもつことを確かめなくてはならない．このことは，後で示す．

2.4　曲面の曲率の例

ここでは，いくつかの簡単な曲面に対して，そのガウス曲率と平均曲率を求める．

例 2.4.1　ガウス曲率 K，平均曲率 H について，以下が成り立つ：

(1)　平面に対して，$K = H = 0$.

(2)　（半径 $r > 0$ の円柱）$\varphi(u, v) = (r\cos u, r\sin u, v)$ に対して，

$$A = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = 0, \quad H = -1/(2r).$$

(3)　（半径 $r > 0$ の球面）$\varphi(u, v) = (r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v)$ に対して，$K = 1/r^2$，$H = -1/r$.

問題 2.4.2　半径 $r > 0$ の球面のガウス曲率と平均曲率を，上記の助変数表示を用いて，実際に計算せよ．

例 2.1.2 で紹介したように，曲線 c を z 軸方向に平行移動させることで曲面 φ を作ることができる．このとき，c の曲率と φ の曲率には次の関係がある．

命題 2.4.3　$c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ を弧長パラメータ表示とし，その曲率を κ とする．また，$\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (x(u), y(u), v)$ とおく．このとき，φ のガウス曲率と平均曲率は以下をみたす：$K = 0$，$H = -\kappa/2$.

上記の弧長パラメータ表示に対して，Frenet の公式より

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}.$$

命題の証明にこれを用いると便利である．

2.5　第一基本量の意味：内積

ここでは第一基本量 E，F，G と内積の関係を述べる．以下，$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とし，$\langle , \rangle$ を $\mathbb{R}^3$ の標準的な内積とする．

定義 2.5.1　各 $p \in D$ に対して，写像 $\mathrm{I}_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次で定義する：

$$\mathrm{I}_p(X, Y) := \langle (J\varphi)_p X, (J\varphi)_p Y \rangle.$$

定義より I_p は対称双線型写像である．さらに，$(J\varphi)_p$ が階数 2 （すなわち単射）であることから，次が従う．

命題 2.5.2　任意の $p \in D$ に対して，I_p は $\mathbb{R}^2$ 上の正定値内積.

内積は対称行列を用いて表すことができた．$\mathbb{R}^3$ の標準的な内積が $\langle X, Y \rangle = {}^t XY$ で与えられていることを用いると，次が得られる．

命題 2.5.3　任意の $p \in D$ および任意の $X, Y \in \mathbb{R}^2$ に対して，次が成り立つ：

$$\mathrm{I}_p(X, Y) = {}^t X \, \widehat{\mathrm{I}}_p^{-1} \, Y.$$

ここで $\widehat{\mathrm{I}}_p$ は第一基本行列．内積 I_p が非退化であることから，次が得られる．

系 2.5.4　任意の $p \in D$ に対して，第一基本行列 $\widehat{\mathrm{I}}_p$ は逆行列を持つ.

さらに，上記の I_p の表示から，形作用素 A について以下の性質が導かれる．

系 2.5.5　任意の $p \in D$ に対して，以下が成り立つ：

(1)　A_p は内積 I_p に関して対称である．すなわち，任意の $X, Y \in \mathbb{R}^2$ に対して，次が成り立つ：$\mathrm{I}_p(AX, Y) = \mathrm{I}_p(X, AY)$.

(2)　特に，A_p は対角化可能であり，その固有値は実数である．

形作用素 A の固有値を φ の <u>主曲率</u> と呼び，それらを λ_1，λ_2 で表すことが多い．ガウス曲率は主曲率の積であり，平均曲率は主曲率の平均に他ならない．

2.6　曲率の性質：合同での不変性

曲線の曲率と同様に，曲面のガウス曲率および平均曲率は回転や平行移動で不変である．

定義 2.6.1　$\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき，

(1)　φ_1 と φ_2 が <u>向きを保つ合同</u> であるとは，次が成り立つこと：$\exists g \in \mathrm{SO}(3), \exists w \in \mathbb{R}^3$: $\forall p \in D$，$\varphi_2(p) = g\varphi_1(p) + w$.

(2)　φ_1 と φ_2 が <u>合同</u> であるとは，次が成り立つこと：$\exists g \in \mathrm{O}(3)$，$\exists w \in \mathbb{R}^3 : \forall p \in D$，$\varphi_2(p) = g\varphi_1(p) + w$.

二つの曲面が向きを保つ合同であるならば，両者のガウス曲率と平均曲率はそれぞれ等しい．このことを次の手順で示す．

命題 2.6.2　$\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とし，それぞれに対応する量を E_i，F_i 等で表す．また，φ_1 と φ_2 が合同であるとし，$\varphi_2 = g\varphi + w$ と表せるとする（$g \in \mathrm{O}(3)$，$w \in \mathbb{R}^3$）．このとき以下が成り立つ：

(1)　$E_2 = E_1$，$F_2 = F_1$，$G_2 = G_1$.

