非コンパクト型対称空間への余等質性 1 作用 — an overview

田丸 博士

広島大学理学研究科

合宿セミナー 2016 in 山口 (山口紅花舎)
2016/11/25.

Intro (1/6)

本講演の内容

- 非コンパクト型既約対称空間への余等質性 1 作用:
- 何が分かっていて, 何が分かっていないか, 大枠を紹介.

Def.

- (M,g) : 完備連結リーマン多様体.
- $\mathrm{Isom}(M,g) \supset H$: 連結閉部分群.

このとき, $H \curvearrowright M$: 余等質性 1 (**cohomogeneity one**, **C1**)

$:\Leftrightarrow$ $\mathrm{codim}\,[$最大次元の軌道$] = 1$.

Intro (2/6)

Def. (基本的な用語)

$H \curvearrowright M$ に対し,

- 軌道が **非特異** (**regular**) :$\Leftrightarrow$ 軌道のなかで次元が最大.
- そうでない軌道を **特異** (**singular**).
- $H \backslash M := \{H.p \mid p \in M\}$ を **軌道空間**.
  (with 自然な射影 $M \to H\backslash M$ に関する商位相)

Ex.

以下は C1-作用:

- $\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^2$ (平行移動): $\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}$.
- $\mathrm{SO}_2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$ (回転): $\mathrm{SO}_2\backslash\mathbb{R}^2 \cong [0, +\infty)$.

Intro (3/6)

Def. (分類の基準)

$H, H' \curvearrowright M$ が **軌道同値**

$:\Leftrightarrow\ \exists f \in \mathrm{Isom}(M,g) : \forall p \in M,\ f(H.p) = H'.f(p)$.

Note

$H, H' \subset \mathrm{Isom}(M,g)$ に対して,

- 共役 $\Rightarrow$ 軌道同値. 共役 $\not\Leftarrow$ 軌道同値.

Ex.

- $\mathrm{SO}_{2n}, \mathrm{U}_n \curvearrowright \mathbb{C}^n$ は C1-作用, 軌道同値, $\mathrm{SO}_{2n} \ncong \mathrm{U}_n$ $(n > 1)$.

Intro (4/6)

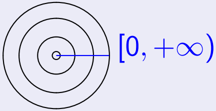
Ex.

- $SL_2(\mathbb{R}) = SO_2AN$: 岩沢分解

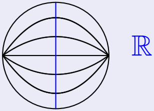
$$\left(A := \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \;\middle|\; a > 0 \right\},\; N := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}\right)$$

$\Rightarrow$ SO_2, A, $N \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$: C1-作用.

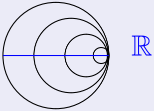
Picture



type (K)



type (A)



type (N)

Intro (5/6)

Prop. (スライス定理: C1 作用の判定条件)

$H \curvearrowright M$, $p \in M$, $\mathrm{codim}(H.p) \geq 2$ とすると, 以下は同値:

- $H \curvearrowright M$: C1
- スライス表現 $H_p \curvearrowright T_p^{\perp}(H.p)$: C1
- スライス表現 $H_p \curvearrowright T_p^{\perp}(H.p)$: 単位球に推移的

Rem. (知ってる人向け)

- polar 作用は, スライス表現だけでは特徴付けできない.

Intro (6/6)

Prop. (基本的な性質)

- C1-作用は一つの軌道で決まる (up to 軌道同値).

Proof (アイデア)

- $H \curvearrowright M$: C1-作用, $M_0 := H.p$ とする.
- $M_r := \{\mathrm{Exp}_p(v) \in M \mid v \in T_p^{\perp} M_0,\ |v| = r\}$.
- すると, 各 M_r の連結成分が H-軌道になる.

Rem.

- 当然ながら, 一般に群作用は一つの軌道では決まらない.

軌道空間による類別 (1/4)

- $M = G/K$: 非コンパクト型既約対称空間.
  (実はこの節の内容は M : Hadamard 多様体で OK.)

Thm. (Berndt-Brück 2001)

$H \curvearrowright M$: C1

$\Rightarrow$ $H \backslash M$ は, $\mathbb{R}$ or $[0, \infty)$ に homeo.

軌道空間による類別 (2/4)

Recall (Berndt-Brück 2001)

$H \curvearrowright M$: C1

$\Rightarrow$ $H\backslash M$ は, $\mathbb{R}$ or $[0,\infty)$ に homeo.

Fact (Mostert 1957, Bérard-Bergery 1982)

一般のリーマン多様体 M に対して, $H \curvearrowright M$: C1-作用

$\Rightarrow$ (1) $H\backslash M \cong \mathbb{R}$; $\nexists$ 特異軌道,

(2) $H\backslash M \cong S^1$; $\nexists$ 特異軌道,

(3) $H\backslash M \cong [0,\infty)$; $\exists 1$ 特異軌道, or

(4) $H\backslash M \cong [0,1]$; $\exists 2$ 特異軌道.

