論理記号と集合と写像の話[*1]

田丸 博士
（広島大学大学院理学研究科）

[*1] 2016/11/13 公開

まえがき

広島大学 GSC（グローバルサイエンスキャンパス）というイベントがあって，そのうちの 2016/11/13(日) に開催されるステップステージ第四回セミナー（数学分野）の講師を筆者がすることになりました．本稿は，そのための参考資料です．講義時には，この原稿の表紙とまえがきを除いた 5 頁分を参考資料として配布しました．

今回，筆者が担当したセミナーのコンセプトは，

「高校生を対象にして，数学科の新入生対象のゼミをやってみる」

と設定しました．内容は，大学の数学科で最初に学ぶ「論理記号・集合・写像」の最初の部分です．実際にこの原稿は，大学の数学科の 1 年生を対象とした授業（ゼミ）の資料を基にして作成しました．

事後の追記（メモ）

今回受講してくれた学生は 8 名で，うち 2 名は $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ の濃度が等しいことも事前に知っていました……。そういう意味でも，参加者は「普通の高校生」ではなかった気がしますが，とりあえずやってみた感触というか，今後のための覚書．

(1) 命題の書き方のところで，「$\forall x \in X$」という部分は「$\forall x\ (x \in X)$」を省略したものである，という説明があった方が良かったかも．（その方が単射の説明が簡単になる．命題の中に「$\Rightarrow$」があると面倒．）

(2) 全射・単射の例のところで，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ などへの関数っぽいものを挙げたのは，無駄に難易度を上げてしまったような気がする．（分かりやすい例のつもりだったが，ちっともそうではなかった気配．）正直，今回の内容なら，なくても支障はない．

(3) 他の関連する話題としては，今回の受講生なら，「有界」くらいなら，説明したらすぐに理解しそうな感じだった．高校二年生なら（数列を既に習っているなら），「数列の収束と発散」でもいけるかも．

第 1 章

論理記号と命題

ここでは，論理記号とそれを使って書かれた命題について，定義と簡単な例を紹介する．

1.1　集合

集合とは「いくつかの「もの」の集まり」を意味することとする（正確に話そうとすると煩雑になるので，大雑把な話に留める）．今日登場する集合は，主に以下のものである．

定義 1.1.1.

(1) $\mathbb{N} := \{x \mid x$ は自然数 $\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(2) $\mathbb{Z} := \{x \mid x$ は整数 $\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

(3) $\mathbb{Q} := \{x \mid x$ は有理数 $\}$.

(4) $\mathbb{R} := \{x \mid x$ は実数 $\}$.

集合を構成する個々の「もの」のことを元（または要素）とよぶ．また，x が集合 X の元であることを $x \in X$，元でないことを $x \notin X$ で表す．

1.2　論理記号

数学の全ての命題は，論理記号を使って書かれている．しかし一方で，論理記号そのものの定義は，以下のように単純なものである．

定義 1.2.1. 次の記号は, 以下の意味で使うものとする:

(1)「$\forall \ldots$」で「全ての $\ldots$ に対して」(for all $\ldots$）を表す.

(2)「$\exists \ldots$」で「$\ldots$ が存在する」(there exists $\ldots$）を表す.

(3)「s.t.」で「such that」を表す（略して「：」と書くこととする）.

問題 1.2.2. X をこのクラスの学生全員の集合とする．次の命題の意味を考え, 正しいか正しくないかを判定せよ.

(1) $\forall x \in X$, x は女性.
(2) $\exists x \in X : x$ は 4 月生まれ.

問題 1.2.3. $X := \{$ ぐー, ちょき, ぱー $\}$ とする．次の命題が正しいかどうか判定せよ.

(1) $\forall a \in X,\ \exists b \in X\ :\ b$ は a に勝つ.
(2) $\exists b \in X\ :\ \forall a \in X,\ b$ は a に勝つ.

このように，命題を並び替えると全く意味が異なる場合がある．従って，$\forall$ や $\exists$ が組み合わされた命題を読むとき, 気を付けることは, 「前から順番に読むこと」．

1.3　否定命題

定義 1.3.1. 命題 P の否定を $\neg P$ で表す.

否定（または否定命題）の定義には深入りしないが, 直感的に考えてほぼ間違い無いと思う．「x は女性」という命題の否定は「x は女性でない」（または「x は男性である」），「x は 4 月生まれ」の否定は「x は 4 月生まれでない」．

問題 1.3.2. X をこのクラスの学生全員の集合とする．次の命題の否定命題を作れ.

