# 1　数学通論 I (2015/04/09): ガイダンス

## 1.1　概要説明

集合の上に “距離” が与えられたものを距離空間と呼びます. 例えば実数 $\mathbb{R}$ やユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ には, 自然に距離が定義され, 距離空間となります. この講義では, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ と順を追って解説し, 最終的には一般の距離空間を扱います.

この講義で必要となる予備知識は, 実数の性質・数列の収束・連続関数 (解析学の内容), 論理・集合・写像 (数学概説の内容) です. 特に, 論理記号の使い方や証明の書き方は, 非常に大事です. 是非ここで身に付けましょう. (そのことは, 数学の全ての分野・科目を学ぶための基礎となります.)

## 1.2　成績・単位

講義と演習共通で, 中間試験と期末試験を行います. その点数に, 演習での発表回数と小テストの成績を加味して, 合否を判定し, 成績を付けます. (合格ボーダー上の場合は, 試験前事前レポートを考慮に入れます.) なお, 講義と演習の合否は連動します.

## 1.3　要請

この科目の大きな目的は, 数学における証明の書き方を身に付けることです. そのために, 答案や発表で証明を書く際には, 以下の二点を要請します:

(1)「示すこと」を論理記号で最初に宣言すること.

(2) 証明は, 宣言した「示すこと」に忠実に従って書くこと.

講義で証明する際には, この方法に従いますので, まずは真似をして下さい.

## 1.4　演習・発表・小テスト

証明の書き方を身に付けるために, 演習での発表や小テストを利用します. そのため, 今回は以下のような方法を取らせて頂きます:

(1) 演習では, 説明をしながら黒板に解答を書いて下さい. (授業をするようなつもりで)

(2) 講義では不定期に小テスト問題を配布します. 答案は, 講義終了後 (あるいは都合が合う適当な時間) に持って来れば, 添削します.

(3) 演習の最初の時間に, 上記の問題を使った小テストを行います. この小テストは, 完答した場合には点数を成績に加算します. (答案は翌週までに返却する予定です.)

(4) 完答できなかった答案は, 翌週にレポートとして再提出することができます. ただし後日にまとめて提出することは認めません.

# 2　数学通論 I (2015/04/09): $\mathbb{R}$ 内の開集合

## 2.1　記号の復習

この講義を通して, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す. また, 以下で定義される集合 $(a,b)$ を 開区間, $[a,b]$ を 閉区間 と呼ぶ:

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

**定義 2.1.** $A, B$ を集合とする. 次が成り立つとき, $A$ は $B$ の 部分集合 であると言い, 記号 $A \subset B$ で表す: $\forall x \in A,\ x \in B$.

## 2.2　内点と内部

**定義 2.2.** $A \subset \mathbb{R}$ とする.

(1) $x$ $(\in \mathbb{R})$ が $A$ の 内点 であるとは, 次が成り立つこと: $\exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$.

(2) $A^\circ := \{x \in \mathbb{R} \mid x$ は $A$ の内点 $\}$ を $A$ の 内部 と呼ぶ.

**例 2.3.** $[0,2) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $1 \in [0,2)^\circ$.

(2) $0 \notin [0,2)^\circ$.

**問題 2.4** (小テスト問題 (1))**.** $A := [0,2)$ とする. 次を定義に従って示せ: $(0,2) \subset A^\circ$.

**命題 2.5.** $A \subset \mathbb{R}$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.

(2) $(a,b) \subset A$ ならば $(a,b) \subset A^\circ$.

(3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

**例 2.6.** 内部について, 以下が成り立つ:

(1) $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R},\ \emptyset^\circ = \emptyset$.

(2) $(a,b)^\circ = [a,b]^\circ = [a,b)^\circ = (a,b]^\circ = (a,b)$.

(3) $(a,+\infty)^\circ = [a,+\infty)^\circ = (a,+\infty)$.

(4) $(-\infty,b)^\circ = (-\infty,b]^\circ = (-\infty,b)$.

## 2.3 開集合

**定義 2.7.** $A$ $(\subset \mathbb{R})$ が 開集合 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.

**命題 2.8.** $A$ $(\subset \mathbb{R})$ が開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $A = A^\circ$.

**例 2.9.** 以下は開集合: $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $(a, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $\ldots$

**定理 2.10.** $\mathbb{R}$ の開集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}$ は開集合.

(2) $O_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ も開集合.

(3) $O_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ も開集合.

すなわち, 有限個の開集合の共通部分は開集合であり, 開集合の和集合は (有限個でも無限個でも) 開集合である.

**問題 2.11** (小テスト問題 (2))**.** $O_1$, $O_2$ を $\mathbb{R}$ 内の開集合とする. このとき $O_1 \cap O_2$ も $\mathbb{R}$ 内の開集合であることを, 定義に従って示せ.

**例 2.12.** $A_n := (-1, \dfrac{1}{n})$ とすると, 次が成り立つ: $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-1, 0]$. すなわち, 無限個の開集合の共通部分は, 開集合になるとは限らない.

## 2.4 演習問題

**問題 2.13.** 以下の集合の内部が何になるかを予想し, それを示せ (証明は省略しないこと. ただし, 命題 2.5 の結果は用いて良い):

(1) $(-\infty, 0]$.

(2) $\{1\}$ (一点集合).

**問題 2.14.** $A, B \subset \mathbb{R}$ とする. 以下のそれぞれの主張に対して, 正しい場合には証明し, 正しくない場合は反例を挙げよ:

(1) $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$.

(2) $A^\circ \cap B^\circ \supset (A \cap B)^\circ$.