軌道空間による類別 (3/4)

Thm. (Berndt-Brück 2001) - 続き

$H \backslash M \cong \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ ∘ 全ての軌道は非特異 (実は principal),

∘ 全ての軌道は $\mathbb{R}^{n-1}$ に diffeo.

∘ $H \supset \exists S'$: 可解 s.t. 全ての軌道に単純推移的.

$H \backslash M \cong [0, +\infty)$

$\Rightarrow$ ∘ $\exists 1$ 特異軌道.

∘ 特異軌道は $\mathbb{R}^{n-k}$ に diffeo.

∘ 非特異軌道は $\mathbb{R}^{n-k} \times S^{k-1}$ に diffeo.

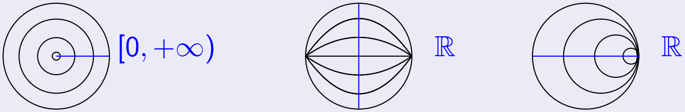
軌道空間による類別 (4/4)

Recall

- $H\backslash M \cong \mathbb{R} \Longrightarrow \forall$ 軌道は非特異 $(\cong \mathbb{R}^{n-1})$.
- $H\backslash M \cong [0,+\infty) \Longrightarrow \exists 1$ 特異軌道 $(\cong \mathbb{R}^{n-k})$.

Ex.

SO_2, A, $N \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の場合, 確かにそうなっている.



type (K) type (A) type (N)

軌道空間が $\mathbb{R}$ の場合 (1/6)

- $M = G/K$: 非コンパクト型既約対称空間.
- この節の内容には, 既約性まで必要.

Recall

- $H \backslash M \cong \mathbb{R} \Longrightarrow \forall$ 軌道は非特異 ($\cong \mathbb{R}^{n-1}$).

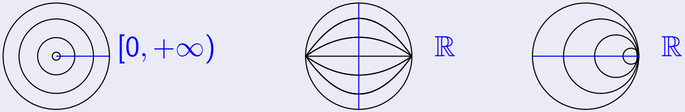
Thm. (Berndt-Tamaru 2003) - ざっくり版

$H \curvearrowright M$: C1, $H \backslash M \cong \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (A) $\exists 1$ 極小軌道, or

(N) 全ての軌道が合同.

軌道空間が $\mathbb{R}$ の場合 (2/6)



type (K) type (A) type (N)

Thm. (recall)

$H \curvearrowright M$: C1, 軌道空間 $\cong \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ (A) or (N)

Proof (方針)

分類したら，そうなっていた．(分類できたのは既約な場合だけ.)

軌道空間が $\mathbb{R}$ の場合 (3/6)

Fact

$M = G/K$: 非コンパクト型既約対称空間

$\Rightarrow$ ◦ $G = KAN$: 岩沢分解, $S := AN$: 可解部分.

◦ $S \curvearrowright M$: 単純推移的.

◦ よって, $S \supset S'$: 余次元 1 $\Rightarrow S' \curvearrowright M$: C1.

Thm. (Berndt-Tamaru 2003) - 構成

- [S から N-方向を抜いて作る]

  $0 \neq E \in \mathfrak{g}_\alpha$ (α : 単純), $\mathfrak{s}_E := \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{n} \ominus \mathbb{R}E)$

  $\Rightarrow S_E \curvearrowright M$: C1, type (A).

- [S から A-方向を抜いて作る]

  $0 \neq E \in \mathfrak{a}$, $\mathfrak{s}_E := (\mathfrak{a} \ominus \mathbb{R}E) \oplus \mathfrak{n}$

  $\Rightarrow S_E \curvearrowright M$: C1, type (N).

軌道空間が $\mathbb{R}$ の場合 (4/6)

Thm. (Berndt-Tamaru 2003) - 分類

- $H \curvearrowright M$: C1, 軌道空間 $\cong \mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ 先の作用のいずれかに軌道同値.

Proof (あらすじ)

- 前述の通り, $H \supset \exists S'$: 可解 s.t. 全ての軌道に単純推移的.
- $\mathfrak{g}$ 内の極大可解 subalgebra の分類 (Mostow 1961) より, $\mathfrak{s}' \subset \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. (ただし $Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \supset \mathfrak{t}$: 極大可換)
- このような $\mathfrak{s}'$ で, 条件をみたすものを頑張って分類.
- 結果を眺めると, 先の作用のいずれかに軌道同値 (not 共役).