(2)　$n_2 = (\det g) g n_1$.

(3)　$L_2 = (\det g) L_1$，$M_2 = (\det g) M_1$，$N_2 = (\det g) N_1$.

(4)　$A_2 = (\det g) A_1$.

(5)　$K_2 = K_1$，$H_2 = (\det g) H_1$.

従って，合同ならばガウス曲率は等しく，平均曲率は符号を除いて等しい．向きを保つ合同ならば，ガウス曲率も平均曲率も等しい．

2.7　曲率の性質：パラメータ変換での不変性

曲線の曲率と同様に，曲面のガウス曲率および平均曲率はパラメータ変換で不変である．D，D' を $\mathbb{R}^2$ 内の空でない開集合とする．

定義 2.7.1　写像 $\xi : D' \to D$ が 正のパラメータ変換 であるとは，以下が成り立つこと：

(i)　ξ は全単射．

(ii)　ξ は C^∞ 級．

(iii)　$\forall q \in D'$，$\det(J\xi)_q > 0$．

上記の条件 (iii) の符号を負にしたものを 負のパラメータ変換 と呼ぶ．これらは，曲面の向きを保つか反転させるかということに対応する．正と負のパラメータ変換をまとめて パラメータ変換 と呼ぶ．

命題 2.7.2　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面，$\xi : D' \to D$ をパラメータ変換とする．このとき，$\varphi \circ \xi : D' \to \mathbb{R}^3$ もなめらかな曲面である．

ガウス曲率や平均曲率がパラメータ変換で不変であることを示すために，次の補題を用意する．

補題 2.7.3　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき以下が成り立つ：

(1)　$\widehat{\mathrm{I}} = {}^t(J\varphi)(J\varphi)$.

(2)　$L = -\langle \varphi_u, n_u \rangle$，$M = -\langle \varphi_u, n_v \rangle = -\langle \varphi_v, n_u \rangle$，$N = -\langle \varphi_v, n_v \rangle$.

(3)　$\widehat{\mathrm{II}} = -{}^t(J\varphi)(Jn)$.

命題 2.7.4　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面，$\varphi' := \varphi \circ \xi : D' \to \mathbb{R}^3$ を正のパラメータ変換とし，それぞれに対応する量を A，A' 等で表す．このとき以下が成り立つ：

(1)　$\widehat{\mathrm{I}}' = {}^t(J\xi)\,\widehat{\mathrm{I}}\,(J\xi)$.

(2)　$n' = n \circ \xi$.

(3)　$\widehat{\mathrm{II}}' = {}^t(J\xi)\,\widehat{\mathrm{II}}\,(J\xi)$.

(4)　$A' = (J\xi)^{-1} A\,(J\xi)$.

(5)　$K' = K$，$H' = H$.

2.8　形作用素の意味：単位法ベクトルの微分

ここでは，なめらかな曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ の形作用素 A が，単位法ベクトル $n = n(u, v)$ の微分を表していることを述べる．そのために，まずは微分の定義を復習する．

定義 2.8.1　D を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合とし，$F : D \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とする．このとき，F の $p \in D$ での <u>微分</u> を次で定義する：

$$(dF)_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : X \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(F(p + tX) - F(p) \right).$$

微分は線型写像である．線型写像 $(dF)_p$ を標準的な基底に関して行列表示したものが，ヤコビ行列 $(JF)_p$ であった．

ここから，なめらかな曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ を考える．単位法ベクトルを $n : D \to \mathbb{R}^3$ とし，その微分を $(dn)_{(u,v)}$ で表す．次は $\langle n, n \rangle = 1$ から従う．

補題 2.8.2　任意の $X \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\langle (dn)_{(u,v)}(X), n_{(u,v)} \rangle = 0$.

このことから，値域を制限して $(dn)_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{span}\{\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)\}$ と考えることができる．補題 2.7.3 の A の表示から，次が得られる．

命題 2.8.3　$-(dn)_{(u,v)}(e_1, e_2) = -(n_u, n_v) = (\varphi_u, \varphi_v)A$.

従って形作用素 A は，単位法ベクトル n の微分を行列表示したものである．曲線の曲率が単位法ベクトルの微分を表していたが，同様のことが曲面の曲率に対しても言えたことになる．

2.9　第二基本量の意味：形作用素の双対

ここでは第二基本量と形作用素の関係を述べる．以下，$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とし，これまでに定義した記号をそのまま用いる．

定義 2.9.1　各 $p \in D$ に対して，写像 $\mathrm{II}_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次で定義する：

$$\mathrm{II}_p(X, Y) := \mathrm{I}_p(A_p X, Y).$$

このような II_p を，A_p の I_p に関する双対と言う．ここで，A_p は I_p に関して対称だったので，II_p は対称双線型写像である．ただし非退化とは限らない．

