

平成 27 年度卒業論文  
イソトロピー既約な等質空間上の Einstein 計量

広島大学理学部数学科  
B122176 権藤暁則  
指導教員 田丸博士 教授

2016 年 2 月 10 日

## はじめに

等質空間上にはイソトロピー表現という表現が定義される。本論文では表現論における基本的な定理である Schur の補題を等質空間上のイソトロピー表現に応用する。それにより、イソトロピー既約な等質空間上には  $G$ -不変なリーマン計量が一意的に存在すること、さらに、この計量が Einstein 計量であることを示す。

第 1 章では、群の表現の定義と例を紹介し、既約表現における基本定理である Schur の補題を証明する。また、コンパクト位相群上の Haar 測度を用いて不変内積の存在を証明する。さらにこの二つを組み合わせることでコンパクト位相群上の不変内積の一意性を示す。

第 2 章では、多様体上のリーマン計量と、それを用いた曲率の定義を紹介する。また、それらの基本的な性質を述べ、最後に Einstein 計量の定義を紹介する。

第 3 章では、等質空間とそれに付随する表現としてイソトロピー表現を定義し、第 1 章、第 2 章で得られた結果を用いて主定理を証明する。また、例として行列のなすリー群によって構成されるイソトロピー既約な等質空間を紹介する。

最後に、本論文の執筆にあたり、指導教員の田丸博士先生をはじめ、奥田隆幸先生、ゼミの先輩方には御多忙の中、貴重な時間を割いて多くの助言や御指導をいただいた。この場を借りて深く御礼申し上げます。

## 目次

1	群の表現	1
1.1	表現の定義と例 . . . . .	1
1.2	Schur の補題 . . . . .	2
1.3	Haar 測度 . . . . .	2
2	リーマン計量と曲率	6
3	等質空間	10
3.1	リー群とそのリー環の例 . . . . .	10
3.2	等質空間とイソトロピー表現 . . . . .	11
3.3	等質空間上の $G$ -不変リーマン計量 . . . . .	14
3.4	主定理の証明 . . . . .	15

# 1 群の表現

この章では、群の表現についての基礎事項を紹介する。

## 1.1 表現の定義と例

以下、 $G$  を群、 $V$  を実線型空間とし、 $\text{GL}(V) := \{f : V \rightarrow V : \text{線型同型}\}$  とする。

$V = \mathbb{R}^n$  のとき、 $\text{GL}(V) = \text{GL}(n, \mathbb{R}) := \{g \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$  と自然に同一視される。 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  を 一般線型群 と呼ぶ。

**定義 1.1.** 群準同型写像  $\pi : G \rightarrow \text{GL}(V)$  を  $G$  の  $V$  上の 表現 と呼ぶ。 $V$  を 表現空間、 $\dim \pi := \dim V$  を  $\pi$  の 次元 という。 $G$  の表現を  $(\pi, V)$  のように書く。

本論文で用いる表現の例を挙げる。これらが表現の定義を満たすことは容易に示される。

**例 1.2.**  $\pi : G \rightarrow \text{GL}(V) : g \mapsto \text{id}_V$  は  $G$  の表現。これを 自明な表現 と呼ぶ。

**例 1.3.**  $G$  を  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  内の部分群とすると、包含写像  $\pi : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) : g \mapsto g$  は  $G$  の表現。これを 自然表現 と呼ぶ。

**例 1.4.**  $(\pi, V)$  を  $G$  の表現とし、 $V^*$  を  $V$  の双対空間とする。このとき、次で定義される  $\pi^* : G \rightarrow \text{GL}(V^*)$  は  $G$  の表現：

$$\pi^*(g)f(v) := f(\pi(g^{-1})v). \quad (f \in V^*, v \in V)$$

これを  $(\pi, V)$  の 反傾表現 と呼ぶ。

次に、表現に関する基本的な定義を述べる。

**定義 1.5.**  $(\pi, V), (\pi', V')$  をそれぞれ  $G$  の表現とする。線型写像  $T : V \rightarrow V'$  が  $G$ -線型 であるとは次が成り立つこと：任意の  $g \in G$  に対して、 $\pi'(g) \circ T = T \circ \pi(g)$ 。  $T$  が  $G$ -線型かつ全単射であるとき、同型 であるという。

以下、 $\text{Hom}_G(V, V') := \{T : (\pi, V) \rightarrow (\pi', V') : G\text{-線型}\}$  とする。

**定義 1.6.**  $G$  の表現  $(\pi, V), (\pi', V')$  が 同値 または 同型 であるとは、同型写像  $T : V \rightarrow V'$  が存在すること。これを  $\pi \simeq \pi'$  あるいは  $(\pi, V) \simeq (\pi', V')$  と書く。

この定義の  $\simeq$  が同値関係の条件を満たすことは容易に分かる。

**定義 1.7.**  $V$  の線型部分空間  $W$  が  $G$ -不変であるとは次が成り立つこと：任意の  $g \in G$  に対して、 $\pi(g)W \subset W$ 。

上の条件は、次と同値：任意の  $g \in G$  に対して、 $\pi(g)W = W$ 。

**定義 1.8.**  $(\pi, V)$  が  $G$  の 既約表現 とは次が成り立つこと :  $W$  が  $V$  の  $G$ -不変部分空間ならば,  $W = \{0\}$  または  $V$ .

## 1.2 Schur の補題

この節では, 既約表現の基本的な定理である Schur の補題を紹介する.

