1 数学通論 II (2014/10/07): 位相空間の定義

数学通論 II では, 内容を学ぶことも重要ですが, それ以上に「定義に従って証明すること」を重視します. このプリントには, 講義で紹介する定理・命題・例などの主張だけをまとめているので, 単に読むだけでなく, 書かれている例や問題 (可能なら命題や定理) に対して, 実際に自分で証明を書いてみることを強くお勧めします.

ユークリッド空間から距離空間へ

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ から距離という概念を抽出したものが距離空間であった.

定義 1.1. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の <u>自然な距離</u> を次で定義する:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

命題 1.2. ユークリッド空間 $X := \mathbb{R}^n$ 上の自然な距離は, 以下の (D1)–(D3) を満たす:

(D1) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ かつ "$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$".

(D2) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

(D3) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

定義 1.3. X を集合, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を写像とする. (X, d) が <u>距離空間</u> であるとは, d が命題 1.2 の条件 (D1)–(D3) を満たすこと.

従って, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は距離空間である.

距離空間から位相空間へ

距離空間から開集合という概念を抽出したものが位相空間である.

定義 1.4. (X, d) を距離空間とする. このとき,

(1) $a \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して, $U(a; \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$ を <u>ε-近傍</u> と呼ぶ.

(2) $X \supset O$ が <u>開集合</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in O, \exists \varepsilon > 0 : U(a; \varepsilon) \subset O$.

(3) $\mathcal{O} := \{O \subset X \mid O$ は開集合 $\}$ を (X, d) の <u>開集合族</u> と呼ぶ.

命題 1.5. 距離空間 (X, d) の開集合族 $\mathcal{O}$ に対して, 以下が成り立つ:

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(T2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(T3) $\forall O_\lambda \in \mathcal{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

定義 1.6. X を集合, $\mathcal{O}$ を X の部分集合族とする. $(X, \mathcal{O})$ が <u>位相空間</u> であるとは, $\mathcal{O}$ が命題 1.5 の条件 (T1)–(T3) を満たすこと.

従って, 距離空間 (X, d) は位相空間である.

例 1.7. $\mathbb{R}$ に自然な距離 d を入れた距離空間に対して, 以下が成り立つ:

(1) $(0, +\infty)$ は開集合.

(2) $[0, +\infty)$ は開集合でない.

例 1.8. $\mathbb{R}^2$ に自然な距離 d を入れた距離空間に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ は開集合.

(2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ は開集合でない.

2　数学通論 II (2014/10/14): 位相空間の例・開集合

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とするとき, $\mathcal{O}$ を X 上の <u>位相</u> と呼ぶ.

位相空間の例

以下は位相空間の典型的な例である. 位相空間に関する新しい概念が登場したときには, まずはこれらの位相の場合にどうなるかを考えると良い.

例 2.1. 次は位相である:

(1) 距離空間 (X, d) に対して, その開集合族 $\mathcal{O}_d := \{O \subset X \mid O$ は開集合 $\}$.
(2) 集合 X に対して, その巾集合 $\mathcal{O}^d := \mathfrak{P}(X)$ (これを <u>離散位相</u> と呼ぶ).
(3) 集合 X に対して, $\mathcal{O}^t := \{\emptyset, X\}$ (これを <u>密着位相</u> と呼ぶ).
(4) $\mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{O}^+ := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ (これを <u>右半直線の位相</u> と呼ぶ).

注意 2.2. 右半直線の位相に関して, 便宜的に $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$, $(+\infty, +\infty) := \emptyset$ と定めると, 便利なことがある (ただし, あくまで便宜的な表記であり, $\pm\infty$ という数がある訳ではない). この表記を用いると, 次のように表すことができる:

$$\mathcal{O}^+ = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}.$$

注意 2.3. 密着位相および右半直線の位相は, 距離から定まる位相ではない. このことは, 後日に証明を与える. 上級者向けの演習問題: どのような考え方で証明すれば良いかを考えよ.

開集合

以下では $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

定義 2.4. $X \supset A$ が <u>開集合</u> とは, 次が成り立つこと: $A \in \mathcal{O}$.

定義 2.5. 点 $x \in X$ に対して, $X \supset O$ が x の <u>開近傍</u> とは, 次が成り立つこと: $x \in O \in \mathcal{O}$.

命題 2.6. $A \subset X$ とする. このとき以下は同値:

(i) $A \in \mathcal{O}$.
(ii) $\forall x \in A$, $\exists O$ (x の開近傍) : $O \subset A$.

距離空間では, ε-近傍を用いて諸概念を定義した. 位相空間でも, ε-近傍の代わりに開近傍を用いると, 殆ど同様のことができる. ここでは内部や内点を扱い, 触点や閉包は次回に紹介する.

定義 2.7. $A \subset X$ に対して,

(1) $X \ni x$ が A の 内点 とは, 次が成り立つこと: $\exists O$ (x の開近傍) : $O \subset A$.

(2) $A^\circ := \{x \in X \mid x$ は A の内点 $\}$ を A の 内部 と呼ぶ.

内点であるための条件は, 次のようにまとめて書くこともできる: $\exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subset A$.

命題 2.8. (X, d) を距離空間とし, $\mathcal{O}_d$ を距離から定まる位相とする. このとき, $x \in X$ および $A \subset X$ について, 以下は同値:

(i) 位相 $\mathcal{O}_d$ に関して, x は A の内点.

(ii) 距離 d に関して, x は A の内点, すなわち次が成り立つ: $\exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \subset A$.

問題 2.9 (小テスト問題)**.** 上の命題の "(i) $\Rightarrow$ (ii)" を示せ.

例 2.10. $\mathbb{R}$ に右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ を入れた位相空間について, 以下が成り立つ:

(1) $1 \in [0, +\infty)^\circ$.

(2) $1 \notin [0, 2)^\circ$.

命題 2.11. $A \subset X$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.

(2) $O \in \mathcal{O}, O \subset A \Rightarrow O \subset A^\circ$.

