曲線の曲率と不変量 *

田丸 博士 (広島大学)

概要

数学において, 不変量の考え方は, 全ての分野に登場する定石のようなものであり, 理解しておくことは見通しの良さに繋がる. この講義では, その考え方を簡単な例を用いて紹介する. 講義の最後には, 平面曲線の曲率が曲線の合同に関する不変量であることを述べる.

1 イントロ: 線型代数の話題から

不変量の考え方は, これまでに学んだ数学の中にも, 頻繁に登場している. その話題を紹介することが本稿の目的だが, その一例として, 次のような線型代数の問題を考えよう.

問題 1.1. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ が実ベクトル空間として線型同型でないことを示せ.

これを定義に従って示すことは現実的ではない. ベクトル空間 V_1, V_2 が線型同型であることを示すためには, 線型同型写像 $F : V_1 \to V_2$ を作れば良い. しかし, そうではないことを示すために,「任意の写像 $F : V_1 \to V_2$ は線型同型でない」ことを示すことは, 現実的に不可能である.

しかし, 線型代数で学んだことを使うと, 上記の事実の証明は「次元が違うから」の一言で済む. 念のために述べておくと, ベクトル空間 V_1, V_2 が線型同型であるとすると, それらの次元は等しい. 従って, その対偶を適用すれば良い.

この性質は, 「ベクトル空間の次元は, 線型同型に関する不変量である」と表現される.

2 不変量の定義と例

ここでは, 不変量の定義を抽象的に述べた後に, いくつかの簡単な例に触れる. 次の定義は, 上記で触れたベクトル空間の次元を参考にすると, 理解しやすいと思われる.

定義 2.1. X, Y を集合とし, $\sim$ を X 上の同値関係とする. このとき, 写像 $f : X \to Y$ が X の $\sim$ に関する <u>不変量</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \sim x_2)$, $f(x_1) = f(x_2)$.

ベクトル空間の次元を考えた際の設定は, X を (有限次元) ベクトル空間全体の集合, $\sim$ を線型同型を表す同値関係というものである. このとき, $\dim : X \to \mathbb{N} : V \mapsto \dim V$ は不変量である.

* 広島大学理学部数学科「先端数学」(2014/05/16) 講義資料

2.1 三角形

まずは高校までに登場する不変量の典型例として, 三角形の面積を採りあげる. すなわち, X を平面 $\mathbb{R}^2$ 内の三角形全体の集合とする. この上で合同という同値関係を考える.

定義 2.2. 2 つの三角形が <u>合同</u> であるとは, それらが回転と折り返しと平行移動で移り合うこと.

回転と折り返しと平行移動については, 後述の曲線のところで正確な定義を述べる. ここで, 次の事実はよく知られていると言って良いだろう.

命題 2.3. 三角形の面積は, 合同に関する不変量である.

この事実は自明と思われるかも知れないが, 改めて意識すると, 次のような思考に繋がる. まず, 2 つの三角形が合同であるための必要十分条件は, 以下のいずれかが成り立つことであった:

(1) (二辺挟角) 二辺の長さとその間の角の大きさが等しいこと.
(2) (一辺両端角) 一辺の長さとその両端の角の大きさが等しいこと.
(3) (三辺) 三辺の長さが等しいこと.

従って, 二辺挟角・一辺両端角・三辺が与えられれば, その三角形の面積は確定する. よって, これらの情報から三角形の面積を求めることが (原理的には) 出来るはずである. これらの場合には, それぞれ正弦定理・余弦定理・ヘロンの公式により, 具体的に面積を求めることが可能である.

2.2 行列

次に, $X := M(n, \mathbb{R})$, すなわち $n \times n$ 実行列全体の集合とする. この上の同値関係としては, 行列の共役を考える. これは, それぞれの表現する線型写像が基底変換で移り合うことに対応する.

定義 2.4. $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ が <u>共役</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists g \in M(n, \mathbb{R})$: 可逆, $B = gAg^{-1}$.

線型代数では, 行列に関する様々な概念が登場した. 明示的に意識はしていなかったかも知れないが, それらは以下のように, 共役に関する不変量である.

命題 2.5. 行列のトレース tr, 行列式 det, 階数 rank は, 行列の共役に関する不変量である.

行列の共役に関して不変でない概念 (例えば $(1, 1)$ 成分の数字, 第 1 列の和, 0 の個数など) は, 線型代数で採りあげられることは, ほぼ無いはずである.

三角形の合同条件とは異なり, これらの不変量から行列は決まらない. 例えば, $\det(A) = 1$ となる行列は無限にある. しかしながら, $\det(A)$ から行列 A の性質がある程度は分かる. 実際, 行列 A が可逆であるための必要十分条件は, $\det(A) \neq 0$ となることである.