(3) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.

(4) $A^\circ \cup B^\circ \supset (A \cup B)^\circ$.

## 数学通論 I (2015/04/09 出題): 小テスト問題 (1)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

**問題 2.15.** $A := [0, 2)$ とする. 次を定義に従って示せ: $(0, 2) \subset A^{\circ}$.

学生番号 ______________________ 氏名 ______________________________

## 数学通論 I (2015/04/09 出題): 小テスト問題 (2)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

**問題 2.16.** $O_1, O_2$ を $\mathbb{R}$ 内の開集合とする. このとき $O_1 \cap O_2$ も $\mathbb{R}$ 内の開集合であることを, 定義に従って示せ.

学生番号 ____________________ 氏名 ______________________________

# 3 数学通論 I (2015/04/16): $\mathbb{R}$ 内の閉集合

## 3.1 前回の補足

**例 3.1** (再掲)**.** $A_n := (-1, \dfrac{1}{n})$ とすると, 次が成り立つ: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = (-1, 0]$. すなわち, 無限個の開集合の共通部分は, 開集合になるとは限らない.

## 3.2 触点と閉包

**定義 3.2.** $A \subset \mathbb{R}$ とする.

(1) $x$ $(\in \mathbb{R})$ が $A$ の <u>触点</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(2) $\overline{A} := \{x \in \mathbb{R} \mid x$ は $A$ の触点 $\}$ を $A$ の <u>閉包</u> と呼ぶ.

**例 3.3.** 次が成り立つ:

(1) $1 \in \overline{[0, 1)}$.

(2) $2 \notin \overline{[0, 1)}$.

**命題 3.4.** $A \subset \mathbb{R}$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) $(a, b) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $(a, b) \cap A \neq \emptyset$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

**例 3.5.** 閉包について, 次が成り立つ:

(1) $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(2) $\overline{(a, b)} = \overline{[a, b]} = \overline{[a, b)} = \overline{(a, b]} = [a, b]$.

(3) $\overline{(a, +\infty)} = \overline{[a, +\infty)} = [a, +\infty)$.

(4) $\overline{(-\infty, b)} = \overline{(-\infty, b]} = (-\infty, b]$.

**補題 3.6.** 数列 $\{a_n\}$ が $A$ に含まれ, $a$ に収束するとき, 次が成り立つ: $a \in \overline{A}$.

**例 3.7.** 閉包について, 以下が成り立つ: $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

## 3.3 閉集合の定義

**定義 3.8.** $A$ $(\subset \mathbb{R})$ が <u>閉集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\overline{A} = A$.

**例 3.9.** 以下は閉集合: $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, 有限集合, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

ここで, 「閉集合である」ことと「開集合でない」ことは, 全く意味が異なることに注意する. 例えば $\emptyset$, $\mathbb{R}$ は開集合かつ閉集合である. また, $(a, b]$ は開集合でも閉集合でもない.

## 3.4 閉集合の性質

**命題 3.10.** 次が成り立つ: $\mathbb{R} - \overline{A} = (\mathbb{R} - A)^\circ$.

ここで $X - Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$. これを差集合という. 差集合は $X \setminus Y$ と表記することもある. 全集合からの差集合 $\mathbb{R} - A$ を補集合と呼び, $A^c$ と表すこともある.

**定理 3.11.** $A$ が閉集合であるための必要十分条件は, $\mathbb{R} - A$ が開集合となること.

**定理 3.12.** $\mathbb{R}$ の閉集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}$ は閉集合.

(2) $F_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ も閉集合.

(3) $F_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

## 3.5 演習問題

**問題 3.13.** $A$ $(\subset \mathbb{R})$ は有限集合ならば閉集合であることを示せ. (命題 3.4 (1) は用いて良い.)

**問題 3.14.** 無限個の閉集合の和集合は, 閉集合になるとは限らない. 反例を挙げよ. (与えた集合が閉集合であるかないかは, 分かっているとして良い. ただし, 和集合がどうなるかについては, 証明を与えよ.)

**問題 3.15.** $A, B \subset \mathbb{R}$ とする. 以下のそれぞれの主張に対して, 正しい場合には証明し, 正しくない場合は反例を挙げよ:

(1) $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

(2) $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$.

(3) $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

(4) $\overline{A} \cup \overline{B} \supset \overline{A \cup B}$.

## 数学通論 I (2015/04/16 出題): 小テスト問題 (3)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

**問題 3.16.** $A \subset \mathbb{R}$ とし, $m$ が $A$ の上限であるとする. このとき $m \in \overline{A}$ を定義に従って示せ.

**注意 3.17.** 実数 $m$ が $A$ の上限であるとは, 次が成り立つこと:

(i) $\forall a \in A,\ a \leq m.$

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A : m - \varepsilon < a.$

学生番号 ______________________ 氏名 ______________________

# 4　数学通論 I (2015/04/23): $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合 (1)

## 4.1　前回の補足

**命題 4.1** (命題 3.4 (2) の差し替え)**.** $O, A \subset \mathbb{R}$ とし, $O$ は開集合であるとする. このとき次が成り立つ: $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $O \cap A \neq \emptyset$.

この命題は, 以下の事実に基づいて証明される: $O' \subset O$ で $O' \cap A \neq \emptyset$ をみたすものが存在するならば, $O \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ.

## 4.2　コンパクト集合の定義

以下では $A \subset \mathbb{R}$ とする.