(3) $A^\circ \in \mathcal{O}$.

上の命題の (3) の証明には, (2) の結果と命題 2.6 を用いる.

定理 2.12. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ: $A \in \mathcal{O} \Leftrightarrow A = A^\circ$.

問題 2.13 (自習問題)**.** $\mathbb{R}$ に関して, 自然な距離から定まる位相 $\mathcal{O}$, 離散位相 $\mathcal{O}^d$, 密着位相 $\mathcal{O}^t$, 右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ を考える. これらの位相に関して, $[0, +\infty)^\circ$ および $[0, 2)^\circ$ が何になるかを予想し, それらを示せ.

上記のいくつかは空集合になる. 空集合をであることを示すときには, 背理法が便利な場合が多い. また, $A \subset B$ と $A^c \supset B^c$ が同値であることを用いると, 証明しやすくなる場合もある.

3 数学通論 II (2014/10/21): 閉集合

閉集合

引き続き, 以下でも $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

定義 3.1. $X \supset A$ が <u>閉集合</u> とは, 次が成り立つこと: $X - A \in \mathcal{O}$.

ここで $X - A$ は X における A の補集合を表す. 補集合は, $X \setminus A$, あるいは全体集合 X を明示する必要がない場合は A^c と表すこともある.

定義 3.2. $A \subset X$ に対して,

(1) $X \ni x$ が A の <u>触点</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall O$ (x の開近傍), $A \cap O \neq \emptyset$.
(2) $\overline{A} := \{x \in X \mid x$ は A の触点 $\}$ を A の <u>閉包</u> と呼ぶ.

命題 3.3. (X, d) を距離空間とし, $\mathcal{O}_d$ を距離から定まる位相とする. このとき, $x \in X$ および $A \subset X$ について, 以下は同値:

(i) 位相 $\mathcal{O}_d$ に関して, x は A の触点.
(ii) 距離 d に関して, x は A の触点, すなわち次が成り立つ: $\forall \varepsilon > 0$, $A \cap U(x; \varepsilon) \neq \emptyset$.

問題 3.4 (小テスト問題)**.** 上の命題の "(ii) $\Rightarrow$ (i)" を示せ.

例 3.5. $\mathbb{R}$ に右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ を入れた位相空間について, 以下が成り立つ:

(1) $1 \in \overline{[0, 1)}$.
(2) $-1 \in \overline{[0, +\infty)}$.

補題 3.6. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ: $X - \overline{A} = (X - A)^\circ$.

定理 3.7. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ: A が閉集合 $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

問題 3.8 (自習問題)**.** $A \subset X$ に対して, 次を示せ: $A \subset \overline{A}$. (定義に従って示す方法と, 内部の性質に帰着させる方法の, 二通りの方法で示せ.)

問題 3.9 (自習問題)**.** $\mathbb{R}$ に関して, 自然な距離から定まる位相 $\mathcal{O}$, 離散位相 $\mathcal{O}^d$, 密着位相 $\mathcal{O}^t$, 右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ を考える. これらの位相に関して, $\overline{\{0\}}$ および $\overline{[0, 2)}$ が何になるかを予想し, それらを示せ.

4　数学通論 II (2014/10/28): 連続写像・同相

以下では $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間とする．写像を $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ のように表し, 定義域と値域に入っている位相を強調することが多い.

連続写像

定義 4.1. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が <u>連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall O \in \mathcal{O}_Y$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$.

例 4.2. $\mathbb{R}$ の密着位相を $\mathcal{O}^t$, 離散位相を $\mathcal{O}^d$ で表す．また id は恒等写像を表す．このとき,

(1) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{O}^d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}^t)$ は連続,
(2) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{O}^t) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}^d)$ は連続でない.

命題 4.3. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$, $g : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ を連続写像とする．このとき, 合成写像 $g \circ f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ も連続.

補題 4.4. $f : X \to Y$ および $V \subset Y$ に対し, 次が成り立つ: $X - f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - V)$.

X の閉集合系 (閉集合全体の成す集合族) を $\mathfrak{A}_X$ で表す.

命題 4.5. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して, 以下は同値:

(i) f は連続,
(ii) $\forall A \in \mathfrak{A}_Y$, $f^{-1}(A) \in \mathfrak{A}_X$.

問題 4.6 (自習問題)**.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$ を考える．自然な距離から定まる位相 $\mathcal{O}$, 離散位相 $\mathcal{O}^d$, 密着位相 $\mathcal{O}^t$, 右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ を, それぞれ定義域と値域に入れる (全部で 16 通り)．全ての場合について, f が連続かどうかを調べよ.

問題 4.7 (自習問題)**.** 定値写像は常に連続である．このことを正確に述べ, それを示せ.

同相

定義 4.8. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が <u>同相写像</u> とは, 次が成り立つこと:

(i) f は全単射,

(ii) f は連続,

(iii) f^{-1} は連続.

全単射かつ連続だとしても, 逆写像が連続とは限らない. 反例は, 例 4.2 を参照.

定義 4.9. $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が <u>同相</u> とは, 次が成り立つこと: $\exists f : X \to Y$: 同相写像.

命題 4.10. 同相を $\cong$ で表す. このとき $\cong$ は同値関係である. すなわち,

(1) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (X, \mathcal{O}_X)$,

(2) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y) \Rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y) \cong (X, \mathcal{O}_X)$,

(3) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Y, \mathcal{O}_Y) \cong (Z, \mathcal{O}_Z) \Rightarrow (X, \mathcal{O}_X) \cong (Z, \mathcal{O}_Z)$.

位相空間論において, "2 つの位相空間が同相かどうかを判定せよ" という問題は基本的である. 特に, 同相でないことを示す際に, 定義通りに行うことは (全ての写像を考えなくてはならないので) ほぼ不可能である. そこで, 次回以降に紹介する "位相空間の性質" が重要になる.

