対称空間論の離散化とカンドル代数

田丸 博士

広島大学

大阪大学談話会
2015/12/07

Abstract

Abstract

(序) カンドル (quandle): 結び目の研究に現れる代数系.
(破) 対称空間 $\Rightarrow$ カンドル.
(急) 対称空間論を参照して, カンドルを研究している.
($\leftrightarrow$ 離散的な対称空間論を作る.)

Contents

Introduction - (1/6)

Def. (Joyce (1982))

X : 集合, $*: X \times X \to X$: 二項演算.
このとき $(X, *)$ が **カンドル**

$:\Leftrightarrow$ (Q1) $\forall x \in X,\ x * x = x$.
(Q2) $\forall x, y \in X,\ \exists! z \in X : z * y = x$.
(Q3) $\forall x, y, z \in X,\ (x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

Introduction - (2/6)

- $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ を **結び目**.
- 結び目 K = 射影図 $[K]$ / Reidemeister 変形.

Def.

K : 有向結び目, $(X, *)$: カンドルとする.
写像 $[K] \to X$ が **カンドル彩色**
$:\Leftrightarrow$ 交点の情報とカンドルの演算が "適合".

Fact

カンドル彩色は Reidemeister 変形で不変
((Q1), (Q2), (Q3) が Reidemeister (I), (II), (III) に対応).
よって特に, その個数は結び目の不変量.

Introduction - (3/6)

Def.

(M, g) : (Riem.) mfd が 対称空間

$:\Leftrightarrow$ $\forall x \in M$, $\exists s_x : M \to M$: "点対称".

Rem.

以下を同一視し, カンドルと対称空間を関連付ける:

- 二項演算 $* : X \times X \to X : (x, y) \mapsto x * y$.
- 各点に写像が付く $s : X \to \mathrm{Map}(X, X) : x \mapsto s_x$.

Introduction - (4/6)

カンドルの条件 (再掲)

(Q1) $\forall x \in X,\ x * x = x$.

(Q2) $\forall x, y \in X,\ \exists ! z \in X:\ z * y = x$.

(Q3) $\forall x, y, z \in X,\ (x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

Prop.

X: 集合, $s : X \to \mathrm{Map}(X, X) : x \mapsto s_x$ とする.

$* : X \times X \mapsto X : (y, x) \mapsto s_x(y)$ がカンドル構造

$\Leftrightarrow$ (S1) $\forall x \in X,\ s_x(x) = x$.

(S2) $\forall x \in X,\ s_x$ は全単射.

(S3) $\forall x, y \in X,\ s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

Introduction - (5/6)

以下, カンドルを (X, s) で表す. $(s : X \to \mathrm{Map}(X, X))$

Prop. (Joyce (1982))

連結リーマン対称空間はカンドル.

Example

(X, s) は $s_x := \mathrm{id}_X$ ならカンドル (自明カンドル).

Example

次の (X, s) はカンドル (二面体カンドル):

- $X := \{p_1, \ldots, p_n : S^1$ 上の n 等分点$\}$,
- $s_x := [$中心軸 ox に関する折り返し$]$.

Introduction - (6/6)

Example

次の (X, s) はカンドル (**正四面体カンドル**):

- $X := \{p_1, p_2, p_3, p_4 : 正四面体の頂点\}$,
- $s_x := [x$ を上から見て左向きに $120°$ 回転$]$.

Example

次の (X, s) はカンドル (**linear Alexander quandle**):

- $X := \mathbb{Z}_n[t^{\pm 1}]/(t - a)$ with $a \in \mathbb{Z}$,
- $s_{[x]}([y]) := [ty + (1 - t)x]$.

Result 0 - (1/6)

Fact

以下が対応する:

- (M, g) : 連結リーマン対称空間,
- (G, K, σ) : リーマン対称対.

Aim

以下が対応する:

- (X, s) : “等質” カンドル,
- (G, K, σ) : “対称対のようなもの”.

Result 0 - (2/6)

Aim (recall)

“等質” カンドル $\leftrightarrow (G, K, \sigma)$: “対称対のようなもの”

Def.

$f : (X, s^X) \to (Y, s^Y)$ が 準同型

$:\Leftrightarrow \forall x \in X,\ f \circ s^X_x = s^Y_{f(x)} \circ f.$

Def.