2.3 その他

上記以外の分野または科目においても, 登場する概念は全て何らかの不変量 (あるいは不変な概念) であったはずである. 例えば, 群論で登場する概念は群の同型に関する不変量であるし, 位相空間論で登場する概念は位相同型 (同相) に関する不変量である.

問題 2.6. $\mathbb{R}$ と S^1 (円周) にそれぞれ標準的な位相を入れた空間は, 同相でない. このことの理由を出来るだけ簡潔に説明せよ.

問題 2.7. 本稿で紹介した以外の不変量の例を挙げよ. また, その不変量に関して, 「その不変量から元の対象の性質がある程度分かる」という形の定理を挙げよ.

3 平面曲線の曲率

ここでは, 幾何学に関する話題を一つ紹介する. 標語的に述べると, 平面曲線の曲率は, 向きを保つ合同に関する不変量である.

3.1 平面曲線の定義

まずは曲線の定義を与える. 以下では, I を $\mathbb{R}$ 内の開集合とし, 常に $I \neq \emptyset$ と仮定する.

定義 3.1. 写像 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が なめらかな曲線 であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) c は C^∞ 級.
(ii) $\forall t \in I$, $c'(t) \neq (0, 0)$.

ベクトル $c'(t)$ を 速度ベクトル と呼ぶ. 像 $c(I)$ のことをなめらかな曲線と呼び, 写像 c あるいは $c(t)$ をその 助変数表示 と呼ぶこともある.

例 3.2. 次の (1), (2) はなめらかな曲線であり, (3) はなめらかな曲線ではない:

(1) (半径 $r > 0$ の円) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$.
(2) (C^∞ 級関数 f のグラフ) $c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, f(t))$.
(3) ($y = |x|$ のグラフ) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, |t|)$.

平面曲線全体の集合の上の同値関係としては, 向きを保つ合同を考える. これは, 回転と平行移動によって移り合うと言っても良い. 条件を数学的に述べると次のようになる. ここで, $\mathrm{SO}(2)$ は回転行列全体の集合を表す.

定義 3.3. $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな平面曲線とする. これらが 向きを保つ合同 とは, 次が成り立つこと: $\exists g \in \mathrm{SO}(2)$, $\exists v \in \mathbb{R}^2$: $\forall t \in I$, $c_2(t) = g c_1(t) + v$.

ここで, $c_1(t)$, $c_2(t)$ は縦ベクトルだと思っていることに注意する. すなわち, $gc_1(t)$ は行列と縦ベクトルの積である.

また, 2 つの平面曲線が合同とは, それらが回転と平行移動と折り返しによって移り合うことである. これを式で表すと, 上記の定義の条件の SO(2) を, 直交群 O(2) に置き換えたものになる.

3.2 曲線の曲率

ここでは, なめらかな曲線の曲率を定義し, それが向きを保つ合同に関する不変量であることを紹介する. まずは曲率を, 非常に天下りに定義する (幾何学 A の講義では触れました).

定義 3.4. なめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2$ に対して, 次の $\kappa(t)$ を <u>曲率</u> と呼ぶ:

$$\kappa(t) := \det(c'(t), c''(t))/|c'(t)|^3.$$

上記の定義の式について少し補足しておく. 曲線を $c(t) = (x(t), y(t))$ とおくと, 曲率の定義式の分母と分子は, それぞれ以下で表される:

$$\begin{aligned} \det(c'(t), c''(t)) &:= \det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t), \\ |c'(t)| &:= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}. \end{aligned}$$

例 3.5. 半径 $r > 0$ の円の曲率に対して, 以下が成り立つ:

(1) $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$ とすると, $\kappa(t) = 1/r$.

(2) 定数 $a \neq 0$ を用いて $c(t) = (r\cos(at), r\sin(at))$ とすると, $a > 0$ なら $\kappa(t) = 1/r$, $a < 0$ なら $\kappa(t) = -1/r$.

なめらかな曲線の曲率は, 曲線の向きを保つ合同に関する不変量である.

命題 3.6. $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな平面曲線とし, これらが向きを保つ合同であるとする. このとき, c_1 と c_2 の曲率は等しい.

これを示すために, $c_2(t) = gc_1(t) + v$ とする. すると, $c_2' = gc_1'$ および $c_2'' = gc_1''$ が成り立つ. これらを曲率の定義に代入すれば良い.

問題 3.7. $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな平面曲線とし, これらが合同であるとする (向きを保つとは限らない). このとき, c_1 と c_2 の曲率の絶対値が等しいことを示せ.

問題 3.8. 円 $x^2 + y^2 = 1$ と楕円 $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ (ただし $a > b > 0$) が向きを保つ合同でないことを示せ. (なお, 合同でもない. その理由も可能なら説明せよ.)

問題 3.9. $c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とし, 次をみたすと仮定する: $\forall t \in I$, $|c'(t)| = 1$. このとき, もし c の曲率が恒等的に 0 であるならば, c は直線 (の一部) であることを示せ.