問題 4.11 (自習問題)**.** $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$ とする. このとき, 以下を示せ: $\mathcal{O}_X$ が密着位相なら, $\mathcal{O}_Y$ も密着位相である. また, $\mathcal{O}_X$ が離散位相なら, $\mathcal{O}_Y$ も離散位相である.

5 数学通論 II (2014/11/04): 相対位相

この講義の内容は, 以下の 3 つに大きく分けることができる:

(1) 位相空間の基礎.

(2) 位相空間の作り方.

(3) 位相空間の性質.

前回までの内容が「位相空間の基礎」であった. 今回の内容は「位相空間の作り方」の最初に相当する. (ちなみに残りの「作り方」は後回しにして, 来週からは「性質」の紹介に入る.)

相対位相

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. $A \subset X$ とすると, $\mathcal{O}$ を用いて A に位相を定義することができる.

定義 5.1. $A \subset X$ とする. このとき次の $\mathcal{O}_A$ を $(X, \mathcal{O})$ から決まる A の <u>相対位相</u> と呼ぶ:

$$\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}.$$

定義より次が成り立つ: "$W \in \mathcal{O}_A \Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{O} : W = O \cap A$".

命題 5.2. 相対位相 $\mathcal{O}_A$ は A の位相である.

問題 5.3 (小テスト問題)**.** 相対位相 $\mathcal{O}_A$ が位相空間の公理 (T2) を満たすことを示せ.

例 5.4. $A := [0, 2)$ とし, $\mathcal{O}_A$ を $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相とする. 位相空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) $[0, 1) \in \mathcal{O}_A$.

(2) $0 \in [0, 1)^\circ$.

問題 5.5 (自習問題)**.** $A := [0, 2)$ とし, $\mathbb{R}$ 上の四種類の位相から決まる相対位相を考える. これらの位相に関して, $[0, 1)$, $(1, 2)$ の内部と閉包が何になるかを予想し, それらを示せ.

問題 5.6 (自習問題)**.** (X, d) を距離空間とし, $\mathcal{O}_d$ を距離から定まる位相とする. また, $A \subset X$ とし, $\mathcal{O}_A$ を $(X, \mathcal{O}_d)$ から決まる相対位相, $d_A : A \times A \to A$ を d の制限距離, $\mathcal{O}_{d_A}$ を d_A から定める位相とする. このとき次が成り立つことを示せ: $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{d_A}$.

相対位相の性質

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．ここでは連続写像と相対位相の関係を調べる．

命題 5.7. 連続写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) $A \subset X$ とし, $\mathcal{O}_A$ を相対位相とする．このとき, 制限写像 $f|_A : (A, \mathcal{O}_A) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ は連続.

(2) $B \subset Y$ とし, $\mathcal{O}_B$ を相対位相とする．このとき, もし $f(X) \subset B$ ならば, 値域を制限した写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (B, \mathcal{O}_B)$ は連続.

系 5.8. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を同相写像とし, $A \subset X$ とする．このとき, $f|_A : A \to f(A)$ も同相写像である．ただしここで, A にも $f(A)$ にも相対位相が入っているものとする．

この系は, 後にいくつかの位相空間が同相でないことの証明に用いられる．

問題 5.9 (自習問題)**.** $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}$ 上の標準的な位相とし, $\mathbb{R}$ 内の部分集合にはこれから決まる相対位相を入れる．このとき, 任意の開区間 (a, b), 半直線 $(c, +\infty)$, 全体 $\mathbb{R}$ は全て同相であることを示せ．(ここで, 指数関数や三角関数が連続であることは使っても良い.)

離散位相について

補題 5.10. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, 次が成り立つと仮定する: $\forall x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{O}$. このとき $\mathcal{O}$ は離散位相である．

例 5.11. $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる $\mathbb{Z}$ の相対位相は, 離散位相である．

問題 5.12 (自習問題)**.** 離散位相から決まる相対位相は, 離散位相であることを示せ．また, 密着位相から決まる相対位相は, 密着位相であることを示せ．

6 数学通論 II (2014/11/11): 連結

位相空間が「分けられる・分けられない」という概念を定式化したものが, 連結性である.

連結性の定義と例

定義 6.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して,

(1) $(X, \mathcal{O})$ が <u>非連結</u> とは, 次が成り立つこと: $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : O_1 \cup O_2 = X$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$.

(2) $(X, \mathcal{O})$ が <u>連結</u> とは, 次が成り立つこと: $(X, \mathcal{O})$ は非連結でない.

例 6.2. $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して, $(0,1) \cup [2,3)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ は非連結.

非連結であることを示すのは比較的容易だが, 連結であることを示すことは難しいことが多い. 以下の命題の証明は, 実数の連続性が本質的に効いているので, ややこしい.

命題 6.3. $X \subset \mathbb{R}$ とし, $\mathcal{O}_X$ を $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる X の相対位相とする. このとき以下は同値:

(i) $(X, \mathcal{O}_X)$ は連結.

(ii) $\forall a, b \in X$ $(a < b)$, $[a, b] \subset X$.

証明. 証明の概略だけを述べる. (i) $\Rightarrow$ (ii) は, 対偶を示せば比較的容易. (ii) $\Rightarrow$ (i) は, 背理法で示す. 非連結を仮定すると, 所定の性質をみたす $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_X$ が存在. このとき $\exists a \in O_1$, $\exists b \in O_2 : a < b$ として良い. 仮定 (ii) より $[a, b] \subset X$. ここで $c := \sup([a, b] \cap O_1)$ とおいて, $c \in [a, b] \subset X = O_1 \cup O_2$ に矛盾することを示せば良い. $\square$

系 6.4. $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して, $\mathbb{R}$, $(a, +\infty)$, $[a, b]$, $[a, b)$, $\ldots$ は連結.

問題 6.5 (自習問題)**.** $\mathbb{R}$ に離散位相, 密着位相, 右半直線の位相を入れた空間がそれぞれ連結かどうかを予想し, それらを示せ.

連結の同相不変性

連結性は位相空間の性質であることを示す. すなわち, 位相空間が連結であるという性質は, 同相で保たれる.