- 同型 $:\Leftrightarrow$ 準同型かつ全単射.
- $\mathrm{Aut}(X, s) := \{f : X \to X :$ 同型$\}$ を 自己同型群.
- (X, s) が 等質 $:\Leftrightarrow \mathrm{Aut}(X, s) \curvearrowright X$ が推移的.

Result 0 - (3/6)

Rem.

$\forall x \in X,\ s_x \in \mathrm{Aut}(X, s)$.

Def.

- $\mathrm{Inn}(X, s) := \langle \{ s_x \mid x \in X \} \rangle$ を 内部自己同型群.
- (X, s) が 連結 $:\Leftrightarrow \mathrm{Inn}(X, s) \curvearrowright X$ が推移的.

Example

- R_n (二面体カンドル) は等質.
- R_n (二面体カンドル) が連結 $\Leftrightarrow$ n が奇数.

Result 0 - (4/6)

Aim

等質カンドル $\leftrightarrow (G, K, \sigma)$: “対称対のようなもの”

Def.

(G, K, σ) が カンドル組

$:\Leftrightarrow$ G は群,

K は G 内の部分群,

$\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$,

$K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$.

Result 0 - (5/6)

Aim

等質カンドル $\leftrightarrow (G, K, \sigma)$: カンドル組

Prop.

(1) (X, s) が等質カンドル

$\Rightarrow$ $G := \mathrm{Aut}(X, s)$, $K := G_x$, $\sigma(g) := s_x \circ g \circ s_x^{-1}$
とすると (G, K, σ) はカンドル組.

(2) (G, K, σ) がカンドル組

$\Rightarrow$ $X := G/K$ (with 原点 o) は,
$s_o([h]) := [\sigma(h)]$ を G-作用で "ばらまく" と,
等質なカンドルとなる.

Result 0 - (6/6)

Note

$Q(G, K, \sigma)$: カンドル組から作られるカンドル.

Example

- $Q(G, K, \mathrm{id})$ は自明カンドル.
- $Q(\mathbb{Z}_n, \{0\}, -\mathrm{id})$ は二面体カンドル.

Example

$Q(\mathbb{Z}_n, \{0\}, L_{[a]})$ は linear Alexander quandle.

- ここで $L_{[a]}([x]) := [ax]$.
- 注意: とくに $L_{[1]} = \mathrm{id}$, $L_{[n-1]} = -\mathrm{id}$.

Result 1 - (1/5)

Fact

(M, g) : 連結 Riem. mfd が 二点等質

:⇔ 等距離にある二点の組が等長変換で移り合う

⇔ $(M, g) \cong \mathbb{R}^n$ or 階数 1 対称空間.

Aim

二点等質空間のカンドル版を考えよう.

Result (T., Iwanaga, Vendramin, Wada)

有限な二点等質カンドルを分類した.

Result 1 - (2/5)

Def. (T. (2013))

カンドル (X, s) が **二点等質**

:⇔ 相異なる二点の組が内部自己同型で移り合う

i.e. $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X$ $(x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2)$,
$\exists f \in \mathrm{Inn}(X, s) : (f(x_1), f(x_2)) = (y_1, y_2)$.

Recall

$\mathrm{Inn}(X, s) := \langle \{ s_x \mid x \in X \} \rangle$: 内部自己同型群.

Result 1 - (3/5)

Example

- R_3 (位数 3 の二面体カンドル) は二点等質.
- R_n ($n \geq 4$) は二点等質でない.

Prop. (T. (2013))

(X, s) : カンドルが二点等質
$\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, $\mathrm{Inn}(X, s)_x \curvearrowright X \setminus \{x\}$ は推移的.
$\Leftrightarrow$ (X, s) : 連結, かつ
$\exists x \in X$: $\mathrm{Inn}(X, s)_x \curvearrowright X \setminus \{x\}$ は推移的.

Result 1 - (4/5)

Prop. (T. (2013))

$(X, s) := Q(\mathbb{Z}_p, \{0\}, L_a)$ (p : 素数, $a \in \mathbb{Z}$) について,

- (X, s) が二点等質 $\Leftrightarrow$ a : p の原始根.