**命題 1.9.**  $(\pi, V), (\pi', V')$  を  $G$  の表現とし,  $A \in \text{Hom}_G(V, V')$  とする. このとき,  $\text{Ker}A, \text{Im}A$  は  $G$ -不変部分空間である.

**証明 .** まず,  $\text{Ker}A$  が  $G$ -不変部分空間であることを示す. 任意に  $v \in \text{Ker}A$  をとる. すると,

$$A\pi(g)v = \pi'(g)Av = \pi'(g)0 = 0.$$

よって,  $\pi(g)v \in \text{Ker}A$  となり,  $\text{Ker}A$  は  $G$ -不変である.

次に,  $\text{Im}A$  が  $G$ -不変部分空間であることを示す. 任意に  $u \in \text{Im}A$  をとる. このとき,  $u = Av$  となる  $v \in V$  が存在する. これより,

$$\pi'(g)u = \pi'(g)Av = A\pi(g)v \in \text{Im}A.$$

よって,  $\text{Im}A$  は  $G$ -不変部分空間である. □

**命題 1.10.**  $(\pi, V), (\pi', V')$  を群  $G$  の既約表現,  $A \in \text{Hom}_G(V, V')$  とする. このとき,  $A$  は同型写像または 0 写像である.

**証明 .**  $A$  が 0 写像でないとは仮定する. すると,

$$\{0\} \subset \text{Ker}A \subsetneq V, \{0\} \subsetneq \text{Im}A \subset V'.$$

命題 1.9 より,  $\text{Ker}A, \text{Im}A$  はそれぞれ  $V, V'$  内の  $G$ -不変部分空間であり,  $(\pi, V), (\pi', V')$  が既約であることから,  $\text{Ker}A = \{0\}, \text{Im}A = V'$  でなければならない. これより,  $A$  は全単射となるので同型である. よって示された. □

**定理 1.11 (Schur の補題).**  $(\pi, V)$  を群  $G$  の  $\mathbb{R}$  上の有限次元既約表現,  $A \in \text{Hom}_G(V, V)$  とし,  $A$  は実固有値  $\lambda$  を持つとする. このとき,  $A = \lambda \text{id}$  が成り立つ.

**証明 .** 仮定より,  $A$  はある  $\lambda \in \mathbb{R}$  を固有値に持つ.  $A - \lambda \text{id}_V$  もまた  $G$ -線型写像であるので, 命題 1.9 より  $\text{Ker}(A - \lambda \text{id}_V)$  は  $V$  の  $G$ -不変部分空間.  $\lambda$  に対応する固有空間を含むので  $\text{Ker}(A - \lambda \text{id}_V) \neq \{0\}$  であり,  $(\pi, V)$  は既約なので,  $\text{Ker}(A - \lambda \text{id}_V) = V$  でなければならない. これより,  $A = \lambda \text{id}_V$  が得られる. □

## 1.3 Haar 測度

まず, 位相群と, その連続表現の定義を紹介する.

**定義 1.12.**  $G$  を群かつハウスドルフ位相空間とする.  $G$  が 位相群 であるとは次が成り立つこと :

- (i)  $G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy$  が連続,
- (ii)  $G \rightarrow G : x \mapsto x^{-1}$  が連続.

以下では, 有限次元実線型空間上には Euclid 空間としての標準的な位相を定めるものとする. これを用いて位相群上の連続表現を定義する.

**定義 1.13.** 位相群  $G$  の有限次元表現  $(\pi, V)$  が連続であるとは, 次が成り立つこと :  $G \times V \rightarrow V : (g, v) \mapsto \pi(g)v$  は連続.

この節では位相群上の不変測度を紹介し, それを用いて不変内積を定義できることを示す.

**定義 1.14.**  $G$  を局所コンパクト位相群とする.  $G$  上の測度  $dg$  が 左不変 (右不変) Haar 測度 であるとは, 次が成り立つこと :  $G$  上の任意の可測関数  $f$ , 任意の  $x \in G$  に対して,

$$\int_G f(xg)dg = \int_G f(g)dg \quad \left( \int_G f(gx)dg = \int_G f(g)dg \right).$$

コンパクト位相群上には両側不変 Haar 測度が定数倍を除いてただ一つ存在することが知られている. これを用いると次のことが分かる.

**命題 1.15.**  $G$  をコンパクト位相群,  $(\pi, V)$  を  $G$  の  $\mathbb{R}$  上の有限次元連続表現とする. このとき,  $V$  上に  $G$ -不変内積, すなわち, 任意の  $x \in G$ , 任意の  $v, w \in V$  に対し,

$$\langle \pi(x)v, \pi(x)w \rangle = \langle v, w \rangle$$

を満たす内積  $\langle, \rangle$  が存在する.

**証明 .**  $dg$  を  $G$  上の両側不変 Haar 測度で,

$$\int_G dg = 1$$

を満たすものとする. また,  $\langle, \rangle'$  を  $V$  上の内積とし,  $\langle, \rangle$  を,

$$\langle v, w \rangle := \int_G \langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle' dg$$

によって定義する. このとき  $\langle, \rangle$  が  $V$  上の  $G$ -不変内積であることを示す.

まず,  $\langle, \rangle$  が内積であることを示す. 示すべきことは次の 3 つ : (i)  $\langle, \rangle$  が対称双線型であること, (ii)  $\langle v, v \rangle \geq 0$  であること, (iii)  $\langle v, v \rangle = 0$  ならば  $v = 0$  であること. (i), (ii) は明らかである. (iii) を示すために  $\langle v, v \rangle = 0$  と仮定する. このとき, 任意の  $g \in G$  に対して,  $\langle \pi(g)v, \pi(g)v \rangle' = 0$  でなければならない. これより,

$$\begin{aligned} \langle \pi(e)v, \pi(e)v \rangle' &= \langle v, v \rangle' = 0. \\ \therefore v &= 0. \end{aligned}$$

よって, (iii) が成り立つ. したがって,  $\langle, \rangle$  は  $V$  上の内積である.

