等質空間と対称空間*

田丸 博士 (広島大学理学研究科)

概要

田丸の専門分野である「対称空間や等質空間の幾何学」について, その極めて初歩的な部分を, 主に円周を例として紹介する.

1 イントロ

本稿の目的は, 対称空間や等質空間の幾何学の, 極めて初歩的な部分を紹介することである. 一般論を網羅的に紹介することも, その証明を与えることもできないが, 以下で定義される円周 S^1 (より正確に言うと $\mathbb{R}^2$ 内の単位円) を例として, その感覚が伝わるようにしたい:

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

円周 S^1 は, 学部の講義で習うように, 群 (回転群と同型), 位相空間, 可微分多様体, といった構造をもつ. さらに, S^1 は「対称空間」の構造を持つ. 対称空間とは, (定義は次節で述べるが) 各点における点対称が定められた空間である. 円周 S^1 は, 各点 $p \in S^1$ における点対称 $s_p : S^1 \to S^1$ を「中心 o と p を通る直線に関する折り返し」と定義することにより, 対称空間となる. このことを紹介し, それが等質空間 (あるいは群) とどう関係するか, ということを解説する.

2 対称空間

ここでは対称空間の定義と, 簡単な例を紹介する. ここで紹介する対称空間は, 一般的なものよりかなり情報を落としたものであることに注意する.

定義 2.1. X を集合, $\mathrm{Map}(X, X) := \{f : X \to X : 写像\}$ とし, $s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$ を考える. このとき, 組 (X, s) が **対称空間** であるとは, 以下が成り立つこと:

(S1) $\forall x \in X,\ s_x(x) = x$.

(S2) $\forall x \in X,\ s_x^2 = \mathrm{id}$.

(S3) $\forall x, y \in X,\ s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

例 2.2. $\mathbb{R}^2$ に通常の点対称を考えたものは対称空間である.

* 広島大学理学部数学科「先端数学」(2015/04/16) 講義資料, 2015/04/20 更新

証明．条件 (S1), (S2) は明らか．条件 (S3) は, 絵を描けば確かめられる．式で確かめるためには, $x \in \mathbb{R}^2$ における点対称 s_x が

$$2x = y + s_x(y)$$

をみたすことを用いれば良い． □

例 2.3. S^1 に対して, $x \in S^1$ における点対称を「中心 o と p を通る直線に関する折り返し」で定義したものは, 対称空間である．

問題 2.4 (レポート問題 1)**.** S^1 における上記の点対称を式で表し, 条件 (S3) をみたすことを示せ．

注意 2.5. 一般的な対称空間の定義では, X が可微分多様体 (あるいはリーマン多様体) であることを要請する．その場合には, その構造に応じた条件が追加される．(少なくとも点対称 s_x は可微分写像でなければならない．他にも, もう少し条件が加わる.)

注意 2.6. 多様体の講義で最初に紹介されるような有名な多様体 (例えば球面, 射影空間など) は, そのほとんどが対称空間である．

3　等質空間と対称空間

群 G とその部分群 K を用いて G/K と表示されるものを等質空間と呼ぶ．ここでは, 等質空間と対称空間の関係の極一部を紹介する．

命題 3.1. G を群, K をその部分群とする．このとき, 次で定義される $\sim$ は群 G 上の同値関係である: $g, h \in G$ に対して, $g \sim h :\Leftrightarrow g^{-1}h \in K$.

定義 3.2. 上記のような G, K, $\sim$ に対して, G の $\sim$ による商集合を <u>G の K による商集合</u> と呼び, G/K で表す．すなわち, $G/K := G/\sim$.

例 3.3. G, K を次のように定める:

$$G := \mathrm{O}(2) := \{g \in M(2, \mathbb{R}) \mid {}^t g \cdot g = I_2\},$$
$$K := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

このとき $G/K \cong S^1$, すなわち G/K と S^1 の間に全単射が存在する．

問題 3.4 (レポート問題 2)**.** 上記の G, K に対して, 次で定める F が well-defined かつ全単射であることを示せ:

$$F : G/K \to S^1 : [g] \mapsto g e_1 \quad (\text{ただし } e_1 := {}^t(1, 0)).$$

このことから, 円周 S^1 は等質空間である．次の定理は, 等質空間が対称空間になるための条件を与える．このことから, 対称空間と群論が密接に関係する．

定理 3.5. G を群, K をその部分群, $\sigma : G \to G$ を自己同型写像で, $\sigma^2 = \mathrm{id}$ をみたすものとする. さらに, 次が成り立つと仮定する:

$$\forall k \in K,\ \sigma(k) = k.$$

このとき, 以下で定義される (X, s) は対称空間である:

$$X := G/K, \quad s_{[g]} : X \to X : [h] \mapsto [g\sigma(g^{-1}h)].$$

注意 3.6. 定理の証明は省略する (well-defined と条件 (S1)–(S3) を確認すれば良いだけので, 難しくはないが, 長い). また逆に, 雑に言うと, 「ほとんど全ての」対称空間はこの方法で得られることも分かっている.

注意 3.7. 可微分多様体 (あるいはリーマン多様体) としての対称空間についても, 同様の定理が成り立つ. その場合には, G が群であるだけでなく多様体でもある (そのようなものをリー群と呼ぶ) などの条件が加わる.

例 3.8 (レポート問題 3: やや難)**.** 例 3.3 の G, K に対して, σ を次で定める:

$$\sigma : G \to G : g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

このとき, この (G, K, σ) から定理 3.5 の方法で得られる対称空間 (X, s) が, S^1 に先の点対称を入れたものと同型であることを示せ.

ここで, 対称空間の間の写像 $f : (X, s) \to (Y, s')$ が **準同型** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in X$, $f \circ s_x = s'_{f(x)} \circ f$. また, 全単射な準同型写像のことを **同型写像** と呼ぶ. レポート問題 3 に解答するためには, レポート問題 2 で与えられた写像 F が (全単射であることは既知なので) 準同型であることを示せば良い.