補題 6.6. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, 以下は互いに同値:

(1) $(X, \mathcal{O})$ は非連結.

(2) $\exists A \subset X$: A は開かつ閉, $\emptyset \neq A \neq X$.

(3) $\exists \varphi : X \to \{1, 2\}$: 連続かつ全射.

ここで $\{1, 2\}$ には, $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相が入っているものとする. ちなみに, この位相は離散位相に一致する.

問題 6.7 (小テスト問題)**.** 上の補題 6.6 の (2) の条件をみたす A に対して, $\varphi : X \to \{1, 2\}$ を次で定める: $\varphi(x) = 1$ (for $x \in A$), $\varphi(x) = 2$ (for $x \notin A$). この φ が連続であることを示せ.

次の命題は, 補題 6.6 (3) の条件を用いると証明が簡潔である. (非連結の定義に従っても示しても, それほど難しくはない.)

命題 6.8. 連結な位相空間の連続写像による像は連結である. すなわち, $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像, $(X, \mathcal{O}_X)$ を連結とすると, $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ は連結.

定理 6.9. 連結性は同相で不変である. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X, \mathcal{O}_X)$ が連結のとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は連結.

例 6.10. $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して, $[0, 1)$ と $(0, 1)$ は同相でない.

連結性の応用

命題 6.8 を用いると, 中間値の定理に極めて簡潔な証明を与えることができる.

系 6.11 (中間値の定理)**.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続写像とし, $f(a) < m < f(b)$ とする. このとき次が成り立つ: $\exists c \in [a, b]$: $m = f(c)$.

7　数学通論 II (2014/11/18): 弧状連結

位相空間が連結であるとは, 直感的には「分けられない」ことであった. ここで扱う弧状連結性は「つながっている」ことを表している.

弧状連結の定義

弧状連結性を定義する. 特に, 弧状連結ならば連結である.

定義 7.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が <u>弧状連結</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall x_0, x_1 \in X$, $\exists c : [0,1] \to X$: 連続, $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$.

ここで $[0,1]$ には標準的な位相を入れる. 上の条件を満たす c を, x_0 と x_1 を結ぶ <u>道</u> と呼ぶ.

例 7.2. 以下は, 標準的な位相に関して弧状連結である: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ の区間, 円周 S^1, $\mathbb{R}^n - \{0\}$, ...

命題 7.3. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ は, 弧状連結ならば連結である.

証明は背理法で行う. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結かつ非連結と仮定すると, 閉区間 $[0,1]$ が連結であることに矛盾する.

注意 7.4. 上の命題の逆は成り立たない. すなわち, 連結だが弧状連結でない位相空間が存在する. 反例を挙げることは可能だが, 実際にそれが連結であることを証明することは難しい.

例 7.5. $\mathbb{R}^2$ 内の以下の部分集合を考える:

$$A := \{(x,0) \mid 0 < x \leq 1\}, \quad B := \{(0,y) \mid 0 < y \leq 1\}, \quad A_n := \{(x, 1/n) \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

このとき次の X は, $\mathbb{R}^2$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して, 連結だが弧状連結でない:

$$X := A \cup B \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n).$$

弧状連結の性質

弧状連結性は位相空間の性質であることを示す．すなわち, 位相空間が弧状連結であるという性質は, 同相で保たれる．

命題 7.6. 弧状連結な位相空間の連続写像による像は弧状連結である．すなわち, $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像, $(X, \mathcal{O}_X)$ を弧状連結とすると, $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ は弧状連結.

問題 7.7 (小テスト問題)**.** 命題 7.6 を示せ.

問題 7.8 (自習問題)**.** 命題 7.6 の逆は成り立たない (すなわち, 連続写像による像が弧状連結だったとしても, 定義域が弧状連結とは限らない)．できるだけ簡単な反例を挙げよ.

定理 7.9. 弧状連結性は同相で不変である．すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結のとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は弧状連結.

例 7.10. 直線 $\mathbb{R}$ と平面 $\mathbb{R}^2$ は, 標準的な位相に関して同相ではない.

例 7.11 (余談)**.** メビウスの帯は, 帯の方向に沿った線で切っても弧状連結.

中間試験について

中間試験を以下の要領で行う:

- 日時: 2014/12/02 の講義時間 (10:30–12:00).
- 場所: E104 (普段の講義の教室).
- 試験範囲: 弧状連結まで.

また, 希望者は以下の課題を事前レポートとして提出しても良い．提出する場合は, 2014/11/25 講義時に提出すること.

問題 7.12 (事前レポート問題)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する中間試験問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け:

(1) 開集合・閉集合. (2) 連続写像. (3) 相対位相. (4) 連結・弧状連結.

ただし, レポートの一枚目に全ての予想問題を書き, 二枚目以降にそれらの解答を書くこと．表紙は付けてはいけない.

8　数学通論 II (2014/11/25): コンパクト

コンパクト性は, 位相空間がある意味で「小さい」ことを定式化したものである.

コンパクトの定義

定義 8.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. このとき $\mathfrak{U}$ が X の 開被覆 (**open cover**) とは, 以下が成り立つこと:

(i) $\mathfrak{U} \subset \mathcal{O}$.

(ii) $X = \bigcup \mathfrak{U}$.

ここで, $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ としたとき, $\bigcup \mathfrak{U}$ は次で定義される: $\bigcup \mathfrak{U} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

例 8.2. $X := [0,1]$ とし, $\mathcal{O}$ をその標準的な位相とする. このとき以下は $(X, \mathcal{O})$ の開被覆:

(1) $\{[0, 2/3), (1/3, 1]\}$.

(2) $\{[0, 1/2)\} \cup \{(1/n, 1] \mid n \geq 2\}$.

(3) $\{X\}$.

(4) $\{\emptyset, X\}$.

このように, 開被覆は一つとは限らないし, 有限でも無限でも良い. また, 無駄があっても良い.

定義 8.3. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が コンパクト であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: 開被覆, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ s.t. $X = \bigcup U_{\lambda_i}$.