次に  $G$ -不変性を示すために任意に  $x \in G, v, w \in V$  をとる.

$$\begin{aligned} \langle \pi(x)v, \pi(x)w \rangle &= \int_G \langle \pi(g)\pi(x)v, \pi(g)\pi(x)w \rangle' dg \\ &= \int_G \langle \pi(gx)v, \pi(gx)w \rangle' dg \\ &= \int_G \langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle' dg \\ &= \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

よって,  $G$ -不変であることも示された. □

命題 1.15 と Schur の補題を用いることで, 次が得られる.

**定理 1.16.**  $(\pi, V)$  をコンパクト位相群  $G$  の  $\mathbb{R}$  上の連続な有限次元既約表現とする. このとき,  $G$ -不変対称双線型  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  は定数倍を除いて一意である.

**証明.** 命題 1.15 より  $V$  上の  $G$ -不変内積  $\langle, \rangle$  が存在するので, 任意の  $G$ -不変対称双線型  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  が  $\langle, \rangle$  の定数倍となることを示せばよい.  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  を任意の  $G$ -不変対称双線型とする. 線型写像  $\varphi, \psi : V \rightarrow V^*$  を次で定義する.

$$\begin{aligned} \varphi(v)(w) &:= \langle v, w \rangle, \\ \psi(v)(w) &:= B(v, w). \end{aligned}$$

すると,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \pi(g))(v)(w) &= \varphi(\pi(g)v)(w) \\ &= \langle \pi(g)v, w \rangle \\ &= \langle v, \pi(g^{-1})w \rangle \\ &= (\pi^*(g) \circ \varphi)(v)(w). \end{aligned}$$

これより,  $\varphi$  は  $G$ -線型である. 同様にして,  $\psi$  も  $G$ -線型である.  $(\pi, V)$  は既約なので,  $\varphi$  は同型,  $\psi$  は 0 写像または同型である.  $\psi$  が 0 写像のときは主張は明らかなので,  $\psi$  が同型であるときを考える. ある  $\lambda \in \mathbb{R}$  に対して  $\varphi^{-1} \circ \psi = \lambda \text{id}$  と表されることを Schur の補題を用いて示す. そのために,  $\varphi^{-1} \circ \psi$  が実固有値を持つことを示す.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  を  $V$  の  $\langle, \rangle$  に関する正規直交基底とする.  $M = (a_{ij})$  を  $\varphi^{-1} \circ \psi$  の  $\{v_1, \dots, v_n\}$  に関する表現行列とする. すると, 各  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対し,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} \circ \psi(v_i) &= a_{1i}v_1 + \dots + a_{ni}v_n. \\ \psi(v_i) &= \varphi(a_{1i}v_1 + \dots + a_{ni}v_n). \\ B(v_i, v_k) &= \langle a_{1i}v_1 + \dots + a_{ni}v_n, v_k \rangle = a_{ki}. \end{aligned}$$

同様にして,

$$B(v_k, v_i) = a_{ik}.$$

$B$  の対称性により,  $a_{ik} = a_{ki}$  が得られる. よって,  $M$  は実対称行列となるので実固有値を持つ. Schur の補題により, ある  $\lambda \in \mathbb{R}$  が存在して,

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} \circ \psi &= \lambda \text{id}. \\ \therefore \psi &= \lambda \varphi.\end{aligned}$$

これは,  $B$  が  $\langle, \rangle$  の  $\lambda$  倍であることを示している. □



## 2 リーマン計量と曲率

この章ではリーマン計量の定義とそれを用いた曲率の定義を紹介し、その性質を見る。

以下、 $M$  を  $n$  次元  $C^\infty$  多様体とし、各  $p \in M$  に対し、 $T_p M$  を  $p$  における接空間とする。また、 $M$  の  $C^\infty$  級ベクトル場全体の集合を  $\mathfrak{X}(M)$  で表す。

**定義 2.1.**  $g$  が  $M$  上の リーマン計量 であるとは次が成り立つこと:

- (1) 各  $p \in M$  に対し、 $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  は内積、
- (2) 各  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  に対し、 $g(X, Y) : M \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto g_p(X_p, Y_p)$  は  $C^\infty$  級。

このとき、組  $(M, g)$  を リーマン多様体 と呼ぶ。

以下では  $(M, g)$  をリーマン多様体とし、リーマン計量を用いて曲率を定義し、その基本的な性質を述べる。

**定義 2.2.** 次で定義される双線型写像  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  を Levi-Civita 接続 という:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]).$$

**命題 2.3.**  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  が Levi-Civita 接続であることの必要十分条件は次が成り立つこと:

- (i)  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ .
- (ii)  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ .

**証明 .**  $\nabla$  が Levi-Civita 接続であると仮定する。定義より、任意の  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  に対し、

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]), \\ 2g(\nabla_Y X, Z) &= Yg(X, Z) + Xg(Z, Y) - Zg(Y, X) + g([Y, X], Z) + g([Z, Y], X) + g(Y, [Z, X]) \end{aligned}$$

が成り立つ。辺々引いて、

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) &= 2g([X, Y], Z). \\ \therefore g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], Z) &= 0. \end{aligned}$$

$Z := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$  とおけば、 $g$  の非退化性により

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$$

となり、(i) が得られる。また、定義より、

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}(Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y])), \\ g(\nabla_X Z, Y) &= \frac{1}{2}(Xg(Z, Y) + Zg(Y, X) - Yg(X, Z) + g([X, Z], Y) + g([Y, X], Z) + g(X, [Y, Z])). \end{aligned}$$

辺々加えて

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = Xg(Y, Z)$$

となり, (ii) が得られる.