**定義 4.2.** $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \subset \mathbb{R} \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合族とする. $\mathfrak{U}$ が $A$ の <u>開被覆</u> (<u>**open cover**</u>) とは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, $U_\lambda$ は開集合,

(ii) $A \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

**例 4.3.** 以下は $(0,2)$ の開被覆:

(1) $\{(-1,1), (0,1), (0,3)\}$.

(2) $\{(1/n, 2) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(3) $\{\mathbb{R}\}$.

**定義 4.4.** $A$ が <u>コンパクト</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ : $A$ の開被覆, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ : $A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$.

**例 4.5.** $\mathbb{R}$, $(0,2)$, $[0,+\infty)$ はコンパクトでない.

**命題 4.6.** 閉区間 $[a,b]$ はコンパクト.

## 数学通論 I (2015/04/23 出題): 小テスト問題 (4)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

**問題 4.7.** $[0, +\infty)$ がコンパクトでないことを, 定義に従って示せ.

学生番号 ______________________ 氏名 ______________________________

# 5 数学通論 I (2015/04/30): $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合 (2)

## 5.1 前回の補足

**例 5.1** (再掲)**.** $(0, 2)$ はコンパクトでない.

**命題 5.2** (再掲)**.** 閉区間 $[a, b]$ はコンパクト.

## 5.2 コンパクト集合の性質

以下では $A, K \subset \mathbb{R}$ とする. コンパクト集合は $K$ で表すことが多い.

**定義 5.3.** $A$ が 有界 とは, 次が成り立つこと: $\exists a, b \in \mathbb{R} : A \subset [a, b]$.

**命題 5.4.** $K$ をコンパクト集合とする. このとき $K$ は有界閉集合である.

**例 5.5.** 以下はコンパクト集合ではない:

(1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $(0, +\infty)$, $[0, +\infty)$, $\ldots$

(2) $(a, b)$, $(a, b]$, $[a, b)$, $\ldots$

**命題 5.6.** コンパクト集合内の閉集合はコンパクト. すなわち, $K$ を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合, $F$ を $\mathbb{R}$ 内の閉集合とし, $F \subset K$ が成り立つとすると, $F$ はコンパクト集合である.

**定理 5.7.** $K$ がコンパクト集合であるための必要十分条件は, $K$ が有界閉集合となること.

**系 5.8.** $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合は, 最大値と最小値をもつ.

## 5.3 演習問題

**問題 5.9.** $A$ $(\subset \mathbb{R})$ が有界であることと, 次が同値であることを示せ: $\exists R > 0 : A \subset (-R, R)$.

**問題 5.10.** $K_1$, $K_2$ $(\subset \mathbb{R})$ をコンパクト集合とすると, $K_1 \cup K_2$ もコンパクト集合である.

(1) 上の性質を, コンパクト集合の定義に従って示せ.

(2) 上の性質を, 有界閉集合の性質を調べることによって示せ. (定理 5.7 は用いて良い.)

**問題 5.11.** $\mathbb{R}$ 内の開集合は, 最大値をもたないことを示せ.

**問題 5.12.** $A := \{1, 2, 3\}$ (三点集合) がコンパクトであることを, 定義に従って示せ.

# 6　数学通論 I (2015/05/07): $\mathbb{R}$ 上の連続写像

ここでは, 写像 (関数) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることを定義し, その性質を調べる.

## 6.1　連続写像の定義

**定義 6.1.** 写像 $f : X \to Y$ を考える.

(1) $A \subset X$ に対して, 次を $f$ による <u>像</u> と呼ぶ: $f(A) := \{f(a) \in Y \mid a \in A\}$.

(2) $B \subset Y$ に対して, 次を $f$ による <u>逆像</u> と呼ぶ: $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

**定義 6.2.** $a \in \mathbb{R}$ とする. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が <u>$a$ で連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f((a - \delta, a + \delta)) \subset (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

**注意 6.3.** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $a$ で連続であることと次は同値: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

写像 $f$ を「$x$ を入力したら $f(x)$ が出力されるもの」だと思うと, 連続写像の条件は「入力の誤差を十分小さくすれば, 出力の誤差を十分小さくできる」と言うことができる. 条件の記号を用いると, $\delta$ が入力の誤差, $\varepsilon$ が出力の誤差.

**例 6.4.** 次の写像は $x = 0$ で連続: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$.

**例 6.5.** 次の写像は $x = 0$ で連続でない:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

**定義 6.6.** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が <u>連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in \mathbb{R}$, $f$ は $a$ で連続.

## 6.2　連続写像の性質

**例 6.7.** 以下の写像は連続である:

(1) 定値写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c$. (ただし $c \in \mathbb{R}$ は定数.)

(2) 恒等写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$.

**命題 6.8** (復習)**.** 写像 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $a$ で連続であるとし, $c \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 以下の写像も $a$ で連続である:

(1) 関数の和 $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$.

(2) 関数の定数倍 $cf : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cf(x)$.

(3) 関数の積 $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)g(x)$.

以上のことを組み合わせると, 例えば多項式関数が連続であることが示される.

## 6.3 連続写像と開集合・閉集合

写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることと, 開集合の逆像が開集合となることが同値である. このように, 写像が連続であるための必要十分条件を, 開集合や閉集合を用いて表すことができる.

**補題 6.9.** 写像 $f : X \to Y$ および $A \subset X$, $B \subset Y$ を考える. このとき次が成り立つ: $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.

**定理 6.10.** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることと次は同値: $\forall O$ : 開集合, $f^{-1}(O)$ : 開集合.

**系 6.11.** $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とすると, $g \circ f$ も連続.

**系 6.12.** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることと次は同値: $\forall F$ : 閉集合, $f^{-1}(F)$ : 閉集合.

## 6.4 連続写像とコンパクト性

**命題 6.13.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とし, $K$ を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合とする. このとき $f(K)$ は ($\mathbb{R}$ 内の) コンパクト集合である.