コンパクトの例

コンパクト位相空間の例とそうでない例を挙げる. 一般に, 与えられた位相空間がコンパクトであることを定義に従って示すことは, 容易ではない.

例 8.4. $(0, 2]$ に標準的な位相を入れた位相空間は, コンパクトでない.

命題 8.5 (復習)**.** $X \subset \mathbb{R}^n$ とし, $\mathcal{O}_X$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的な位相から決まる相対位相とする. このとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトであるための必要十分条件は, X が有界閉集合であること.

命題 8.6. $(X, \mathcal{O})$ をコンパクト位相空間とし, A を X の閉集合とする. このとき, A は相対位相に関してコンパクトである.

問題 8.7 (自習問題)**.** $\mathcal{O}^d$ を X の離散位相とする. このとき, 次を示せ: $(X, \mathcal{O}^d)$ がコンパクトであるための必要十分条件は, X が有限集合であること.

問題 8.8 (小テスト問題)**.** $X := \{0,1\}$ とし, $\mathcal{O}_d$ を X の離散位相とする. このとき $(X,\mathcal{O}_d)$ がコンパクトであることを定義に従って示せ.

問題 8.9 (自習問題)**.** $\mathbb{R}$ に標準的な位相, 離散位相, 密着位相, 右半直線の位相を入れた空間がそれぞれコンパクトかどうかを予想し, それらを示せ.

コンパクトの同相不変性

コンパクト性は位相空間の性質であることを示す. すなわち, 位相空間がコンパクトであるという性質は, 同相で保たれる.

命題 8.10. コンパクト位相空間の連続写像による像はコンパクトである. すなわち, $(X,\mathcal{O}_X)$ をコンパクト位相空間, $f:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ を連続写像とすると, $(f(X),\mathcal{O}_{f(X)})$ はコンパクトである.

定理 8.11. コンパクト性は同相で不変である. すなわち, $(X,\mathcal{O}_X)$ と $(Y,\mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X,\mathcal{O}_X)$ がコンパクトのとき, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ はコンパクト.

系 8.12. 直線 $\mathbb{R}$ と円周 S^1 は同相ではない.

系 8.13. $(X,\mathcal{O})$ がコンパクトであるとし, $f:X\to\mathbb{R}$ を連続写像とする. このとき f は最大値と最小値を持つ.

9 数学通論 II (2014/12/02): 中間試験

注意

証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

定義や用語など

- 内部とは, $A^\circ := \{x \in X \mid \exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subset A\}$.
- 閉包とは, $\overline{A} := \{x \in X \mid \forall O \in \mathcal{O}\,(x \in O),\ O \cap A \neq \emptyset\}$.
- X 上の密着位相とは, $\mathcal{O}^t := \{\emptyset, X\}$.
- X 上の離散位相とは, $\mathcal{O}^d := \mathfrak{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}$.
- $\mathbb{R}$ 上の右半直線の位相とは, $\mathcal{O}^+ := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.
- 連結とは, 2 つの開集合に分けられないこと.
- 弧状連結とは, 任意の 2 点が道で結べること.
- 写像が連続とは, 任意の開集合の逆像が開集合になること.
- $A \subset X$ とする. $(X, \mathcal{O}_X)$ から決まる相対位相とは, $\mathcal{O}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}_X\}$.
- 閉集合とは, 補集合が開集合となること.

問題

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 以下の問題に答えよ.

[1] $A \in \mathcal{O}_X$ とする. このとき $A = A^\circ$ を定義に従って示せ (両方の包含を示せ). (20 点)

[2] $\mathbb{R}$ 上の標準的な位相 $\mathcal{O}$, 密着位相 $\mathcal{O}^t$, 離散位相 $\mathcal{O}^d$, 右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ を考える. それぞれの位相について, $A := (0, 1] \cup [2, +\infty)$ の内部・閉包・連結かどうか・弧状連結かどうかを答えよ. (証明不要, 40 点)

[3] $\mathcal{O}^+$ を $\mathbb{R}$ 上の右半直線の位相とする. このとき, $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}^+) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}^+) : x \mapsto x^2$ が連続であるかどうかを予想し, それを定義に従って示せ. (20 点)

[4] $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像とし, $\mathcal{O}_{f(X)}$ を $\mathcal{O}_Y$ から決まる $f(X)$ の相対位相とする. このとき, 値域を制限した写像 $f' : (X, \mathcal{O}_X) \to (f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ も連続であることを, 定義に従って示せ. (20 点)

[5] $(X, \mathcal{O}_X)$ は次をみたすとする: $\exists A \subset X$: A は開集合かつ閉集合, $\emptyset \neq A \neq X$. このとき $(X, \mathcal{O}_X)$ は非連結であることを, 定義に従って示せ. (20 点)

[6] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.

10　数学通論 II (2014/12/09): 分離公理

以下, $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, その閉集合系を $\mathfrak{A}$ で表す.

分離公理の定義

位相空間に対して,「何かと何かが開集合で分離できる」というタイプの性質を考える. ここでは, そのような性質のうち典型的なものを二つ紹介する.

定義 10.1. $(X, \mathcal{O})$ が $\underline{(T_1)\ 空間}$ であるとは, 次が成り立つこと:

(T_1) $\forall x_1, x_2 \in X\ (x_1 \neq x_2)$, $\exists O \in \mathcal{O} : x_1 \in O$, $x_2 \notin O$.

定義 10.2. $(X, \mathcal{O})$ が $\underline{(T_2)\ 空間}$ または $\underline{ハウスドルフ空間}$ であるとは, 次が成り立つこと:

(T_2) $\forall x_1, x_2 \in X\ (x_1 \neq x_2)$, $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

例 10.3. $\mathbb{R}$ に対して以下が成り立つ:

(1) 標準的な位相 $\mathcal{O}$, 離散位相 $\mathcal{O}^d$ は, (T_1) かつハウスドルフである.