(1) $\forall x \in X$, x は女性.
(2) $\exists x \in X : x$ は 4 月生まれ.

一般に否定命題について以下が成り立つ．もっと複雑な命題についても，この事実を組み合わせて使えば，容易に否定命題を作ることができる．

命題 1.3.3. 命題 P に対し, 次が成り立つ.

- 「$\forall x \in M, P$」の否定命題は, 「$\exists x \in M : \neg P$」．
- 「$\exists x \in M : P$」の否定命題は, 「$\forall x \in M, \neg P$」．

1.4　簡単な命題

以下, いくつかの命題の真偽を判定する問題を挙げる．ここでは, 真偽を判定するとは, 真か偽かを予想しそれを証明する, という意味である．ある命題が偽であることを示すには, その否定命題が真であることを示す必要がある.

問題 1.4.1. $X := \{1, 2, 3\}$ とする．次の命題が正しいかどうか判定せよ．

(1) $\forall a, b \in X,\ a + b \in X.$

(2) $\exists a, b \in X :\ a + b \in X.$

(3) $\forall a \in X,\ \exists b \in X :\ a + b \in X.$

問題 1.4.2. $X := \{0, 1\}$ とする．次の命題が正しいかどうか判定せよ．

(1) $\forall a, b \in X,\ a + b \in X.$

(2) $\forall a \in X,\ \exists b \in X :\ a + b \in X.$

(3) $\forall a, b \in X :\ ab \in X.$

第 2 章

写像

ここでは写像を扱い，写像が全射・単射であるという概念を紹介する．これらを用いると，二つの集合の大きさ（濃度）を比べることができる．ゴールは，「自然数と偶数は同じくらいある」という（初めて聞くとちょっと吃驚する）命題を証明することである．

2.1　写像の定義

定義 2.1.1. 集合 X, Y に対して,

- X の全ての元に対して Y の元が唯一つ定まるとき, その対応を 写像 と呼ぶ,
- 記号 $f : X \to Y$ で, f が X から Y への写像であることを表す,
- 記号 $f : x \mapsto f(x)$ で, 写像 f によって $x \in X$ が $f(x) \in Y$ に移ることを表す.

例えば, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ は写像である．しかし $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ は写像ではない（$x = 0$ の行き先が決まらないから．定義域を $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ などにすれば写像になる）．$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \pm\sqrt{x}$ も写像ではない（行き先が一つに決まらないから）．

問題 2.1.2. $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ とする．A から B への写像は全部で何個あるか？

2.2　全射と単射

定義 2.2.1. 写像 $f : X \to Y$ に対して,

- f が 全射 とは, 次が成り立つこと: $\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$.
- f が 単射 とは, 次が成り立つこと: $\forall x_1, x_2 \in X, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.
- f が 全単射 とは, f が全射かつ単射であること.

問題 2.2.2. 集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ に対して,

(1) 写像 $f : X \to Y$ で, 全射であるものと全射でないものを作れ,
(2) 写像 $f : X \to Y$ で, 単射であるものと単射でないものを作れ.

例えば, $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ の場合には, X から Y への単射を作ることはできない. このようにして, 全射や単射の存在によって, 集合の "元の個数" を比較することができる. 有限集合の場合には当たり前すぎるが, 無限集合の "元の個数"（正確に言うと, 集合の濃度）を比較するときには, 非常に本質的な考え方である.

例 2.2.3. 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$ は全射だが単射ではない.

問題 2.2.4. 次の写像が全射および単射であるかを予想し, それらを定義に従って示せ:
(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 1$,
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, 0)$,
(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y$,
(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

2.3 集合の濃度

定義 2.3.1. 集合 X と Y は，次が成り立つときに 濃度が等しい といい，$X \sim Y$ で表す：$\exists f : X \to Y$: 全単射.

有限集合の場合には，濃度が等しいことと元の個数が等しいことは同じである．これを無限集合の場合に考えよう．

問題 2.3.2. $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合, $2\mathbb{N} := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を偶数である自然数全体の集合とする．$\mathbb{N}$ と $2\mathbb{N}$ の濃度が等しいことを示せ．

これは端的に言うと「自然数と偶数は同じだけある」ということになる．直観に反するかも知れないが，自然数と 100 の倍数も同じだけある，ということも同様に示される．

問題 2.3.3. 以下の真偽を考えよ：
(1) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.
(2) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$.
(3) $\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$.
(4) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} \sim \mathbb{R}$.