Proof

- $\mathrm{Inn}(X, s)_{[0]} = \langle s_{[0]} \rangle$.
- $s_{[0]}([x]) = [ax]$.
- したがって, $\mathrm{Inn}(X, s)_{[0]} = \{1, a, a^2, a^3, \ldots\}$.
- $\therefore$ a 原始根 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Inn}(X, s)_{[0]} \curvearrowright \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$: 推移的.

Result 1 - (5/5)

Thm. (T., Iwanaga, Vendramin, Wada)

(X, s) : 二点等質な有限カンドル

$\Leftrightarrow$ $(X, s) \cong Q(\mathbb{F}_q, \{0\}, L_a)$,

ただし $\mathbb{F}_q$: 位数 q の有限体， a は $\mathbb{F}_q$ の原始根.

役割分担 (?)

- T. (2013): $\#X$ が素数の場合の分類.
- Iwanaga (修論 2013): $\#X$ が 素数^2 の場合の分類.
- Vendramin (in press): 二点等質 $\Rightarrow$ $\#X$ は素数冪.
- Wada (2015): $\#X$ が素数冪の場合の分類.

Result 2 - (1/4)

Fact

(M, g) : (連結) リーマン対称空間が **平坦**
$:\Leftrightarrow$ 曲率 $\equiv 0$.
$\Leftrightarrow$ 群 $\langle \{s_x \circ s_y \mid x, y \in M\} \rangle$ が可換.

Aim

上記を使って平坦カンドルを定義し, それを調べよう.

Result (Ishihara-T. (Preprint))

平坦な連結有限カンドルを分類した.

Result 2 - (2/4)

定義

カンドル (X, s) が **平坦**

$:\Leftrightarrow \ G^0(X, s) := \langle \{ s_p \circ s_q \mid p, q \in X \} \rangle$ が可換.

Example

S^1 は (リーマン多様体としてもカンドルとしても) 平坦. このとき,

- $\mathrm{Isom}(S^1) = \mathrm{O}(2) = \mathrm{Inn}(S^1)$.
- $\mathrm{Isom}^0(S^1) = \mathrm{SO}(2) = G^0(S^1)$.

Example

二面体カンドル R_n は平坦.

Result 2 - (3/4)

Thm. (Ishihara-T. (Preprint))

(X, s) : 平坦な連結有限カンドル
$\Leftrightarrow$ $\exists q_1, \ldots, q_n$: 奇素数冪 s.t. $(X, s) \cong R_{q_1} \times \cdots \times R_{q_n}$.

Proof ($\Rightarrow$)

(X, s) : 平坦な連結有限カンドルとする.

(Step 1) $G^0(X, s)$: 有限可換群.

(Step 2) $(X, s) \cong Q(\mathbb{Z}_{q_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{q_n}, K, \sigma)$

(Step 3) $K = \{0\}$.

(Step 4) $\sigma = -\mathrm{id}$.

Result 2 - (4/4)

Thm. (再掲)

(X, s) : 平坦な連結有限カンドル

$\Leftrightarrow \exists q_1, \ldots, q_n$: 奇素数冪 s.t. $(X, s) \cong R_{q_1} \times \cdots \times R_{q_n}$.

Fact

コンパクト連結リーマン対称空間が平坦 $\Leftrightarrow$ トーラス.

Thm (言い換え)

有限連結カンドルが平坦 $\Leftrightarrow$ “離散トーラス”.

Further Plans

Theme

カンドルに対して, 対称空間論の類似を作る.

Results

- 二点等質カンドルの定式化, 有限な場合の分類.
- 平坦カンドルの定式化, 連結有限な場合の分類.

Further Plans

- 極大平坦部分カンドルの共役性？
- “階数” の概念が定義できる？
- 二点等質性と階数との関連？
- 有限ではなく, 無限離散カンドルだと？

References

- Tamaru, H.: *Two-point homogeneous quandles with prime cardinality*. J. Math. Soc. Japan **65** (2013), 1117–1134.
- Kamada, S., Tamaru, H., Wada, W.: *On classification of quandles of cyclic type*. Tokyo J. Math., to appear.
- Ishihara, Y., Tamaru, H.: *Flat connected finite quandles*. arXiv:1509.08340.

Thank you!