(2) 密着位相 $\mathcal{O}^t$, 右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ は, (T_1) でもハウスドルフでもない.

命題 10.4. ハウスドルフ空間ならば (T_1) 空間である.

命題 10.5. (X, d) を位相空間とし, $\mathcal{O}_d$ を距離から決まる位相とする. このとき, $(X, \mathcal{O}_d)$ はハウスドルフ空間である.

問題 10.6 (距離空間の復習)**.** (X, d) を距離空間, $\varepsilon > 0$ とし, $x_1, x_2 \in X$ が $d(x_1, x_2) = 3\varepsilon$ をみたすとする. このとき, $U(x_1; \varepsilon) \cap U(x_2; \varepsilon) = \emptyset$ を示せ. ただし $U(x; \varepsilon)$ は x の ε-近傍.

問題 10.7 (自習問題)**.** $(X, \mathcal{O})$ が (T_1) 空間であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall x \in X$, $\{x\} \in \mathfrak{A}$.

分離公理の同相不変性

ここでは, 分離公理が同相で不変であることを示す.

命題 10.8. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続な単射とする. このとき以下が成り立つ:

(1) $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が (T_1) 空間ならば, $(X, \mathcal{O}_X)$ も (T_1) 空間である.

(2) $(Y, \mathcal{O}_Y)$ がハウスドルフならば, $(X, \mathcal{O}_X)$ もハウスドルフである.

この命題から, 上で紹介した分離公理が同相で不変なことが直ちに従う.

定理 10.9. (T_1) 性やハウスドルフ性は同相で不変である. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X, \mathcal{O}_X)$ が (T_1) (またはハウスドルフ) のとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ も (T_1) (またはハウスドルフ) である.

例 10.10. $\mathbb{R}$ 上の密着位相 $\mathcal{O}^t$ または右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ は, 距離から決まる位相と同相ではない.

ハウスドルフ空間の性質

位相空間にハウスドルフ性を仮定すると, いくつかの良い性質をもつことが知られている. ここでは, そのうち代表的なものを紹介する.

命題 10.11. $(X, \mathcal{O})$ をハウスドルフ空間, $A \subset X$ とし, $\mathcal{O}_A$ を $\mathcal{O}$ から決まる相対位相とする. このとき, $(A, \mathcal{O}_A)$ がコンパクトならば, A は X 内の閉集合である.

問題 10.12 (自習問題)**.** 一般に, $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ とし, 相対位相に関して $(A, \mathcal{O}_A)$ がコンパクトであると仮定しても, A は X 内の閉集合とは限らない. 反例を挙げよ.

命題 10.13. $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクト, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ がハウスドルフであるとし, $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を全単射な連続写像とする. このとき, f は同相写像である.

命題 10.13 を示すためには, f が閉写像であることを示せば良い (次の問題を参照). 写像 f が閉写像であることの証明には, 命題 10.11 を用いる.

問題 10.14 (自習問題)**.** $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を全単射な連続写像とする. このとき以下が同値であることを示せ:

(1) f は同相写像.
(2) f は開写像 (すなわち, $\forall O \in \mathcal{O}_X$, $f(O) \in \mathcal{O}_Y$).
(3) f は閉写像 (すなわち, $\forall C \in \mathfrak{A}_X$, $f(C) \in \mathfrak{A}_Y$).

その他の分離公理

定義 10.15. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, 次を (T_3)-**分離公理** および (T_4)-**分離公理** と呼ぶ:

(T_3) $\forall F \in \mathfrak{A}$, $\forall x \notin F$, $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}$: $x \in O_1$, $F \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
(T_4) $\forall F_1, F_2 \in \mathfrak{A}$ $(F_1 \cap F_2 = \emptyset)$, $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}$: $F_1 \subset O_1$, $F \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

定義 10.16. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して,

(1) $(X, \mathcal{O})$ が **正則空間** であるとは, (T_1) と (T_3) を満たすこと.
(2) $(X, \mathcal{O})$ が **正規空間** であるとは, (T_1) と (T_4) を満たすこと.

命題 10.17. 位相空間に対して, 次が成立: 正規 $\Rightarrow$ 正則 $\Rightarrow$ ハウスドルフ $\Rightarrow$ (T_1).

11　数学通論 II (2014/12/16): 開基

距離空間において, ε-近傍が分かっていれば, 全ての開集合を復元することができる. 開基とは, それが分かっていれば全ての開集合を復元できるような, 「開集合のモト」である.

集合の開基

X を集合とし, $\mathcal{O}'$ を X の部分集合族とする.

定義 11.1. $\mathcal{O}'$ が 集合 X の開基 とは, 次が成り立つこと:

(i) $\bigcup \mathcal{O}' = X$.

(ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{O}'$, $\forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists V \in \mathcal{O}' : x \in V \subset B_1 \cap B_2$.

例 11.2. (X, d) を距離空間とする. このとき次は X の開基: $\mathcal{O}' := \{U(x;\varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$.

定義 11.3. 次の $\langle \mathcal{O}' \rangle$ を $\mathcal{O}'$ の生成する部分集合族 と呼ぶ:

$$\langle \mathcal{O}' \rangle := \{\emptyset\} \cup \{\textstyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \mid O_\lambda \in \mathcal{O}'\}.$$

このとき $\mathcal{O}' \subset \langle \mathcal{O}' \rangle$ が成り立つことに注意する.

命題 11.4. $\langle \mathcal{O}' \rangle$ が位相になるための必要十分条件は, $\mathcal{O}'$ が X の開基であること.

問題 11.5 (自習問題)**.** X を集合とする. 以下を示せ:

(1) $\mathcal{O}' := \{X\}$ が X の開基であることを示せ. また, $\langle \mathcal{O}' \rangle$ は密着位相であることを示せ.

(2) $\mathcal{O}' := \{\{x\} \mid x \in X\}$ が X の開基であることを示せ. また, $\langle \mathcal{O}' \rangle$ は離散位相であることを示せ.

位相の開基

$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とし, $\mathcal{O}^* \subset \mathcal{O}$ とする.