命題 2.9.2　任意の $p \in D$ および任意の $X, Y \in \mathbb{R}^2$ に対して，次が成り立つ：

$$\mathrm{II}_p(X, Y) = {}^t X \widehat{\mathrm{II}}_p Y.$$

ここで $\widehat{\mathrm{II}}_p$ は第二基本行列．従って第二基本量 L，M，N は，形作用素 A を行列で表した時の成分を表している．

2.10　曲面の内在的性質：等長写像

ガウス曲率と平均曲率の違いを説明するために，曲面に合同よりも弱い「等長的」という同値関係を導入する．曲面の合同は第一基本量と第二基本量を保っていたが，曲面が等長的であるとは，第一基本量のみを保つという性質で定義される．

定義 2.10.1　$(V_1, \langle , \rangle_1)$，$(V_2, \langle , \rangle_2)$ を内積空間（すなわち線型空間と内積の組）とする．このとき，線型写像 $f : (V_1, \langle , \rangle_1) \to (V_2, \langle , \rangle_2)$ が（内積空間としての）<u>等長写像</u> であるとは，次が成り立つこと：$\forall X, Y \in V_1$，$\langle X, Y \rangle_1 = \langle f(X), f(Y) \rangle_2$.

ここで，$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とすると，各 $p \in D$ に対して I_p が内積を与えていたことを思い出す．

定義 2.10.2　$\varphi_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$，$\varphi_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき，

(1)　$\xi : D_1 \to D_2$ が <u>微分同相写像</u> であるとは，以下が成り立つこと：ξ は全単射，C^∞ 級であり，ξ^{-1} も C^∞ 級.

(2)　$\xi : D_1 \to D_2$ が（曲面としての）<u>等長写像</u> であるとは，以下が成り立つこと：ξ は微分同相写像であり，$\forall p \in D_1$，$(d\xi)_p : (\mathbb{R}^2, (\mathrm{I}_1)_p) \to (\mathbb{R}^2, (\mathrm{I}_2)_{\xi(p)})$ が内積空間としての等長写像.

このような等長写像が存在するときに，二つの曲面は <u>等長的</u> であると言う．次の例より，平面と円柱は等長的である（平均曲率が違うので合同ではない）.

例 2.10.3　平面 $\varphi_1(u, v) := (u, v, 0)$ と円柱 $\varphi_2(u, v) := (r \cos u, r \sin u, v)$ を考える．ただし $r > 0$. このとき，次の ξ は φ_1 から φ_2 への等長写像である：

$$\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto ((1/r)x_1, x_2).$$

等長的という言葉は，第一基本量を保つことと，それを用いて定義される「距離」を保つことが同値であることから来ている．従って，「距離を完全に反映した世界地図を平面上に描け」という問題は，（地球を球面と同一視して）「球面から平面への等長写像を作れ」という問題だと考えることができる．— 実は，そのようなことは不可能だということが知られている．不可能であることを示すためには，等長的という関係で不変な性質が必要になる．

2.11　曲面の内在的性質：接方向

これまでと同様に D を $\mathbb{R}^2$ 内の空でない開集合とする．その座標を $p=(u,v)\in D$ とし，偏微分を ∂_u，∂_v で表す．すなわち，$X:D\to\mathbb{R}^3$ を C^∞ 級写像とすると，

$$\partial_u X : D \to \mathbb{R}^3 : p \mapsto (X_u)(p), \quad \partial_v X : D \to \mathbb{R}^3 : p \mapsto (X_v)(p).$$

なめらかな曲面 $\varphi:D\to\mathbb{R}^3$ に対して，$\partial_u\varphi$，$\partial_v\varphi$ は次の意味で曲面に接している．

定義 2.11.1　$\varphi:D\to\mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とし，$X:D\to\mathbb{R}^3$ とする．このとき，X が曲面 φ の 接ベクトル場 であるとは，以下が成り立つこと：

(i)　$X:D\to\mathbb{R}^3$ は C^∞ 級.

(ii)　$\forall p\in D$，$X(p)\in\mathrm{Span}\{\varphi_u(p),\varphi_v(p)\}$.

一方で，曲率の定義には二階までの偏微分が必要だったが，φ_{uu}，φ_{uv}，φ_{vv} は接ベクトル場とは限らない．これらの接している方向だけを抜き出すことを考える．

定義 2.11.2　$\varphi:D\to\mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とし，$X:D\to\mathbb{R}^3$ を C^∞ 級写像とする．このとき，次で定義される $X^\top:D\to\mathbb{R}^3$ を X の 接成分 と呼ぶ：$X^\top := X-\langle X,n\rangle n$.