逆に,  $\nabla$  が (i), (ii) を満たすと仮定する. (ii) より,

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\ Yg(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \\ -Zg(X, Y) &= -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

辺々加えて

$$\begin{aligned} &Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_Y X, Z) - g(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y) - g(X, \nabla_Z Y - \nabla_Y Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Y - [X, Y], Z) - g([Z, X], Y) - g(X, [Z, Y]) \quad (\because (i)) \\ &= 2g(\nabla_X Y, Z) - g([X, Y], Z) - g([Z, X], Y) - g(X, [Z, Y]). \end{aligned}$$

これより,  $\nabla$  が Levi-Civita 接続であることが得られる. □

**定義 2.4.** 次で定義される  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) : (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$  を  $(M, g)$  の リーマン曲率テンソル と呼ぶ:

$$R(X, Y)Z := \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z.$$

**命題 2.5.** リーマン曲率テンソル  $R$  に対し, 次が成り立つ:

- (1)  $R$  は多重線型,
- (2)  $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ ,
- (3)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ ,
- (4)  $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$ ,
- (5)  $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$ .

**証明 .** (1)  $\nabla, [ , ]$  の双線型性より得られる.

(2)  $[ , ]$  の歪対称性より得られる.

(3)  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  を用いると,

$$\begin{aligned} &R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\ &= \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z \\ &\quad + \nabla_{[Y, Z]}X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_Z \nabla_Y X \\ &\quad + \nabla_{[Z, X]}Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_X \nabla_Z Y \\ &= \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_Z [X, Y] + \nabla_{[Y, Z]}X - \nabla_X [Y, Z] + \nabla_{[Z, X]}Y - \nabla_Y [Z, X] \\ &= [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \\ &= 0. \quad (\because \text{Jacobi 恒等式}) \end{aligned}$$

(4)  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$  より,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Y) &= \frac{1}{2} Xg(Y, Y), \\ g(\nabla_X Y, Z) &= -g(Y, \nabla_X Z) + Xg(Y, Z). \end{aligned}$$

これを用いて,

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)U, U) &= g(\nabla_{[X, Y]}U, U) - g(\nabla_X \nabla_Y U, U) + g(\nabla_Y \nabla_X U, U) \\ &= \frac{1}{2} [X, Y]g(U, U) + g(\nabla_Y U, \nabla_X U) - Xg(\nabla_Y U, U) - g(\nabla_X U, \nabla_Y U) + Yg(\nabla_X U, U) \\ &= \frac{1}{2} [X, Y]g(U, U) - \frac{1}{2} XYg(U, U) + \frac{1}{2} YX(U, U) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$U = Z + W$  を代入し, 整理すれば得られる.

(5) (2)(3)(4) を用いて計算すると,

$$\begin{aligned} &g(R(X, Y)Z, W) \\ &= -g(R(Y, Z)X, W) - g(R(Z, X)Y, W) \\ &= g(R(Y, Z)W, X) + g(R(Z, X)W, Y) \\ &= -g(R(Z, W)Y, X) - g(R(W, Y)Z, X) - g(R(X, W)Z, Y) - g(R(W, Z)X, Y) \\ &= 2g(R(Z, W)X, Y) + g(R(W, Y)X, Z) + g(R(X, W)Y, Z) \\ &= 2g(R(Z, W)X, Y) - g(R(Y, X)W, Z) \\ &= 2g(R(Z, W)X, Y) - g(R(X, Y)Z, W). \end{aligned}$$

これを整理して得られる.

□

**定義 2.6.** 次で定義される  $\text{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  を リッチ曲率 という:

$$\text{Ric}(X, Y)_p := \sum g(R(E_i, X)Y, E_i)_p.$$

ただし,  $E_i \in \mathfrak{X}(M)$  は  $\{(E_i)_p\}$  が  $T_p M$  の正規直交基底となるものとする.

**命題 2.7.** リッチ曲率は正規直交基底の取り方に依らない.

**証明** . 任意に  $X, Y \in \mathfrak{X}(M), p \in M$  をとる.  $\{(E_i)_p\}$  が  $T_p M$  の正規直交基底となるような  $E_i \in \mathfrak{X}(M)$  を任意にとる. 線型写像  $f : T_p M \rightarrow T_p M : Z_p \mapsto (R(Z, X)Y)_p$  を考える. すると,

$$\text{tr} f = \sum g_p(f(E_i), E_i)_p = \text{Ric}(X, Y)_p.$$

線型写像のトレースは正規直交基底の取り方に依らないので示された.

□

**命題 2.8.** Ric は対称双線型である.

証明 .

(双線型性)  $R$  と  $g$  の多重線型性より得られる.