定義 11.6. $\mathcal{O}^*$ が <u>位相 $\mathcal{O}$ の開基</u> とは, 次が成り立つこと: $\langle \mathcal{O}^* \rangle = \mathcal{O}$.

当然ながら位相 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}$ の開基である. しかし, 開基を考えることにより楽をすることが目的なので, $\mathcal{O}$ と比べて出来るだけ小さい開基 $\mathcal{O}^*$ を選びたい.

命題 11.7. $\mathcal{O}^*$ が位相 $\mathcal{O}$ の開基であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O \in \mathcal{O}$, $\forall x \in O$, $\exists V \in \mathcal{O}^* : x \in V \subset O$.

例 11.8. (X,d) を距離空間とし, $\mathcal{O}_d$ を距離から定まる位相とする. このとき, 次は $\mathcal{O}_d$ の開基: $\mathcal{O}^* := \{U(x;\varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$.

次の問題は, 開基を考えることで楽ができることの一つの例である. すなわち, 写像が連続であることを示すためには, 全ての開集合の逆像を考えなくても, 開基の元の逆像だけを調べれば良い.

問題 11.9 (小テスト問題)**.** 写像 $f : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ に対して, $\mathcal{O}_Y^*$ を $\mathcal{O}_Y$ の開基とし, 次が成り立つとする: $\forall O \in \mathcal{O}_Y^*$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$. このとき, f は連続であることを示せ.

例 11.10. $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^2$ の標準的な位相とする. このとき以下は $\mathcal{O}$ の開基である:

(1) $\mathcal{O}^* := \{U(x;\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$.
(2) $\mathcal{O}^* := \{(a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2 \mid a < b,\ c < d\}$.

ただしここで, $(a,b) \times (c,d) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a,b), y \in (c,d)\}$. この例から分かるように, 位相の開基は一つとは限らない (線型空間の基底が一意でないことと同様).

発展: 第二可算公理

定義 11.11. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ に対して, 次の条件を <u>第二可算公理</u> と呼ぶ: $\exists \mathcal{O}^*$: 開基 s.t. $\mathcal{O}^*$ は高々可算.

定理 11.12 (Urysohn の距離付け可能定理)**.** 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ は, 正規かつ第二可算公理を満たすならば, 距離空間と同相である.

12 数学通論 II (2015/01/20): 積位相

以下では, $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 直積集合 $X \times Y$ の上に位相を定義する.

積位相の定義

直積集合 $X \times Y$ に対して, 一般に $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ は位相になるとは限らない. そこで, $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ で生成される集合族を考える. これが位相になることは, 次から従う.

命題 12.1. 次で定義される $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ は, 集合 $X \times Y$ の開基である:

$$\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y := \{O_X \times O_Y \mid O_X \in \mathcal{O}_X, O_Y \in \mathcal{O}_Y\}.$$

定義 12.2. $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ の生成する部分集合族 $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ を, $X \times Y$ の <u>積位相</u> と呼ぶ. また, 位相空間 $(X \times Y, \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle)$ を, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の <u>積空間</u> (または <u>直積空間</u>) と呼ぶ.

積位相の例

例 12.3. $\mathbb{R}^n$ の標準的な位相を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ で表す. このとき, 次が成り立つ: $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^{m+n}} = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} \rangle$.

もう少し複雑な具体例に関する証明のために, 次の補題を用意する. 大雑把に言うと, 「相対位相の積位相は, 積位相の相対位相に一致する」.

補題 12.4. $A \subset X$, $B \subset Y$ とし, $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ から決まる相対位相をそれぞれ $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_B$ で表す. また, $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ から決まる $A \times B$ の相対位相を $(\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle)_{A \times B}$ で表す. このとき次が成り立つ: $\langle \mathcal{O}_A \times \mathcal{O}_B \rangle = (\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle)_{A \times B}$.

例 12.5. 円柱 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と $S^1 \times \mathbb{R}$ は同相である.

念のために, 円柱には $\mathbb{R}^3$ の標準的な位相から決まる相対位相を入れ, $S^1 \times \mathbb{R}$ にはそれぞれの標準的な位相の積位相を入れている. 証明には, $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^3} = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \rangle$ と上の補題を用いる.

問題 12.6 (自習問題)**.** 次で定義されるトーラス T と $S^1 \times S^1$ は同相である:

$$T := \{((2 + \cos\alpha)\cos\beta, (2 + \cos\alpha)\sin\beta, \sin\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

積位相の基本的な性質

次で定義される写像を (X への) 自然な射影 と呼ぶ:

$$\pi : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x.$$

命題 12.7. 自然な射影 $\pi : X \times Y \to X$ に関して, 次が成り立つ:

(1) π は連続である.

(2) π は開写像である, すなわち, 任意の開集合の像は開集合である.

(3) 各 $y \in Y$ に対して, $\pi|_{X \times \{y\}} : X \times \{y\} \to X$ は同相写像である.

ここで, $X \times \{y\}$ には, $X \times Y$ の積位相から決まる相対位相が入っているものとする.

積位相と他の性質との関係

以下の定理は, 恐らく 2015/01/27(火) の講義で示す.

定理 12.8.

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を弧状連結とすると, 積空間も弧状連結である,

(2) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を連結とすると, 積空間も連結である,

(3) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ をコンパクトとすると, 積空間もコンパクトである.

期末試験について

期末試験を 2015/02/03(火) の講義時間 (10:30–12:00) に行う. 以下の事前レポートを, 希望者は提出しても良い. その場合は 2015/01/27(火) 講義時に提出すること.

問題 12.9 (期末試験事前救済レポート)**.** 以下に挙げるそれぞれのキーワードに対して, 関連する期末試験の問題を予想し, それに解答せよ.

(1) 位相空間の基本, (2) 位相空間の性質, (3) コンパクト, (4) 開基と積位相, (5) 商位相.

ただし, 様式は中間試験の事前レポートと同様とすること. すなわち, レポートの一枚目に全ての予想問題を書き, 表紙をつけてはならない.