**系 6.14.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とし, $K$ を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合とする. このとき $f$ は $K$ 上で最大値と最小値をもつ.

## 6.5 演習問題

**問題 6.15.** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cx + d$ を考える. ただし $c > 0$ とする. このとき, $f$ が連続であることを定義に従って示せ.

**問題 6.16.** 連続写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について, 以下の主張が正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ:

(1) 開集合の像は開集合である.
(2) 閉集合の像は閉集合である.
(3) 有界な集合の像は有界である.
(4) 有界な集合の逆像は有界である.
(5) コンパクト集合の逆像はコンパクト集合である.

# 数学通論 I (2015/05/07): 小テスト問題 (5)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

**問題 6.17.** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であるための必要十分条件は, 任意の開集合の逆像が開集合となることである. このことを用いて, 次の写像が連続でないことを示せ:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

学生番号 ______________________　氏名 ______________________________

# 7 数学通論 I (2015/05/14): $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離

$\mathbb{R}$ 内の開集合・閉集合を定義するとき, 開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ を用いた. $\mathbb{R}^n$ 内でこれに対応するものを定義するためには, $\mathbb{R}^n$ 上の (標準的な) 距離が必要となる.

## 7.1 $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離の定義

以下では, $x = (x_i) = (x_1, \ldots, x_n)$ のように $\mathbb{R}^n$ の元を表す.

**定義 7.1.** 次で定義される $d$ を $\mathbb{R}^n$ 上の <u>標準的な距離</u> と呼ぶ:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

上記の標準的な距離は, $\mathbb{R}^n$ 上のノルムを使って表すこともできる. ここで, $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な内積やノルムは次で定義されていた:

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \quad ||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

**命題 7.2.** $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = ||x - y||$.

## 7.2 $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離の性質

**補題 7.3** (Cauchy-Schwarz の不等式)**.** $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$, $|\langle a, b \rangle| \leq ||a|| \cdot ||b||$.

ちなみにこの両辺を二乗したものを成分で書くと, 次のようになる:

$$\left( \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right).$$

**命題 7.4.** $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離 $d$ は次をみたす:

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) \geq 0$, かつ "$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$".
(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = d(y, x)$.
(3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$. (これを <u>三角不等式</u> と呼ぶ)

**定義 7.5.** $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ に対して, 次を $a$ の <u>$\varepsilon$-近傍</u> と呼ぶ:

$$U(a; \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < \varepsilon\}.$$

**例 7.6.** $n = 1$ のとき, 以下が成り立つ:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad U(a; \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

# 数学通論 I (2015/05/14): 小テスト問題 (6)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

**定義 7.7.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

(1) $x$ $(\in \mathbb{R}^n)$ が $A$ の <u>内点</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \subset A$.

(2) $A^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ は $A$ の内点 $\}$ を $A$ の <u>内部</u> と呼ぶ.

**問題 7.8.** $y \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ とする. このとき次を示せ: $U(y; \delta) \subset U(y; \delta)^\circ$. (ヒント: 三角不等式)

学生番号 ________________ 氏名 ________________

# 8 数学通論 I (2015/05/21): $\mathbb{R}^n$ 内の開集合

$\mathbb{R}^n$ 内の部分集合の内点や内部を定義し, 開集合を定義する. $\mathbb{R}$ 内の部分集合を扱った時には, 開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ を本質的に用いた. $\mathbb{R}^n$ の場合の議論は, それを $\varepsilon$-近傍 $U(x;\varepsilon)$ に置き換えたものである.

## 8.1 内点と内部

**定義 8.1.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

(1) $x$ $(\in \mathbb{R}^n)$ が $A$ の <u>内点</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.

(2) $A^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ は $A$ の内点 $\}$ を $A$ の <u>内部</u> と呼ぶ.

**例 8.2.** $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $(1,0) \in A^\circ$.

(2) $(2,0) \notin A^\circ$.

**命題 8.3.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.

(2) $U(x;\varepsilon) \subset A$ ならば $U(x;\varepsilon) \subset A^\circ$.

(3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

**例 8.4.** 内部について, 以下が成り立つ:

(1) $(\mathbb{R}^n)^\circ = \mathbb{R}^n$, $\emptyset^\circ = \emptyset$.

(2) $U(a;\varepsilon)^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) \leq \varepsilon\}^\circ = U(a;\varepsilon)$.

## 8.2 $\mathbb{R}^n$ 内の開集合

**定義 8.5.** $A$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ が <u>開集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.

**命題 8.6.** $A$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ が開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $A = A^\circ$.

**例 8.7.** 以下は開集合: $U(a;\varepsilon)$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, $\ldots$

**定理 8.8.** $\mathbb{R}^n$ の開集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ は開集合.

(2) $O_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{m} O_i$ も開集合.

(3) $O_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ も開集合.

## 8.3　演習問題

**問題 8.9.** 以下の集合の内部が何になるかを予想し, それを示せ (証明は省略しないこと．ただし, 命題 8.3 の結果は用いて良い):

(1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$.

(2) $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-\infty, 0]\}$.

**問題 8.10** (定理 8.8 (3))**.** $O_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ が $\mathbb{R}^n$ 内の開集合であるとする．このとき, $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ も $\mathbb{R}^n$ 内の開集合であることを示せ.