(対称性) 任意に  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $p \in M$  をとる.  $E_i \in \mathfrak{X}(M)$  を  $\{(E_i)_p\}$  が  $T_pM$  の正規直交基底となるようにとる. すると, 命題 2.5 の (2)(4)(5) を用いることにより,

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}(X, Y)_p &= \sum g(R(E_i, X)Y, E_i)_p \\ &= \sum g(R(X, E_i)E_i, Y)_p \\ &= \sum g(R(E_i, Y)X, E_i)_p \\ &= \operatorname{Ric}(Y, X)_p.\end{aligned}$$

□

**定義 2.9.** リーマン計量  $g$  が Einstein 計量 であるとは次が成り立つこと : ある  $c \in \mathbb{R}$  が存在して,  $\operatorname{Ric} = cg$ .

### 3 等質空間

#### 3.1 リー群とそのリー環の例

この節では、本論文で例として挙げる行列のなすリー群とそのリー環を紹介する。また、リー群の表現として随伴表現を定義する。

**定義 3.1.**  $G$  を群かつ  $C^\infty$  多様体であるとする。  $G$  が リー群 であるとは次が成り立つこと：

- (i)  $G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy$  が  $C^\infty$  級,
- (ii)  $G \rightarrow G : x \mapsto x^{-1}$  が  $C^\infty$  級.

定義より、リー群は位相群である。

以下、 $M(n, \mathbb{R})$  は  $n \times n$  実行列全体の集合とする。  $M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$  と同一視し、自然な位相を定義することにより、 $M(n, \mathbb{R})$  は  $n^2$ 次元  $C^\infty$  多様体となる。

**命題 3.2.** 一般線型群  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  は行列の積に関して  $n^2$  次元リー群をなす。

**証明 .**  $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  は成分の多項式で書けるので連続である。  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  は  $\mathbb{R}$  内の開集合であり、 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  より、 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  は  $M(n, \mathbb{R})$  内の開集合である。  $M(n, \mathbb{R})$  は  $n^2$ 次元  $C^\infty$  多様体なので、その開集合  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  も  $n^2$ 次元  $C^\infty$  多様体となる。

また、積や逆元をとる演算は、成分の多項式、有理式で書けるので  $C^\infty$  級である。以上より、 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  は  $n^2$ 次元 リー群である。 □

**例 3.3.** 以下は、 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  内の閉部分群である。

- (1)  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) := \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ , (これを 特殊線型群 と呼ぶ.)
- (2)  $\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n\}$ , (これを 直交群 と呼ぶ.)
- (3)  $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n)$ . (これを 特殊直交群 と呼ぶ.)

**証明 .** まず、 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{O}(n)$  について示す。

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  内の部分群であることは、行列式の性質  $\det(g) \det(h) = \det(gh)$  及び転置行列の性質  ${}^t(gh) = {}^t h {}^t g$  を用いて容易に示される。

閉集合であることは、連続写像  $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  及び  $\varphi : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}) : g \mapsto {}^t g g$  に対し、 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\}), \mathrm{O}(n) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$  となることから従う。

$\mathrm{SO}(n)$  が閉部分群であることは、2つの閉部分群の共通部分が閉部分群になることから従う。 □

一般に、リー群  $G$  の閉部分群は  $G$  内のリー部分群となることが知られている (von Neumann-Cartan の定理)。これにより、 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$  は  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  内のリー部分群である。

**命題 3.4.**  $\mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$  はコンパクトである。

証明． $O(n)$  が有界であることを示せば十分である．

任意に  $g = (a_{ij}) \in O(n)$  をとる． ${}^tgg = I_n$  より，両辺の対角成分を比較することにより，各  $j \in \{1, \dots, n\}$  に対し，

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 1.$$

これより，すべての  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  に対して  $|a_{ij}| \leq 1$  でなければならない．よって  $O(n)$  は有界となるので示された．  $\square$

**定義 3.5.** リー群  $G$  に対し， $X \in \mathfrak{X}(G)$  が 左不変 であるとは，次が成り立つこと：任意の  $g \in G, \xi \in C^\infty(G)$  に対して， $X(\xi \circ L_a) = (X\xi) \circ L_a$ ．ただし， $L_a : G \rightarrow G : g \mapsto ag$ ．

**定義 3.6.** リー群  $G$  の左不変ベクトル場全体の集合を，リー群  $G$  のリー環 という．

**例 3.7.**  $GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), O(n), SO(n)$  のリー環はそれぞれ次のように表される：

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) &= M(n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) &= \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \text{tr}A = 0\}, \\ \mathfrak{o}(n) &= \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid {}^tA + A = 0\}, \\ \mathfrak{so}(n) &= \{A \in \mathfrak{o}(n) \mid \text{tr}A = 0\}. \end{aligned}$$

$G$  をリー群とし，各  $a \in G$  に対し，

$$I_a : G \rightarrow G : g \mapsto aga^{-1}$$

と記号を定義する．

**定義 3.8.** リー群  $G$  と，そのリー環  $\mathfrak{g}$  に対し， $\text{Ad}^G : G \rightarrow GL(\mathfrak{g}) : g \mapsto (dI_g)_e$  を  $G$  の 随伴表現 という．

随伴表現  $(\text{Ad}^G, \mathfrak{g})$  が  $G$  の連続表現であることは容易にわかる．

## 3.2 等質空間とイソトロピー表現

この節では，等質空間とそのイソトロピー表現を紹介し，リー群上の随伴表現との関係を述べる．以下， $G$  をリー群， $K$  をその閉部分群とする．

**定義 3.9.**  $M = G/K$  は  $G$  の自然な作用が  $C^\infty$  である多様体となる．この  $M$  を  $G$  の 等質空間 と呼ぶ．ここで，自然な作用  $\tau$  は次で定義される：各  $a \in G$  に対し，

$$\tau_a : G/K \rightarrow G/K : [g] \mapsto [ag].$$

**例 3.10.**  $n$  次元球面  $S^n := \{(v_1, \dots, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v_1^2 + \dots + v_{n+1}^2 = 1\}$  は次の等質空間表示

を持つ：

$$\begin{aligned} S^n &= O(n+1)/\left\{\begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in O(n)\right\} \\ &= SO(n+1)/\left\{\begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in SO(n)\right\}. \end{aligned}$$

簡単のため,  $S^n = O(n+1)/O(n) = SO(n+1)/SO(n)$  と略記する.