ここで n は φ の単位法ベクトル．各 $p\in D$ に対して，$\mathrm{Span}\{\varphi_u(p),\varphi_v(p)\}$ は $n(p)$ の直交補空間だった．このことから直ちに次が従う．

命題 2.11.3　$\varphi:D\to\mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とし，$X:D\to\mathbb{R}^3$ を C^∞ 級写像とする．このとき，接成分 $X^\top:D\to\mathbb{R}^3$ は φ の接ベクトル場である．

次の命題は，φ_{uu} 等の接成分が内在的であることを意味する．

命題 2.11.4　$\varphi:D\to\mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき，二階微分の接方向 $\varphi_{uu}^\top$，$\varphi_{uv}^\top$，$\varphi_{vv}^\top$ は，いずれも第一基本量 E，F，G だけから決まる．

接方向の定義から，$\varphi_{uu}^\top=\Gamma_{11}^1\varphi_u+\Gamma_{11}^2\varphi_v$ と表すことができる．この両辺と φ_u，φ_v の内積を取り，作られる連立方程式を解くことにより，上の命題を示すことができる．

2.12　曲面の内在的性質：方向微分

ここでは，方向微分 ∇_u，∇_v を定義し，それらが内在的であることを示す．方向微分は，偏微分 ∂_u，∂_v の接成分として定義される．

定義 2.12.1　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とし，$X : D \to \mathbb{R}^3$ を φ の接ベクトル場とする．このとき，以下で定義される $\nabla_u X$，$\nabla_v X : D \to \mathbb{R}^3$ を φ に沿った <u>方向微分</u> と呼ぶ：

$$\nabla_u X := (\partial_u X)^\top, \quad \nabla_v X := (\partial_v X)^\top.$$

補題 2.12.2　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．また，X，$Y : D \to \mathbb{R}^3$ を φ を接ベクトル場とし，α，$\beta : D \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とする．このとき以下が成り立つ：

(1)　$\nabla_u(X+Y) = \nabla_u X + \nabla_u Y$，$\nabla_v(X+Y) = \nabla_v X + \nabla_v Y$．

(2)　$\nabla_u(\alpha X) = \alpha_u X + \alpha \nabla_u X$，$\nabla_v(\alpha X) = \alpha_v X + \alpha \nabla_v X$．

この補題と，二階偏微分の接方向が内在的であるという事実から，次が直ちに従う．

命題 2.12.3　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とし，$X : D \to \mathbb{R}^3$ を φ の接ベクトル場とする．このとき，方向微分 ∇_u，∇_v は，それぞれ第一基本量 E，F，G だけから決まる．

2.13　曲面の内在的性質：ガウスの驚異の定理

ここでは，曲面のガウス曲率 K が内在的であるという「ガウスの驚異の定理」を証明する．証明のためには，$LN - M^2$ 方向微分だけで書けることを示せば良い．

補題 2.13.1　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とし，X，$Y : D \to \mathbb{R}^3$ を φ の接ベクトル場とする．このとき次が成り立つ：

$$\langle \nabla_u \nabla_v X, Y \rangle = \langle X_{vu}, Y \rangle - \langle X_v, n \rangle \langle n_u, Y \rangle.$$

定理 2.13.2（ガウスの驚異の定理）　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき，ガウス曲率 K は第一基本量 E，F，G のみから決まる．特に，次が成り立つ：

$$LM - N^2 = \langle \nabla_v \nabla_u \varphi_u - \nabla_u \nabla_v \varphi_u, \varphi_v \rangle.$$

第 3 章

リーマン多様体の曲率

多様体上のリーマン計量とは，各点での接空間に内積を与えるものである（すなわち，曲面の第一基本量のようなもの）．リーマン計量を備えた多様体をリーマン多様体と呼ぶ．この章では，曲面のガウス曲率を一般化して，リーマン多様体に曲率を定義する．曲率の定義と，基本的な性質と，いくつかの具体例を紹介することを目標とする．

以下，M を可微分多様体とする．本稿では，可微分多様体は全て有限次元 C^∞ 級実多様体を意味するものとする．

3.1　復習：接空間

ここでは，可微分多様体 M の $p \in M$ における接空間 T_pM を復習する．接空間は三通りの方法で表示することができる．

3.1.1　方向微分と接空間

可微分多様体の接空間を，方向微分を用いて定義する．まずは代数に関する復習．

定義 3.1.1　X を集合とし，$F(X) := \{\xi : X \to \mathbb{R}\}$ とおく．このとき，以下をそれぞれ $F(X)$ 上の 標準的な和・スカラー倍・積 と呼ぶ：各 $\xi, \eta \in F(X)$，$a \in \mathbb{R}$，$x \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}(\xi + \eta)(x) &:= \xi(x) + \eta(x), \\ (a\xi)(x) &:= a\xi(x), \\ (\xi\eta)(x) &:= \xi(x)\eta(x).\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

命題 3.1.2　$F(X)$ は，上記の標準的な演算に関して代数（あるいは多元環）となる．

ここで，M 上の C^∞ 級関数の和・スカラー倍・積はまた C^∞ 級だった．従って次が成り立つ．

命題 3.1.3　次は $F(M)$ 内の部分代数である：

$$C^\infty(M) := \{\xi : M \to \mathbb{R} : C^\infty \text{ 級 }\}. \tag{3.1.2}$$

以下，$C^\infty(M)$ には，この方法で得られる演算が備わっているものとする．

定義 3.1.4　$p \in M$ とする．このとき，$v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が M の p における <u>接ベクトル</u> または <u>方向微分</u> であるとは，以下が成り立つこと：