軌道空間が $\mathbb{R}$ の場合 (5/6)

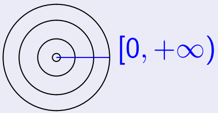
Thm. (Berndt-Brück 2001, Berndt-Tamaru 2003 のまとめ)

- $H \curvearrowright M$: C1

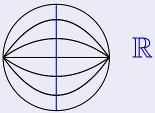
$\Rightarrow$ (K) $\exists 1$ 特異軌道, 軌道空間 $\cong [0,+\infty)$.

(A) $\nexists$ 特異軌道, $\exists 1$ 極小軌道, 軌道空間 $\cong \mathbb{R}$.

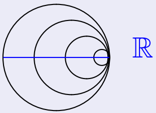
(N) $\nexists$ 特異軌道, 全ての軌道が合同, 軌道空間 $\cong \mathbb{R}$.



type (K)

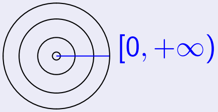


type (A)

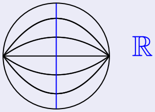


type (N)

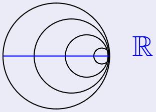
軌道空間が ℝ の場合 (6/6)



type (K)



type (A)



type (N)

Rem.

- (A)-type 作用 ($\mathfrak{n}$ から抜くもの):
  - 有限個しか存在しない (up to 軌道同値).
- (N)-type 作用 ($\mathfrak{a}$ から抜くもの):
  - $\mathrm{rank}(M) \geq 2$ なら連続的に存在,
  - いつ軌道が極小になるか, 比較的容易に決定可能.
- (K)-type 作用: 極小な非特異軌道は存在するか? (未解決)

軌道空間が $[0,+\infty)$ の場合 (1/6)

Recall (Berndt-Brück 2001)

- $H \curvearrowright M$: C1, 軌道空間 $\cong [0,+\infty)$

$\Rightarrow$ $\exists 1$ 特異軌道.

Thm. (Berndt-Tamaru 2013)

- $H \curvearrowright M$: C1, $\exists$ 特異軌道

$\Rightarrow$ 下記の 3 方法のいずれかで構成される. (up to 軌道同値)

Rem.

- 「いくつかの」非コンパクト型対称空間については, 上の定理を使って C1-作用の分類が可能.

軌道空間が $[0, +\infty)$ の場合 (2/6)

(K)-type action の構成法 (1/3) - "TG 法"

Thm. (Berndt-Tamaru 2004)

- M^* : コンパクト型既約対称空間, 単連結
- $H^* \curvearrowright M^*$: C1, with 全測地的軌道 $F^* = H^*.o$
- M, F : M^*, F^* の非コンパクト双対

$\Rightarrow$ $\exists H \curvearrowright M$: 余等質性 1 s.t. F は H-軌道.

Rem.

- 全測地的軌道をもつ場合には「双対性」が成り立つ.
- $H^* \curvearrowright M^*$: C1 は Kollross (2002) により分類済み.
- 最終的には case-by-case で, 完全なリストアップが可能.

軌道空間が $[0,+\infty)$ の場合 (3/6)

(K)-type action の構成法 (2/3) - “拡張法”

Thm. (Berndt-Tamaru 2013)

- $M \supset M'$: 然るべき全測地的部分多様体 ($\leftrightarrow$ 部分図式)
- $H' \curvearrowright M'$: C1

$\Rightarrow$ 拡張して $H \curvearrowright M$: C1 を作れる.

Rem.

- 最も簡単な例: $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$.
- 構成方法: $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}' \oplus$ [然るべき parabolic の可解部分].
- $\mathrm{rank}(M') < \mathrm{rank}(M)$. よって $\mathrm{rank}(M) = 1$ の時は無意味.
- 注意: M' は既約とは限らない...

軌道空間が $[0, +\infty)$ の場合 (4/6)

(K)-type action の構成法 (3/3) - “冪零法”

Thm. (Berndt-Tamaru 2007, 2013)

- $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{m}_\Phi \oplus \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$: parabolic の Langlands 分解
- $\mathfrak{n}_\Phi = \mathfrak{n}_\Phi^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_\Phi^k$: 自然な gradation
- $\mathfrak{n}_\Phi^1 \supset \mathfrak{v}$: “所定の 2 条件” をみたす subspace

$\Rightarrow$ $\exists H \curvearrowright M$: C1 s.t. $T_o^\perp(H.o) = \mathfrak{v}$.

Rem.

- これは (A)-type 作用の “高余次元版”
- 構成方法: $\mathfrak{h} := N_{\mathfrak{m}_\Phi \oplus \mathfrak{a}_\Phi}(\mathfrak{v}) \oplus (\mathfrak{n}_\Phi \ominus \mathfrak{v})$

軌道空間が $[0,+\infty)$ の場合 (5/6)

Recall

- $H \curvearrowright M$: C1, ∃ 特異軌道

$\Rightarrow$ 上記の 3 方法のいずれかで構成される. (up to 軌道同値)

Proof (アイデア)

- $H \curvearrowright M = G/K$: C1, $H.o$: 特異軌道とする.
- $H \subset L \subsetneq G$ となる極大な L をとる.
- Mostow (1961) より, L は reductive または parabolic.
- L : reductive なら, "TG 法".
- L : parabolic なら, "拡張法" or "冪零法".