**例 3.11.** 実グラスマン多様体  $G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V \text{ は } k \text{ 次元線型部分空間}\}$  は次の等質空間表示を持つ：

$$\begin{aligned} G_k(\mathbb{R}^n) &= O(n)/\left\{\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \mid \alpha \in O(k), \beta \in O(n-k)\right\} \\ &= SO(n)/\left\{\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \mid \alpha \in O(k), \beta \in O(n-k), \det(\alpha)\det(\beta) = 1\right\}. \end{aligned}$$

簡単のため,  $G_k(\mathbb{R}^n) = O(n)/(O(k) \times O(n-k)) = SO(n)/S(O(k) \times O(n-k))$  と略記する.

**例 3.12.** 上半平面  $\mathbb{RH}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  は次の等質空間表示を持つ：

$$\mathbb{RH}^2 = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2).$$

以下,  $G, K$  のリー環を  $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$  とし,  $\mathfrak{g} = T_e G$  と同一視する. また,

$$\begin{aligned} \pi : G &\rightarrow G/K : g \mapsto [g], \\ \mathfrak{o} &:= [e] \end{aligned}$$

と記号を定義する.

**命題 3.13.**  $k \in K$  に対して次が成り立つ:

$$\pi \circ I_k = \tau_k \circ \pi.$$

**証明.** 任意に  $g \in G$  をとる.

$$\begin{aligned} \pi \circ I_k(g) &= \pi(kgk^{-1}) \\ &= [kgk^{-1}] \\ &= [kg] \\ &= \tau_k([g]) \\ &= \tau_k \circ \pi(g). \end{aligned}$$

□

**定義 3.14.** 等質空間  $M = G/K$  が **reductive** であるとは, 次が成り立つこと : ある  $\mathfrak{g}$  の  $\text{Ad}^G(K)$ -不変部分空間  $\mathfrak{m}$  が存在して,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$  (**reductive 分解**).

$d\pi_e|_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \rightarrow T_o(G/K)$  により  $\mathfrak{m} = T_o(G/K)$  と同一視される.

**定義 3.15.** 次で定義される  $\text{Ad}^{G/K}$  を  $G/K$  の イソトロピー表現 という:

$$\text{Ad}^{G/K} : K \rightarrow \text{GL}(T_o(G/K)) : k \mapsto (d\tau_k)_o.$$

イソトロピー表現が既約であるとき, イソトロピー既約 であるという.

**命題 3.16.**  $G/K$  を reductive (reductive 分解:  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ ) とする. このとき,  $G/K$  のイソトロピー表現は  $K$  の  $\mathfrak{m}$  における随伴表現と同値である. 即ち, 次が成り立つ: 任意の  $k \in K$  に対し,  $(d\pi)_e \text{Ad}^G(k) = \text{Ad}^{G/K}(k)(d\pi)_e$ .

**証明.** 任意に  $X \in \mathfrak{m}, \xi \in C^\infty(G/K)$  をとる.

$$\begin{aligned} (d\pi)_e(\text{Ad}^G(k)X)\xi &= (\text{Ad}^G(k)X)(\xi \circ \pi) \\ &= (dI_k)_e X(\xi \circ \pi) \\ &= X(\xi \circ \pi \circ I_k) \\ &= X(\xi \circ \tau_k \circ \pi) \\ &= (d\pi)_e X(\xi \circ \tau_k) \\ &= (d\tau_k)_o (d\pi)_e X\xi \\ &= \text{Ad}^{G/K}(k)(d\pi)_e X\xi. \end{aligned}$$

□

**例 3.17.** 次はイソトロピー既約である.

- (1)  $S^n = \text{O}(n+1)/\text{O}(n)$ ,
- (2)  $G_k(\mathbb{R}^n) = \text{O}(n)/(\text{O}(k) \times \text{O}(n-k))$ ,
- (3)  $\mathbb{R}H^2 = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$ .

**証明.** (1)  $\text{O}(n+1), \text{O}(n)$  のリー環をそれぞれ  $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$  とすると,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{o}(n+1), \\ \mathfrak{k} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & A \end{bmatrix} \in M(n+1, \mathbb{R}) \mid A \in \mathfrak{o}(n) \right\} \end{aligned}$$

と表される.

$$\mathfrak{m} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -{}^t v \\ v & 0 \end{bmatrix} \in M(n+1, \mathbb{R}) \mid v \in \mathbb{R}^n \right\}$$

とおくと,  $\mathfrak{m}$  は  $\mathfrak{g}$  の  $\text{Ad}^{\text{O}(n+1)}(\text{O}(n))$ -不変部分空間であり,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$  となるので, イソトロピー表現は随伴表現  $\text{Ad}^{\text{O}(n)} : \text{O}(n) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{m})$  と同値である. 簡単な計算により, この表現は自然な表現  $\text{O}(n) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$  と同値であることが分かる. この表現は既約なので,  $\text{O}(n+1)/\text{O}(n)$  がイソトロピー既約であることが従う.