(i)　$v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ は線型．

(ii)　任意の $\xi, \eta \in C^\infty(M)$ に対して，$v(\xi\eta) = v(\xi)\eta(p) + \xi(p)v(\eta)$．

定義 3.1.5　$p \in M$ とする．このとき，次を M における p の <u>接空間</u> と呼ぶ：

$$T_pM := \{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : p \text{ における方向微分 }\}. \tag{3.1.3}$$

命題 3.1.6　T_pM は $F(C^\infty(M))$ 内の線型部分空間．特に，T_pM は線型空間である．

3.1.2　速度ベクトルと接空間

接空間の二つ目の表示は，曲線の速度ベクトルを用いて与えられる．方向微分のときと同様に，$C^\infty(M)$ を本質的に用いる．

定義 3.1.7　$\varepsilon > 0$ とし，$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を C^∞ 級写像とする．このとき，次の $c'(0)$ を c の 0 における <u>速度ベクトル</u> と呼ぶ：

$$c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \tfrac{d}{dt}(\xi \circ c)(0). \tag{3.1.4}$$

C^∞ 級写像 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を，M 内のなめらかな曲線と呼ぶ．また，上記の $c'(0)$ を曲線の接ベクトルと呼ぶこともある．

命題 3.1.8　$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を C^∞ 級写像とし，$p := c(0)$ とおく．このとき次が成り立つ：$c'(0) \in T_pM$．

3.1.3　座標近傍と接空間

接空間の三つ目の表示方法は，座標近傍を用いて与えられる．以下，(U, φ) を M の座標近傍とし，$p \in U$ とする．また，M の次元を m とし，$\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ と表す．このとき $x_i : U \to \mathbb{R}$ である．

定義 3.1.9　上記の記号の下で，写像 $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ を次で定義する：

$$(\tfrac{\partial}{\partial x_i})_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\xi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)). \tag{3.1.5}$$

定義から，各 i に対して $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p \in F(C^\infty(M))$ が成り立つ．よって，$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ 達の一次結合を考えることができる．

命題 3.1.10　以下が成り立つ：

(1)　任意の $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ に対して，$\sum a_i(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ はある曲線の速度ベクトル．

(2)　$\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p\}$ は一次独立．

上の問題の (1) から，$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ 達で張られる空間は，p における速度ベクトル全体の空間に含まれることが分かる．これら両者は実は等しい．すなわち，ここまでに接空間の三通りの表示方法を紹介してきたが，それらの表示は全て同等である．

定理 3.1.11　これまでの記号の下で，$\mathrm{span}\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p\}$，速度ベクトル全体の集合，接空間 T_pM は全て一致する．従って特に T_pM は線型空間であり，その次元は M の次元と等しい．

3.2　ベクトル場

曲面の内在的性質を調べる際に，接ベクトル場 $X : D \to \mathbb{R}^3$ が登場した．これは，各点 $p \in D$ に対して，接ベクトル X_p を対応させるものであった．ここでは，その概念を拡張して，一般の可微分多様体 M に対してベクトル場を定義する．

3.2.1　微分作用素とベクトル場

ここでは，微分作用素によってベクトル場を定義する．ここで，$C^\infty(M)$ には和・スカラー倍・積の構造が入っていたことを思い出す．

定義 3.2.1　$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ が ベクトル場 または 微分作用素 であるとは，以下が成り立つこと：

(i)　X は線型．

(ii)　任意の $\xi, \eta \in C^\infty(M)$ に対して，$X(\xi\eta) = (X\xi)\eta + \xi(X\eta)$．

M 上のベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ で表す．$\mathfrak{X}(M)$ には，値域 $C^\infty(M)$ の演算を用いることで，次のような和と関数倍が定義される．

命題 3.2.2　$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$，$f \in C^\infty(M)$ とする．このとき $X + Y, fX \in \mathfrak{X}(M)$ が成り立つ．ただしここで，$\xi \in C^\infty(M)$ に対して，

$$\begin{aligned}(X+Y)\xi &:= X\xi + Y\xi,\\ (fX)\xi &:= f(X\xi).\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

3.2.2　接ベクトルとベクトル場

ベクトル場は，各点に接ベクトルを与える対応として定式化することもできる．

命題 3.2.3　$X \in \mathfrak{X}(M)$，$p \in M$ とする．このとき，次で定義される X_p は $p \in M$ における接ベクトルである：

$$X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto (X\xi)(p). \tag{3.2.2}$$

上の対応により，ベクトル場 X を次のような写像だと思うことができる：

$$X : M \to TM (:= \coprod_{p \in M} T_pM) : p \mapsto X_p. \tag{3.2.3}$$

これは，各 $p \in M$ に対して，接ベクトル $X_p \in T_pM$ を対応させるものである．

3.2.3　座標近傍とベクトル場

以下では，(U, φ) を M の座標近傍とし，$\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ と表す．