**問題 8.11.** $X, Y \subset \mathbb{R}$ に対して, 次のように定義する:

$$X \times Y := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

また, $A, B \subset \mathbb{R}$ とする．このとき, 以下のそれぞれの主張に対して, 正しい場合には証明し, 正しくない場合は反例を挙げよ:

(1) $A^\circ \times B^\circ \subset (A \times B)^\circ$.

(2) $A^\circ \times B^\circ \supset (A \times B)^\circ$.

## 8.4　中間試験事前救済レポート

**問題 8.12** (事前レポート問題, 2015/05/28 締切, 提出任意)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する中間試験問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け．ただし, レポートの一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと．表紙を付けてはならない.

(1) 開集合．(2) 閉集合．(3) コンパクト集合．(4) 連続写像.

## 9　数学通論 I (2015/06/04): 中間試験

### 注意

証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を必ず書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

### 定義や用語

解答する際には, 以下の定義などを参考にして良い.

- $x$ $(\in \mathbb{R}^n)$ が $A$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ の内点 $:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$. (ここで $U(x;\varepsilon)$ は $x$ の $\varepsilon$-近傍)
- $x$ $(\in \mathbb{R})$ が $A$ $(\subset \mathbb{R})$ の触点 $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
- 内部 $A^\circ$ とは, $A$ の内点全体の集合. 閉包 $\overline{A}$ とは, $A$ の触点全体の集合.
- $A$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ が開 $:\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.
- $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が $A$ の開被覆 $:\Leftrightarrow$ (i) 全ての $U_\lambda$ は開, (ii) $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.
- $A$ $(\subset \mathbb{R})$ がコンパクトとは, 任意の開被覆に対して, 有限部分被覆が存在すること.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $a$ $(\in \mathbb{R})$ で連続 $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f((a-\delta, a+\delta)) \subset (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続 $:\Leftrightarrow$ $f$ は任意の $a$ $(\in \mathbb{R})$ で連続.
- $A$ $(\subset \mathbb{R})$ が有界 $:\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : A \subset [a,b]$.

### 問題

**[1]** $O$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ を開集合とし, $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 次を定義に従って示せ: $O \subset A \Rightarrow O \subset A^\circ$. (20 点)

**[2]** $A \subset \mathbb{R}$ とし, $A = \overline{A}$ が成り立つとする. このとき, 差集合 $\mathbb{R} - A$ が開集合であることを, 定義に従って示せ. (20 点)

**[3]** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が次をみたすとする: $\mathbb{R}$ 内の任意の開集合の $f$ による逆像が開集合である. このとき, $f$ が連続であることを, 定義に従って示せ. (20 点)

**[4]** 区間 $[0,2)$ がコンパクトであるかどうかを予想し, それを定義に従って示せ. (20 点)

**[5]** 連続写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に関する以下の主張が正しいか正しくないかを答えよ. また, 正しくない場合には反例を挙げよ. (各 10 点, 証明不要)

(1) 開集合の像は開集合である.

(2) 閉集合の像は閉集合である.

(3) 有界な集合の像は有界である.

(4) コンパクト集合の逆像はコンパクトである.

**[6]** 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.

# 10　数学通論 I (2015/06/18): $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合

## 10.1　触点と閉包

**定義 10.1.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

(1) $x\ (\in \mathbb{R}^n)$ が $A$ の <u>触点</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0,\ U(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(2) $\overline{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ は $A$ の触点 $\}$ を $A$ の <u>閉包</u> と呼ぶ.

**例 10.2.** $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ について, 以下が成り立つ:

(1) $(0,0) \in \overline{A}$.

(2) $(0,-1) \notin \overline{A}$.

**命題 10.3.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) $O\ (\subset \mathbb{R}^n)$ が開集合, $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $O \cap A \neq \emptyset$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

**例 10.4.** 閉包について, 次が成り立つ:

(1) $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n,\ \ \overline{\emptyset} = \emptyset$.

(2) $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) \leq \varepsilon\}$ とすると, $\overline{U(a;\varepsilon)} = \overline{A} = A$.

## 10.2　閉集合の定義と性質

**定義 10.5.** $A\ (\subset \mathbb{R}^n)$ が <u>閉集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\overline{A} = A$.

**命題 10.6.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 次が成り立つ: $\mathbb{R}^n - \overline{A} = (\mathbb{R}^n - A)^\circ$.

**定理 10.7.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, $A$ が閉集合であるための必要十分条件は, $\mathbb{R}^n - A$ が開集合となること.

**定理 10.8.** $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset, \mathbb{R}^n$ は閉集合.

(2) $F_i\ (i = 1, \ldots, m)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ も閉集合.

(3) $F_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

## 10.3　演習問題

**問題 10.9.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 以下を示せ:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (命題 10.3 (2) を用いて良い).

**問題 10.10.** $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 以下を示せ:

(1) $\mathbb{R}^n - \overline{A} = (\mathbb{R}^n - A)^\circ$.

(2) $\overline{\mathbb{R}^n - A} = \mathbb{R}^n - A^\circ$.

**問題 10.11.** $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合に対して, 定理 8.8, 10.7 を用いて, 以下を示せ:

(1) $F_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ も閉集合.

(2) $F_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

# 数学通論 I (2015/06/18): 小テスト問題 (7)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

**問題 10.12.** $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 次を示せ: $\overline{A} \subset \overline{B}$.

学生番号 ____________________ 氏名 ____________________

# 11　数学通論 I (2015/06/25): $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合

## 11.1　コンパクト集合の定義

**定義 11.1.** $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \subset \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合族とする. $\mathfrak{U}$ が $A$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ の 開被覆 (**open cover**) であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, $U_\lambda$ は開集合,

(ii) $A \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

**定義 11.2.** $A$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ が コンパクト であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ : $A$ の開被覆, $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Lambda$ : $A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$.