(2)  $\text{O}(n), \text{O}(k) \times \text{O}(n-k)$  のリー環をそれぞれ  $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$  とすると,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{o}(n), \\ \mathfrak{k} &= \left\{ \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \in M(n, \mathbb{R}) \mid A \in \mathfrak{o}(k), B \in \mathfrak{o}(n-k) \right\} \end{aligned}$$



と表される.  $M(n-k, k, \mathbb{R})$  を  $(n-k) \times k$  行列全体の集合とし,

$$\mathfrak{m} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -{}^t A \\ A & 0 \end{bmatrix} \in M(n, \mathbb{R}) \mid A \in M(n-k, k, \mathbb{R}) \right\}$$

とおくと,  $\mathfrak{m}$  は  $\mathfrak{g}$  の  $\text{Ad}^{O(n)}(O(k) \times O(n-k))$ -不変部分空間であり,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$  となるので, イソトロピー表現は随伴表現  $\text{Ad}^{O(k) \times O(n-k)} : O(k) \times O(n-k) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{m})$  と同値である. 簡単な計算により, この表現は  $\pi(g, h)A := hA{}^t g$  によって定義される表現  $\pi : O(k) \times O(n-k) \rightarrow M(n-k, k, \mathbb{R})$  と同値であることが分かる. この表現は既約なので,  $G_k(\mathbb{R}^n) = O(n)/(O(k) \times O(n-k))$  がイソトロピー既約であることが従う.

(3)  $\text{SL}(2, \mathbb{R}), \text{SO}(2)$  のリー環をそれぞれ  $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$  とすると,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathfrak{k} = \mathfrak{so}(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \mid a \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

と表される.

$$\mathfrak{m} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくと,  $\mathfrak{m}$  は  $\mathfrak{g}$  の  $\text{Ad}^{\text{SL}(2)}(\text{SO}(2))$ -不変部分空間であり,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$  となるので, イソトロピー表現は随伴表現  $\text{Ad}^{\text{SO}(2)} : \text{SO}(2) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{m})$  と同値である. 簡単な計算により, この表現は  $\pi(g)v := g^2 v$  によって定義される表現  $\pi : \text{SO}(2) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$  と同値であることが分かる. この表現は既約なので,  $\mathbb{R}H^2 = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{SO}(2)$  がイソトロピー既約であることが従う. □

### 3.3 等質空間上の $G$ -不変リーマン計量

この節では, 不変リーマン計量の定義を紹介し,  $\text{Ad}$ -不変内積との対応を述べる.

**定義 3.18.**  $M = G/K$  上のリーマン計量  $g$  が  $G$ -不変 とは次が成り立つこと: 任意の  $a \in G$ , 任意の  $X, Y \in T_o(G/K)$  に対して,  $g_{[a]}(d\tau_a(X), d\tau_a(Y)) = g_o(X, Y)$ .

**命題 3.19.**  $G/K$  を reductive 等質空間とし, reductive 分解を  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$  とする. このとき, 次の 2 つは 1:1 に対応する.

- (1)  $G/K$  上の  $G$ -不変リーマン計量  $g$ .
- (2)  $\mathfrak{m}$  上の  $\text{Ad}^{G/K}$ -不変内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**証明.** まず, (1) の  $g$  を  $T_o(G/K)$  に制限することで  $\mathfrak{m}$  上の内積が得られる. 命題 3.16 より, この内積は  $\text{Ad}^{G/K}$ -不変である.

逆に,  $\langle, \rangle_{\circ}$  を  $\text{Ad}^{G/K}$ -不変内積とする. 各  $[a] \in G/K$  に対し,  $T_{[a]}(G/K)$  上の内積  $\langle, \rangle_{[a]}$  を

$$\langle X, Y \rangle_{[a]} := \langle d\tau_{a^{-1}}(X), d\tau_{a^{-1}}(Y) \rangle_{\circ}$$

で定義する. この  $\langle, \rangle_{[a]}$  が well-defined であることを示す.  $[a] = [b]$  とすると,  $b^{-1}a = k$  となる  $k \in K$  が存在する. これより,  $\tau_k = \tau_{b^{-1}} \circ \tau_a$ .  $\langle, \rangle_{\circ}$  は  $\text{Ad}^{G/K}$ -不変なので,

$$\begin{aligned} \langle d\tau_{a^{-1}}(X), d\tau_{a^{-1}}(Y) \rangle_{\circ} &= \langle d\tau_k d\tau_{a^{-1}}(X), d\tau_k d\tau_{a^{-1}}(Y) \rangle_{\circ} \\ &= \langle d\tau_{b^{-1}}(X), d\tau_{b^{-1}}(Y) \rangle_{\circ}. \end{aligned}$$

よって,  $\langle, \rangle_{[a]}$  は well-defined である. これにより  $G/K$  上の  $G$ -不変リーマン計量が得られる.  $\square$

### 3.4 主定理の証明

本論文の主定理を述べる.

**定理 3.20** (J.A.Wolf).  $M = G/K$  を reductive な等質空間, reductive 分解を  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$  とし,  $K$  はコンパクトであるとする. このとき,  $M$  がイソトロピー既約ならば,  $M$  上に定数倍を除いて一意に  $G$ -不変リーマン計量が存在する. さらに, このリーマン計量は Einstein 計量である.

以下で証明を与える. まず, 存在を示す.