13　数学通論 II (2015/01/23): 商位相

商集合

定義 13.1. X を集合とし, $\sim$ を X 上の同値関係とする. このとき,

(1) $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$ を x を含む <u>同値類</u> と呼ぶ.
(2) $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ を X の $\sim$ による <u>商集合</u> と呼ぶ.

例 13.2. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) 次で定義される $\sim$ は同値関係: $x \sim x' :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$.
(2) 上の同値関係に対して, $\mathbb{R}/\sim$ と円 S^1 との間に全単射が存在する.

写像 $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ を作るためには, まず写像 $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ を構成し, この $\widetilde{f}$ を用いて f を定義し, それが well-defined であることを示す, という方法が一般的である.

商位相の定義

命題 13.3. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $\pi : X \to Y$ を全射とする. このとき, 次は Y の位相である:

$$\mathcal{O}^\pi := \{O \subset Y \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}.$$

定義 13.4. 上の命題の $\mathcal{O}^\pi$ を <u>π による商位相</u> と呼ぶ.

特に, X 上に同値関係 $\sim$ があるとき, 自然な射影 $\pi : X \to X/\sim : x \mapsto [x]$ による商位相 $\mathcal{O}^\pi$ を, 商集合 $X/\sim$ 上の <u>商位相</u> と呼ぶ. また, 商位相を入れた位相空間を <u>商空間</u> と呼ぶ.

商位相の性質

命題 13.5. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $\pi : X \to Y$ を全射とする. このとき, π は $\mathcal{O}^\pi$ に関して連続.

定理 13.6. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $\pi : X \to Y$ を全射とする. このとき,

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ が連結ならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^\pi)$ も連結である.
(2) $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結ならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^\pi)$ も弧状連結である.
(3) $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^\pi)$ もコンパクトである.

定理の証明は, 連結・弧状連結・コンパクトの性質から容易.

問題 13.7 (発展問題)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ がハウスドルフだとしても, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^\pi)$ はハウスドルフとは限らない. 反例を挙げよ.

商空間の例

補題 13.8. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間, $\pi : X \to Y$ を全射とし, Y には商位相 $\mathcal{O}^\pi$ を入れる. また, $f : Y \to Z$ を写像とし, $\widetilde{f} := f \circ \pi$ とする. このとき, 以下は同値:

(1) $f : (Y, \mathcal{O}^\pi) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続,
(2) $\widetilde{f} : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続.

例 13.9. 例 13.2 の商集合を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ で表す. このとき, 商空間 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と円 S^1 は同相.

証明には, $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ が連続かつ開写像であることを用いる.

問題 13.10 (小テスト問題)**.** $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ を, 次で定義される同値関係による商集合とする: $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$, $y = y'$. このとき, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ から円柱への全単射を作れ.

ちなみに, 商空間 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ と円柱は同相である. 積位相で紹介した結果と合わせて, 円柱は以下の 3 通りの表示ができる: $\mathbb{R}^3$ の部分集合としての表示, $S^1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$.

例 13.11. $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を, 次で定義される同値関係による商集合とする: $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$, $y - y' \in \mathbb{Z}$. このとき, 商空間 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ とトーラスは同相である.

14　数学通論 II (2015/01/27): 積位相の補足

積位相の基本的な性質

補題 14.1. $f:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ を写像とし, $\mathcal{O}^*$ を $\mathcal{O}_X$ の開基とする. このとき, f が開写像であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall U\in\mathcal{O}^*$, $f(U)\in\mathcal{O}_Y$.

命題 14.2 (再掲)**.** 自然な射影 $\pi:X\times Y\to X$ は積位相に関して開写像である.

補題 14.3. 各 $y\in Y$ に対して, $g:X\to X\times Y: x\mapsto(x,y)$ は連続写像.

命題 14.4 (再掲)**.** 各 $y\in Y$ に対して, $\pi|_{X\times\{y\}}:X\times\{y\}\to X$ は同相写像.

積位相と弧状連結性

補題 14.5. $x,y,z\in X$ とする. x と y を結ぶ道が存在し, y と z を結ぶ道が存在するならば, x と z を結ぶ道が存在する.

定理 14.6 (再掲)**.** $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を弧状連結とすると, 積空間も弧状連結である.

積位相と連結性

定理 14.7 (再掲)**.** $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を連結とすると, 積空間も連結である.

証明は背理法で行う. $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を連結とし, 積空間 $(X\times Y,\langle\mathcal{O}_X\times\mathcal{O}_Y\rangle)$ が非連結と仮定する. 仮定より, $X\times Y$ は二つの非自明な開集合 O_1, O_2 に分けられる.
(Claim 1) $\pi(O_1)\cap\pi(O_2)\neq\emptyset$. ただし $\pi:X\times Y\to X$ は自然な射影.
(Claim 2) $\forall x\in\pi(O_1)\cap\pi(O_2)$ に対して, $\{x\}\times Y$ は非連結.

積位相とコンパクト性

定理 14.8 (再掲)**.** $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ をコンパクトとすると, 積空間もコンパクトである.

積空間の任意の開被覆 $\mathfrak{U}=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ をとる. 任意に $x\in X$ をとる.
(Claim 1) $\mathfrak{U}_x:=\{U_\lambda\in\mathfrak{U}\mid U_\lambda\cap(\{x\}\times Y)\neq\emptyset\}$ は $\{x\}\times Y$ の開被覆. (従って, その中から有限部分被覆 $U_{\lambda_1(x)},\dots,U_{\lambda_n(x)}$ を選ぶことができる.)
(Claim 2) $V_x:=\bigcap U_{\lambda_i(x)}$ とおくと, $\{V_x\mid x\in X\}$ は X の開被覆である. (従って, その中から有限部分被覆 $V_{x_1},\dots,V_{x_k}$ を選ぶことができる.)
(Claim 3) これらを組み合わせると, $\mathfrak{U}$ の有限部分被覆を選ぶことができる.