## 11.2　コンパクト集合の性質

**定義 11.3.** $A$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ が 有界 であるとは, 次が成り立つこと: $\exists a \in \mathbb{R}^n$, $\exists R > 0$ : $A \subset U(a; R)$.

ちなみに $A$ が有界であることは次と同値: $\exists R > 0$ : $A \subset U(0; R)$.

**命題 11.4.** $A$ を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合とする. このとき $A$ は有界閉集合である.

**命題 11.5.** 次の集合はコンパクト: $D := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \ (\forall i)\}$.

**命題 11.6.** コンパクト集合内の閉集合はコンパクト. すなわち, $K$ を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合, $F$ を $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合とし, $F \subset K$ が成り立つとすると, $F$ はコンパクト集合である.

**定理 11.7.** $K$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ がコンパクトであるための必要十分条件は, $K$ が有界閉集合となること.

## 11.3　演習問題

**問題 11.8.** $A$ を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合とする. このとき $A$ は有界であることを示せ.

**問題 11.9.** $K$ を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合, $F$ を $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合とし, $F \subset K$ が成り立つとする. このとき, $F$ はコンパクト集合であることを示せ.

**問題 11.10.** $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 2\}$ がコンパクトでないことを定義に従って示せ.

# 数学通論 I (2015/06/25): 小テスト問題 (8)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

**定義 11.11.** $A$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ が 有界 であるとは, 次が成り立つこと: $\exists a \in \mathbb{R}^n, \exists R > 0 : A \subset U(a; R)$.

**問題 11.12.** $A$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ が有界であるとする. このとき, 次を示せ: $\exists R > 0 : A \subset U(0; R)$. ただしここで, $U(0; R)$ の中の $0$ は $\mathbb{R}^n$ の零ベクトルを表しているものとする.

学生番号 ______________________ 氏名 ______________________________

# 12　数学通論 I (2015/07/02): $\mathbb{R}^n$ 上の連続写像

## 12.1　連続写像の定義

**定義 12.1.** $a \in \mathbb{R}^n$ とする. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が 点 $a$ で連続 とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ : $f(U(a;\delta)) \subset U(f(a);\varepsilon)$.

**定義 12.2.** 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が 連続 とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $f$ は $a$ で連続.

**例 12.3.** 次の写像は連続: $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$.

## 12.2　連続写像の性質

**定理 12.4.** 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O$ : $\mathbb{R}^m$ 内の開集合, $f^{-1}(O)$ : $\mathbb{R}^n$ 内の開集合.

**系 12.5.** 連続写像と連続写像の合成は連続. すなわち, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ を連続写像とすると, $g \circ f$ も連続.

**系 12.6.** 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall F$ : $\mathbb{R}^m$ 内の閉集合, $f^{-1}(F)$ : $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合.

**命題 12.7.** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を連続写像とし, $K$ を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合とする. このとき $f(K)$ は $\mathbb{R}^m$ 内のコンパクト集合である.

**命題 12.8.** 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対し, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ と表す. このとき, $f$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続.

## 12.3　演習問題

**問題 12.9.** 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が次をみたすとする: $\forall O$ : $\mathbb{R}^m$ 内の開集合, $f^{-1}(O)$ : $\mathbb{R}^n$ 内の開集合. このとき $f$ が連続であることを示せ.

**問題 12.10.** 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について, 以下が同値であることを, 定理 12.4 を用いて示せ:

(1) 写像 $f$ は連続.

(2) $\forall F$ : $\mathbb{R}^m$ 内の閉集合, $f^{-1}(F)$ : $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合.

# 数学通論 I (2015/07/02): 小テスト問題 (9)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

**問題 12.11.** 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が連続であるとする. このとき次を示せ: $\forall O$ : $\mathbb{R}^m$ 内の開集合, $f^{-1}(O)$ : $\mathbb{R}^n$ 内の開集合.

学生番号 ______________________ 氏名 ______________________________

# 13　数学通論 I (2015/07/02): 距離空間の定義

## 13.1　距離空間の定義

**定義 13.1.** $X$ を集合とする. 関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が 距離 または 距離関数 であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) \geq 0$ かつ "$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$".

(ii) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) $\forall x, y, z \in X,\ d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

条件 (iii) の不等式を 三角不等式, 集合 $X$ と距離 $d$ の組 $(X, d)$ を 距離空間 と呼ぶ.

**例 13.2.** 以下は $\mathbb{R}^n$ 上の距離である:

(1) 標準的な距離 $d_{\mathrm{st}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

(2) $d_{\max} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, \ldots, n\}$.

**命題 13.3.** 任意の集合 $X$ に対して, 次で定義される $d_\infty$ は距離である (これを 離散距離 と呼ぶ):

$$d_\infty : X \times X \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & (\text{if } x = y), \\ 1 & (\text{if } x \neq y). \end{cases}$$