**命題 3.21.**  $M$  上に  $G$ -不変リーマン計量が存在する.

**証明 .**  $K$  はコンパクト位相群,  $(\text{Ad}^{G/K}, \mathfrak{m})$  は  $K$  の連続表現なので, 命題 1.15 より,  $\mathfrak{m}$  上に  $\text{Ad}^{G/K}$ -不変内積が存在する. よって命題 3.19 により  $M$  上の  $G$ -不変リーマン計量  $g$  が得られる.  $\square$

次に, 一意性を示す.

**命題 3.22.**  $\text{Ad}^{G/K}$ -不変な対称双線型  $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{R}$  は定数倍を除いて一意的である.

**証明 .**  $(\text{Ad}, \mathfrak{m})$  はコンパクト位相群  $K$  の既約表現である. よって定理 1.16 より,  $\text{Ad}^{G/K}$ -不変な対称双線型  $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{R}$  は定数倍を除いて一意的である.  $\square$

よって,  $G$ -不変リーマン計量は定数倍を除いて一意的であることがわかる. 最後に, この計量が Einstein であることを示す.

$X, Y, Z \in \mathfrak{m}$  のとき,  $2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(X, [Y, Z]) + g([X, Z], Y)$  が成り立つ. これを用いて Levi-Civita 接続, リーマン曲率テンソルの性質を見る.

**命題 3.23.**  $X, Y \in \mathfrak{m}, k \in K$  に対し,  $\nabla_{\text{Ad}(k)(X)}(\text{Ad}(k)(Y)) = \text{Ad}(k)\nabla_X Y$ .

証明 .

$$\begin{aligned}
& 2g(\nabla_{\text{Ad}(k)(X)}(\text{Ad}(k)(Y)), Z) \\
&= g([\text{Ad}(k)(X), \text{Ad}(k)(Y)], Z) + g(\text{Ad}(k)(X), [\text{Ad}(k)(Y), Z]) + g([\text{Ad}(k)(X), Z], \text{Ad}(k)(Y)) \\
&= g(\text{Ad}(k)([X, Y]), Z) + g(\text{Ad}(k)(X), \text{Ad}(k)([Y, \text{Ad}(k^{-1})(Z)])) \\
&\quad + g(\text{Ad}(k)([X, \text{Ad}(k^{-1})(Z)]), \text{Ad}(k)(Y)) \quad (\cdot \text{Ad}(k) \text{ はリ一環同型}) \\
&= g([X, Y], \text{Ad}(k^{-1})(Z)) + g(X, [Y, \text{Ad}(k^{-1})(Z)]) + g([X, \text{Ad}(k^{-1})(Z)], Y) \\
&= 2g(\nabla_X Y, \text{Ad}(k^{-1})(Z)) \\
&= 2g(\text{Ad}(k)\nabla_X Y, Z).
\end{aligned}$$

$g$  の非退化性より得られる. □

**命題 3.24.**  $X, Y, Z \in \mathfrak{m}, k \in K$  に対し,  $R(\text{Ad}(k)(X), \text{Ad}(k)(Y))(\text{Ad}(k)(Z)) = \text{Ad}(k)(R(X, Y)Z)$ .

証明 .

$$\begin{aligned}
& R(\text{Ad}(k)(X), \text{Ad}(k)(Y))(\text{Ad}(k)(Z)) \\
&= \nabla_{[\text{Ad}(k)(X), \text{Ad}(k)(Y)]}(\text{Ad}(k)(Z)) - \nabla_{(\text{Ad}(k)(X))} \nabla_{(\text{Ad}(k)(Y))}(\text{Ad}(k)(Z)) \\
&\quad + \nabla_{(\text{Ad}(k)(Y))} \nabla_{(\text{Ad}(k)(X))}(\text{Ad}(k)(Z)) \\
&= \nabla_{(\text{Ad}(k)([X, Y])}(\text{Ad}(k)(Z)) - \nabla_{(\text{Ad}(k)(X))}(\text{Ad}(k)(\nabla_Y Z)) + \nabla_{(\text{Ad}(k)(Y))}(\text{Ad}(k)(\nabla_X Z)) \\
&= \text{Ad}(k)(\nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z) \\
&= \text{Ad}(k)R(X, Y)Z.
\end{aligned}$$

□

**命題 3.25.** Ric は Ad-不変である.

証明 .

$$\begin{aligned}
\text{Ric}(\text{Ad}(k)(X), \text{Ad}(k)(Y)) &= \sum g(R(\text{Ad}(k)(Ei), \text{Ad}(k)(X))(\text{Ad}(k)(Y)), \text{Ad}(k)(Ei)) \\
&= \sum g(\text{Ad}(k)(R(Ei, X)Y), \text{Ad}(k)(Ei)) \\
&= \sum g(R(Ei, X)Y, Ei) \\
&= \text{Ric}(X, Y).
\end{aligned}$$

□

命題 3.22 より, ある  $c \in \mathbb{R}$  が存在して,  $\text{Ric} = cg$  と書けるので, このリーマン計量  $g$  は Einstein 計量である. 以上より, 主定理が示された.

命題 3.4, 例 3.17 より,

- $S^n = O(n+1)/O(n)$ ,
- $G_k(\mathbb{R}^n) = O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ ,
- $\mathbb{R}H^2 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$

はこの定理の仮定を満たすので, これらは不変リーマン計量が一意的に存在し, さらに Einstein 計量であることが分かる.

## 参考文献

- [1] 小林 俊行, 大島 利雄: リー群と表現論, 岩波書店, 2005.
- [2] Andreas Arvanitoyeorgos: *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*, American Mathematical Society, 2003.
- [3] 酒井 隆: リーマン幾何学, 裳華房, 1992.
- [4] 田丸 博士: 集合としての対称空間, preprint.