定義 3.2.4　$f_1, \ldots, f_m \in C^\infty(U)$ に対して，$\sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ を次で定義する：

$$\sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} : U \to TU : q \mapsto \sum f_i(q) (\tfrac{\partial}{\partial x_i})_q. \tag{3.2.4}$$

命題 3.2.5　$X \in \mathfrak{X}(M)$ とし，$X : M \to TM$ の制限 $X|_U : U \to TU$ を考える．このとき次が成り立つ：$f_1, \ldots, f_m \in C^\infty(U)$ を上手く選ぶと，

$$X|_U = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.2.5}$$

このような表示を X の局所座標表示と呼び，各 f_i をその成分と呼ぶ．

3.3　リーマン計量

ここでは，可微分多様体上のリーマン計量を定義する．リーマン計量は，可微分多様体の各接空間に内積を与えるものである．ちなみに，曲面の第一基本量に相当する．

3.3.1　線型代数の準備

ここでは，線型空間上の内積について準備をする．特に断らない限り V は n 次元実線型空間を表すものとする．

定義 3.3.1　次を V の <u>双対空間</u> と呼ぶ : $V^* := \{f : V \to \mathbb{R} : \text{線型}\}$.

命題 3.3.2　V^* は $F(V)$ の線型部分空間．従って特に，V^* は実線型空間である．

ここで，$F(V)$ は V 上の関数全体の成す代数を表していた．

命題 3.3.3　$\{e_1, \ldots, e_n\}$ を V の基底とする．このとき，次で定義される $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ は V^* の基底である（これを <u>双対基底</u> と呼ぶ）:

$$\omega_i \in V^*, \quad \omega_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

これを踏まえて，内積を表すために，対称双線型写像の空間を考える．テンソルの記号を用いて表すが，テンソル空間の一般論にはここでは触れない．

定義 3.3.4　次を <u>対称双線型形式の空間</u> と呼ぶ :

$$S^2(V^*) := \{\Omega : V \times V \to \mathbb{R} : \text{双線型, 対称}\}.$$

命題 3.3.5　$S^2(V^*)$ は $F(V \times V)$ 内の線型部分空間である．

定義 3.3.6　$\omega_1, \omega_2 \in V^*$ とする．このとき，次で定義される $\omega_1\omega_2 \in S^2(V^*)$ を ω_1, ω_2 の <u>対称テンソル</u> と呼ぶ :

$$\omega_1\omega_2 : V \times V \to \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto (1/2)(\omega_1(X)\omega_2(Y) + \omega_2(X)\omega_1(Y)).$$

命題 3.3.7　$\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ を V^* の基底とする．このとき，$\{\omega_i\omega_j \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ は $S^2(V^*)$ の基底である．

ここで，$\langle , \rangle$ を V 上の内積とすると，$\langle , \rangle \in S^2(V^*)$ であることに注意する．このことから，内積を基底の一次結合で書くことができる．

3.3.2 微分写像

接空間 T_pM 上の内積を表示するために，双対空間 T_p^*M の基底が必要である．ここでは微分写像の復習をし，局所座標を用いて T_p^*M の基底を与える．

定義 3.3.8 $F : M \to N$ を C^∞ 級写像とし，$p \in M$ とする．このとき，次で定義される $(dF)_p : T_pM \to T_{F(p)}N : v \mapsto (dF)_p v$ を F の p での 微分写像 と呼ぶ：

$$(dF)_p v : C^\infty(N) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto v(\xi \circ F).$$

本稿では接ベクトルを方向微分によって定義したため，上を微分写像の定義とした．このとき T_pM の和とスカラー倍の定義から，次が従う．

命題 3.3.9 微分写像は線型である．

接ベクトルは，速度ベクトル $c'(0) \in T_pM$ によって表すことができた．この表示に関して，微分写像は次をみたす．

命題 3.3.10 $F : M \to N$ を C^∞ 級写像，$p \in M$ とし，$c'(0) \in T_pM$ を速度ベクトルとする．このとき次が成り立つ：

$$(dF)_p(c'(0)) = (F \circ c)'(0).$$

この命題の式を微分写像の定義としても良い．ただしその場合には，$(dF)_p(c'(0))$ が c の取り方に依らないことを示す必要がある．

命題 3.3.11 $F : M \to N$ を C^∞-級写像とし，$p \in M$ とする．また，p を含む M の座標近傍を $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ とし，$F(p)$ を含む N の座標近傍を $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_n))$ とする．このとき次が成り立つ：

$$(dF)_p(\sum a_i (\tfrac{\partial}{\partial x_i})_p) = (\sum b_j (\tfrac{\partial}{\partial y_j})_{F(p)}).$$

ただし，${}^t(b_1, \ldots, b_n) = J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot {}^t(a_1, \ldots, a_m)$.