**命題 13.4.** $(X, d)$ を距離空間, $A \subset X$ とする. このとき $d_A := d|_{A \times A}$ は $A$ 上の距離である (これを 部分距離 と呼ぶ).

## 13.2　演習問題

**問題 13.5.** 離散距離が三角不等式をみたすことを示せ.

**問題 13.6.** 次が $\mathbb{R}^n$ 上の距離であることを示せ (これを マンハッタン距離 と呼ぶ):

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

**問題 13.7.** 次が $\{0,1\}^n$ 上の距離であることを示せ (これを ハミング距離 と呼ぶ):

$$d(x,y) := \#\{i \mid x_i \neq y_i\}.$$

# 14 数学通論 I (2015/07/16): 距離空間内の開集合

## 14.1 距離空間における $\varepsilon$-近傍

**定義 14.1.** $a \in X$, $\varepsilon > 0$ とする. このとき, 次を距離空間 $(X, d)$ の $a$ における $\varepsilon$-近傍 と呼ぶ:

$$U(a; \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}.$$

**例 14.2.** $\mathbb{R}^2$ 内の $\varepsilon$-近傍に対して, 以下が成り立つ:

(1) $d_{\mathrm{st}}$ に関する $\varepsilon$-近傍は, 円の内部の形をしている.
(2) $d_{\max}$ に関する $\varepsilon$-近傍は, 正方形の内部の形をしている.
(3) $d_\infty$ に関する $\varepsilon$-近傍は, 一点集合または全体集合のいずれか.

上記の $\varepsilon$-近傍は $(X, d)$ 内のものであることを強調して $U_X(a; \varepsilon)$ と書くこともある. 例えば $A \subset X$ に部分距離を入れた場合には, $U_A(a; \varepsilon)$ と $U_X(a; \varepsilon)$ は区別しておく必要がある.

**命題 14.3.** $(X, d)$ を距離空間, $A \subset X$ とし, $d_A$ を部分距離とする. このとき, 次が成り立つ: $\forall a \in A$, $\forall \varepsilon > 0$, $U_A(a; \varepsilon) = U_X(a; \varepsilon) \cap A$.

## 14.2 距離空間における内点と内部

以下では特に断らない限り $(X, d)$ を距離空間とする.

**定義 14.4.** $A \subset X$ とする.

(1) $x$ $(\in \mathbb{R}^n)$ が $A$ の 内点 であるとは, 次が成り立つこと: $\exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \subset A$.
(2) $A^\circ := \{x \in X \mid x$ は $A$ の内点 $\}$ を $A$ の 内部 と呼ぶ.

**例 14.5.** $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. $A$ の $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}})$ に関する内部を $(A^\circ)_{\mathrm{st}}$ とし, $(\mathbb{R}^2, d_{\max})$ に関する内部を $(A^\circ)_{\max}$ で表す. このとき次が成り立つ: $(A^\circ)_{\mathrm{st}} = (A^\circ)_{\max}$.

**命題 14.6.** $A \subset X$ とする. $(X, d)$ に関する内部について以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.
(2) $U(x; \varepsilon) \subset A$ ならば $U(x; \varepsilon) \subset A^\circ$.
(3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

**例 14.7.** $(X, d)$ に関する内部について, 以下が成り立つ:

(1) $X^\circ = X$, $\emptyset^\circ = \emptyset$.
(2) $U(a; \varepsilon)^\circ = U(a; \varepsilon)$.

**例 14.8.** 離散距離空間 $(X, d_\infty)$ に関する内部について, 以下が成り立つ: $\forall A \subset X$, $A^\circ = A$.

### 14.3 距離空間における開集合

以下でも特に断らない限り $(X, d)$ を距離空間とする.

**定義 14.9.** $A\ (\subset X)$ が <u>開集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \subset A$.

**命題 14.10.** $A\ (\subset X)$ が開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $A = A^\circ$.

**定理 14.11.** $(X, d)$ の開集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $X$ は開集合.

(2) $O_i\ (i = 1, \ldots, n)$ が開集合ならば, $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ も開集合.

(3) $O_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ も開集合.

**命題 14.12.** $A \subset X$ とし, $d_A$ を $A$ 上の部分距離とする. このとき, $U$ が $(A, d_A)$ の開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\exists O : (X, d)$ の開集合 s.t. $U = O \cap A$.

### 14.4 演習問題

**問題 14.13.** 命題 14.6 を示せ.

**問題 14.14.** 命題 14.10 を示せ.

**問題 14.15.** 命題 14.12 の条件が必要条件であることを示せ.

**問題 14.16.** $(X, d)$ を距離空間とし, $a \in X$, $\varepsilon > 0$ とする. このとき, $\varepsilon$-近傍 $U(a; \varepsilon)$ が開集合であることを, 開集合の定義に従って示せ.

## 15 数学通論 I (2015/07/16): 距離空間内の閉集合

以下 $(X, d)$ を距離空間とする.

### 15.1 距離空間における触点と閉包

**定義 15.1.** $A \subset X$ とする.

(1) $x\ (\in X)$ が $A$ の <u>触点</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, U(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(2) $\overline{A} := \{x \in X \mid x$ は $A$ の触点 $\}$ を $A$ の <u>閉包</u> と呼ぶ.

**命題 15.2.** $A \subset X$ とする. 次が成り立つ:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) $O\ (\subset X)$ が開集合, $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $O \cap A \neq \emptyset$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

**例 15.3.** 閉包について, 次が成り立つ:

(1) $\overline{X} = X$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(2) $A \subset X$ とする. 離散距離空間 $(X, d_\infty)$ に関して, $\overline{A} = A$.

## 15.2 距離空間における閉集合

**定義 15.4.** $A$ が $(X, d)$ 内の <u>閉集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\overline{A} \subset A$.

**命題 15.5.** 次が成り立つ: $X - \overline{A} = (X - A)^\circ$.

**定理 15.6.** $A$ が閉集合であるための必要十分条件は, $X - A$ が開集合となること.

**定理 15.7.** $(X, d)$ 内の閉集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $X$ は閉集合.

(2) $F_i\ (i = 1, \ldots, n)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ も閉集合.