  (Langlands 分解 $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}_\Phi \oplus \mathfrak{a}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ が本質的)

軌道空間が $[0,+\infty)$ の場合 (6/6)

C1 作用の分類が既知のもの:

- $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ (É. Cartan)
- $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$, $\mathbb{H}\mathrm{H}^2$, $\mathbb{O}\mathrm{H}^2$ (Berndt-Tamaru 2007)
- $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_3$, $G_2^*(\mathbb{R}^5)$, G_2^2/SO_4 (Berndt-Tamaru 2013)
- $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})/\mathrm{SU}_3$, $G_2^*(\mathbb{R}^n)$, $G_2^{\mathbb{C}}/G_2$ (Berndt-DomínguezVázquez 2015)

Rem.

- $\mathbb{H}\mathrm{H}^n$ $(n>2)$ の場合も分類は未完成.
  - 理由: $\mathrm{Sp}_n\mathrm{Sp}_1 \curvearrowright G_k(\mathbb{R}^{4n})$ が難しい...
  - 補足: $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の場合, $\mathrm{U}_n \curvearrowright G_k(\mathbb{R}^{2n})$ なので, 処理できた.
- $\mathrm{rank}(M) \geq 3$ の場合は, 現時点では難しい.

Outro (1/5)

- 今後の展望: 掃討・拡張・応用

掃討 (以下の問題を片付ける)

- $\mathbb{H}\mathrm{H}^n$ への C1 作用の分類
- (K)-type 作用の非特異軌道は極小に成り得るか？
- 残された階数 2 既約対称空間への C1 作用の分類？
- 対称空間が既約でない場合？

Rem.

- 掃討戦, 囲碁で言うと「ヨセ」くらいな感じか...
- 他からの要請がなければ, 研究の優先順位は低いかも

Outro (2/5)

拡張

- 作用する群が連結とは限らない場合 ($\rightarrow$ Gondo)
- 非コンパクト型既約対称空間への (hyper)polar 作用の研究
  ($\rightarrow$ Berndt-DíazRamos, Berndt-DíazRamos-T., Kubo, ...)
- C2 (余等質性 2) 作用
- 擬リーマン対称空間への C1 作用
  ($\rightarrow$ Berndt-DíazRamos-Vanaei, ...)

Outro (3/5)

応用

- 左不変計量の成す空間 ($\cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}_n$)
- 他の左不変幾何構造の成す空間
  (殆どの場合, 対称空間になる. 擬リーマンも含む.)
- 等質部分多様体の研究
  (Lagrangian (Hashinaga-Kajigaya), Einstein 可解多様体, ...)

Outro (4/5)

Ref. (original articles)

- Bérard-Bergery, L: *Inst. Élie Cartan* (1982)
- Berndt, J., Brück, M.: *J. Reine Angew. Math.* (2001)
- Berndt, J., Díaz-Ramos, J.C., Vanaei, J.M.: *Monatsh. Math.*, to appear
- Berndt, J., Díaz-Ramos, J.C., Tamaru, H.: *J. Differential Geom.* (2010)
- Berndt, J., Domínguez-Vázquez, M.: *Transf. Groups* (2015)
- Berndt, J., Tamaru, H.: *J. Differential Geom.* (2003)
- Berndt, J., Tamaru, H.: *Tohoku Math. J.* (2004)
- Berndt, J., Tamaru, H.: *Trans. Amer. Math. Soc.* (2007)
- Berndt, J., Tamaru, H.: *J. Reine Angew. Math.* (2013)
- Hashinaga, T., Kajigaya, T.: *Ann. Global Anal. Geom.*, to appear
- Kollross, A.: *Trans. Amer. Math. Soc.* (2002)
- Kubo, A., Tamaru, H.: *Geom. Dedicata* (2013)
- Mostert, P.S.: *Ann. Math.* (1957)
- Mostow, G.D.: *Ann. Math.* (1961)

Outro (5/5)

Ref. (survey)

- Berndt, J., Console, S., Olmos, C.:
  Submanifolds and holonomy, second edition (2016)
- Tamaru, H.: *RIMS Kokyuroku* (2002) (日本語)
- Tamaru, H.: 部分多様体論・湯沢 2003 報告集 (日本語)
- Tamaru, H.: *Sophia Kokyuroku in Mathematics* (2003)
- Tamaru, H.: 部分多様体論・湯沢 2007 報告集 (日本語)
- Tamaru, H.: 部分多様体幾何とリー群作用 2010 記録集 (日本語)