特に，p を含む M の座標近傍を $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ とすると，各 i に対して $x_i \in C^\infty(U)$ である．この x_i の微分写像 $(dx_i)_p \in T_p^*M$ は次をみたす．

命題 3.3.12 p を含む M の座標近傍を $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ とする．このとき，x_i の微分写像によって与えられる $\{((dx_1)_p, \ldots, (dx_m)_p\}$ は，$\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p\}$ の双対基底である．

3.3.3　微分形式

ここでは微分形式の簡単な紹介を行う．まずは，M の座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ 上の微分形式を考える．ベクトル場の時に登場した TM と同様に，次を考える（これを余接束 という）：

$$T^*M := \coprod_{p \in M} T_p^*M.$$

定義 3.3.13　$f_i \in C^\infty(U)$ に対して，次のような ω を U 上の 1 次微分形式 と呼ぶ：

$$\omega := \textstyle\sum_{i=1}^m f_i dx_i : U \to T^*U : p \mapsto \sum_{i=1}^m f_i(p)(dx_i)_p.$$

ベクトル場 X は，各点 $p \in M$ に対して $X_p \in T_pM$ を与える対応であった．1 次微分形式 ω は，各点 $p \in M$ に対して $\omega_p \in T_p^*M$ を与える対応として定義される．

定義 3.3.14　写像 $\omega : M \to T^*M$ が M 上の 1 次微分形式 とは，以下が成り立つこと：

(i)　$\forall p \in M$，$\omega_p \in T_p^*M$.

(ii)　任意の座標近傍 (U, φ) に対して，$\omega|_U$ は U 上の 1 次微分形式.

1 次微分形式 ω_1，ω_2 に対して，前と同様の方法で対称テンソル $\omega_1\omega_2$ を定義することができる．このとき，定義域と値域を正確に書くと，次のようになる：

$$\omega_1\omega_2 : M \to S^2(T^*M) := \coprod_{p \in M} S^2(T_p^*M).$$

3.3.4　リーマン計量の定義

定義 3.3.15　多様体 M に対して, 次のような対応 g を <u>リーマン計量</u> と呼ぶ : 各 $p \in M$ に対して，$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ は内積.

リーマン計量の定義域と値域を正確に述べると，$g : M \to S^2(T^*M)$ である.

定義 3.3.16　M 上のリーマン計量 g が <u>U 上で C^∞</u> とは，次が成り立つこと : $\exists g_{ij} \in C^\infty(U)$ s.t. $g|_U = \sum g_{ij} dx_i dx_j$. また，全ての局所座標の上で C^∞ となるリーマン計量を <u>C^∞ 級リーマン計量</u> と呼ぶ.

以下では，リーマン計量は全て C^∞ 級のもののみを考えることとする．リーマン計量が与えられた多様体を <u>リーマン多様体</u> と呼ぶ.

例 3.3.17　$M := \mathbb{R}^n$ とする．このとき，$g = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ はリーマン計量である（これを <u>標準的なリーマン計量</u> と呼ぶ)．この g に関して次が成り立つ :

$$g_p(\sum a_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p, \sum b_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p) := \sum a_i b_i.$$

例 3.3.18　$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ とする．このとき，$g = (1/y^2)(dx^2 + dy^2)$ は M 上のリーマン計量である（これを <u>双曲計量</u> と呼び，得られるリーマン多様体 (M, g) を <u>双曲平面</u> と呼ぶ）.

3.4　リーマン曲率

ここでは，リーマン多様体 (M,g) に対してリーマン曲率を定義する．以前に，ガウスの驚異の定理を証明する際に，曲面のガウス曲率を方向微分 ∇ を用いて表した．このこと踏まえて，(M,g) に対して ∇ を定義し，それを用いて曲率を定義する．

3.4.1　ベクトル場の括弧積

リーマン多様体に対してリーマン曲率や方向微分の一般化を定義するためには，ベクトル場の括弧積が必要となる．ここではその定義を紹介する．ここで，多様体 M 上のベクトル場とは，方向微分 $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ のことと定義していた．また，ベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ で表す．

命題 3.4.1　$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，次で定義される $[X,Y]$ もベクトル場である（これを X と Y の 括弧積 と呼ぶ）：

$$[X,Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : f \mapsto X(Yf) - Y(Xf).$$

命題 3.4.2　ベクトル場の括弧積に対して次が成り立つ：

(1)　$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ は双線型．
(2)　$[X,Y] = -[Y,X]$.
(3)　$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.
(4)　$[X,fY] = (Xf)Y + f[X,Y]$　$(\forall f \in C^\infty(M))$.

ベクトル場は，座標近傍 $(U, \varphi = (x_1,\ldots,x_m))$ に制限すると $X = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ の形で書くことができた．ベクトル場の括弧積を，この表示を用いて表すこともできる．

命題 3.4.3　$X = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$，$Y = \sum \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{X}(U)$ の括弧積に対して，次が成り立つ：

$$[X,Y] = \textstyle\sum_{i,j} \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

よって特に次が成り立つ：$[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$.