(3) $F_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

## 15.3 演習問題

**問題 15.8.** 命題 15.2 を示せ.

**問題 15.9.** 命題 15.5 を示せ.

**問題 15.10.** 定理 15.6 を示せ.

## 15.4 期末試験事前レポート問題

**問題 15.11** (事前レポート問題, 2015/07/23 締切, 提出任意)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する期末試験問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け. ただし, レポートの一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと. 表紙を付けてはならない.

(1) 開集合. (2) 閉集合. (3) コンパクト集合. (4) 連続写像.

# 数学通論 I (2015/07/16): 小テスト問題 (10)

証明を書く場合には, まず初めに「示すこと」を論理記号で書くこと. また, 講義時に黒板で行った証明を, できるだけ真似して書くことが望ましい.

**問題 15.12.** $A := [0,2)$ とし, $d_A$ を $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ から決まる部分距離とする.

(1) $[0,1)$ が $(A, d_A)$ 内の開集合であることを, 定義に従って示せ.

(2) $[0,1)$ が $(A, d_A)$ 内の開集合であることを, 命題 14.12 を用いて示せ.

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

## 16 数学通論 I (2015/07/23): 距離空間内のコンパクト集合

以下 $(X, d)$ を距離空間とし, $A \subset X$ とする.

### 16.1 定義と例

**定義 16.1.** $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $X$ の部分集合族とする. $\mathfrak{U}$ が $A$ の <u>開被覆</u> (<u>**open cover**</u>) であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, $U_\lambda$ は開集合,

(ii) $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

**定義 16.2.** $A$ が $(X, d)$ 内の <u>コンパクト部分集合</u> であるとは, 次が成り立つこと:
$\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ : $A$ の開被覆, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ : $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$.

例 **16.3.** $A := [0, 1]$ に対して以下が成り立つ:

(1) $A$ は $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内のコンパクト部分集合.

(2) $A$ は $(\mathbb{R}, d_\infty)$ 内のコンパクト部分集合ではない.

**定義 16.4.** $(X, d)$ が <u>コンパクト距離空間</u> であるとは, 次が成り立つこと: $X$ が $(X, d)$ 内のコンパクト部分集合である.

### 16.2 性質

**定義 16.5.** $(X, d)$ が <u>コンパクト</u> であるとは, $X$ が $(X, d)$ 内のコンパクト部分集合となること.

**命題 16.6.** $A$ が $(X, d)$ 内のコンパクト部分集合であることと, 次は同値: 部分距離を入れた距離空間 $(A, d_A)$ がコンパクト距離空間である.

**定義 16.7.** $A$ が <u>有界</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists a \in A$, $\exists R > 0$ : $A \subset U(a; R)$.

**命題 16.8.** $A$ を $(X, d)$ 内のコンパクト部分集合とする. このとき $A$ は有界閉集合である.

**命題 16.9.** コンパクト集合内の閉集合はコンパクト.

### 16.3 演習問題

**問題 16.10.** $A$ が有限集合ならば, コンパクト部分集合であることを示せ.

**問題 16.11.** $(\mathbb{R}, d_\infty)$ に関して, $\mathbb{R}$ が有界であることと, コンパクトでないことを示せ.

**問題 16.12.** 命題 16.8, 16.9 を示せ.

## 17 数学通論 I (2015/07/23): 距離空間上の連続写像

以下 $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ を距離空間とする.

### 17.1 定義と例

**定義 17.1.** $a \in X$ とする. 写像 $f : X \to Y$ が <u>点 $a$ で連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : f(U_X(a; \delta)) \subset U_Y(f(a); \varepsilon)$.

**定義 17.2.** 写像 $f : X \to Y$ が <u>連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in X$, $f$ は $a$ で連続.

**例 17.3.** 次は連続写像:

(1) 定値写像, すなわち $y_0 \in Y$ に対して次で決まる写像: $f : X \to Y : x \mapsto y_0$.
(2) $X$ に離散距離 $d_\infty$ を入れたとき, 任意の写像 $f : X \to Y$.

### 17.2 性質

**定理 17.4.** 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O : (Y, d_Y)$ の開集合, $f^{-1}(O) : (X, d_X)$ の開集合.

**命題 17.5.** 連続写像と連続写像の合成は連続.

**命題 17.6.** 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall F : (Y, d_Y)$ の閉集合, $f^{-1}(F) : (X, d_X)$ の閉集合.

**命題 17.7.** $f : X \to Y$ を連続写像とし, $K$ を $(X, d_X)$ のコンパクト部分集合とする. このとき $f(K)$ は $(Y, d_Y)$ のコンパクト部分集合である.

**命題 17.8.** 連続写像の制限は連続. すなわち, $f : X \to Y$ を連続写像とし, $A$ を $X$ の部分集合とすると, 制限写像 $f|_A : A \to Y$ は部分距離 $d_A$ に関して連続.

## 17.3 同相写像

**定義 17.9.** 写像 $f : X \to Y$ が <u>同相写像</u> とは以下が成り立つこと:

(i) $f$ : 全単射.

(ii) $f$ : 連続.

(iii) $f^{-1}$ : 連続.

**例 17.10.** 恒等写像を id で表す. このとき以下が成り立つ:

(1) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}^2, d_{\max})$ は同相写像.

(2) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}, d_{\infty})$ は同相写像でない.

## 17.4 演習問題

**問題 17.11.** 定理 17.4, 命題 17.5, 17.6, 17.7 を示せ.

**問題 17.12.** $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}, d_{\infty})$ が連続でないことを示せ.