3.4.2　Levi-Civita 接続

ここでは，曲面の方向微分 ∇ の一般化にあたるものを紹介する。

定義 3.4.4　リーマン多様体 (M, g) に対して，次で定義される $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ を <u>共変微分</u> または <u>**Levi-Civita 接続**</u> と呼ぶ：

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) = &\ Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y)\\ &+ g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]).\end{aligned}$$

上記の式を <u>**Koszul 公式**</u> と呼ぶ．ここで $Xg(Y, Z)$ は，X による $g(Y, Z) \in C^\infty(M)$ の微分である（ただしここで，$g(Y, Z) : M \to \mathbb{R} : p \mapsto g_p(Y_p, Z_p)$）．

命題 3.4.5　写像 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ が Levi-Civita 接続となるための必要十分条件は，以下をみたすこと：

(i)　$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

(ii)　$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

従って命題 3.4.5 の条件 (i)，(ii) をみたす ∇ は一意的である．これを Levi-Civita 接続の定義とすることもある．

命題 3.4.6　Levi-Civita 接続 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ は，以下の性質をみたす：

(1)　∇ は双線型写像.

(2)　$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$.

(3)　$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.

従って座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ 上で考えれば，$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ が定まれば ∇ そのものが定まることを意味している．

注意 3.4.7　曲面の方向微分は Levi-Civita 接続である．より正確には，曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ に対して，D 上に第一基本量を使ってリーマン計量 g を定める．すると，以前に定義した $\nabla_u X$，$\nabla_v X$ をそれぞれ $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} X$，$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} X$ のことだと考えて定義した ∇ は，(D, g) の Levi-Civita 接続になる．

3.4.3　リーマン曲率

ここでは (M, g) をリーマン多様体とし，その曲率テンソルと断面曲率を紹介する．

定義 3.4.8　次で定義される R を (M, g) の リーマン曲率テンソル と呼ぶ：

$$R(X, Y)Z := \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z.$$

この曲率は $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) : (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$ という写像であることに注意する．また，$[\nabla_X, \nabla_Y] := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$ と略記して，次のように表すことも多い：

$$R(X, Y) := \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y].$$

補題 3.4.9　任意の $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，以下が成り立つ：

(1)　R は多重線型写像．

(2)　$R(X, Y) = -R(Y, X)$.

(3)　$g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$.

(4)　$fR(X, Y)Z = R(fX, Y)Z = R(X, fY)Z = R(X, Y)(fZ) \quad (\forall f \in C^\infty(M))$.

補題の (1)，(2) の証明は自明. (3) の証明は, 命題 3.4.5 (ii) から従う．(4) の証明は, 括弧積の性質および命題 3.4.6 から従う．

命題 3.4.10　リーマン曲率テンソル R に対し，$(R(X, Y)Z)_p$ は X_p，Y_p，Z_p のみで決まる．すなわち，$X_p = X'_p$，$Y_p = Y'_p$，$Z_p = Z'_p$ ならば，$(R(X, Y)Z)_p = (R(X', Y')Z')_p$ が成り立つ．

上記のような性質をみたすものをテンソルと呼ぶ．例えば，リーマン計量 g はテンソルであるが，括弧積 $[,]$ や Levi-Civita 接続 ∇ はテンソルではない．

例 3.4.11　$\mathbb{R}^n$ に標準的なリーマン計量を入れたとき，$R \equiv 0$.

3.4.4　断面曲率

ここでは，断面曲率を紹介する．雑に言うと，断面曲率は，リーマン多様体を 2 次元平面で切ったときのガウス曲率である．特に，曲面の断面曲率はガウス曲率に他ならない．

定義 3.4.12　σ を T_pM の 2 次元部分空間，$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とし，$\{X_p, Y_p\}$ が σ の正規直交基底であるとする．このとき σ の <u>断面曲率</u> を次で定義する：$K_\sigma = g(R(X,Y)X,Y)_p$.

断面曲率は σ だけに依存し，$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ の取り方に依らない．このことは，リーマン曲率 R がテンソルであることから従う．

命題 3.4.13　断面曲率 K_σ は σ のみで決まる．すなわち，$\{X_p, Y_p\}$，$\{X'_p, Y'_p\}$ が共に $\sigma \subset T_pM$ の正規直交基底であるとき，$g(R(X,Y)X,Y)_p = g(R(X',Y')X',Y')_p$ が成り立つ．

問題 3.4.14（レポート問題）　双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の断面曲率は，任意の点において -1 であることを示せ．

断面曲率の計算には，例えば次のベクトル場を取ればよい：$X := y\frac{\partial}{\partial x}$，$Y := y\frac{\partial}{\partial y}$．このとき以下が成り立つ：$[X,Y] = -X$，$\nabla_X X = Y$，$\nabla_Y X = \nabla_Y Y = 0$.