1　幾何学 A (2016/04/13): ガイダンス

復習: 距離空間・位相空間

位相空間に到達するためには, 以下のような手順を踏むことが多い:

(1) $\mathbb{R}$; (2) $\mathbb{R}^n$; (3) 距離空間; (4) 位相空間.

ここでは, どのように抽象化していったかを, 連続写像を例として復習する.

定義 1.1. 写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が <u>連続</u> とは, 以下が成り立つこと:

$$\forall a \in \mathbb{R}^m, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m \ (|x - a| < \delta), |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

この条件は, ε-近傍 $U(x; \varepsilon)$ を用いると, 次のように書き換えることができる.

命題 1.2. 写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が連続であるために必要十分条件は, 以下が成り立つこと:

$$\forall a \in \mathbb{R}^m, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(U(a; \delta)) \subset U(f(a); \varepsilon).$$

これを踏まえて, 距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) の間の連続写像は, 次のように定義される.

定義 1.3. 写像 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ が <u>連続</u> とは, 以下が成り立つこと:

$$\forall a \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(U_X(a; \delta)) \subset U_Y(f(a); \varepsilon).$$

この条件は, 開集合を用いると, 次のように書き換えることができる.

命題 1.4. 写像 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ が連続であるために必要十分条件は, 以下が成り立つこと:

$\forall O$ (Y 内の開集合), $f^{-1}(O)$ は X 内の開集合.

これを踏まえて, 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の間の連続写像は, 次のように定義される.

定義 1.5. 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が <u>連続</u> とは次が成り立つこと: $\forall O \in \mathcal{O}_Y$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$.

この講義でやりたいこと

この講義では多様体の基本的な事項を扱う. そのために, 以下のように順を追って解説をする.

(1) $\mathbb{R}$ 内の (空でない) 開集合;

(2) $\mathbb{R}^n$ 内の (空でない) 開集合;

(3) 座標近傍 := (2) と同相なもの;

(4) 多様体 := (3) を貼り合わせたもの.

多様体に登場するいくつかの基本的な概念を紹介する際には, $\mathbb{R}$ の話から始めて, 順を追って, できるだけ話が飛ばないように解説をしたい.

2　幾何学 A (2016/04/13): 多様体の定義 (1)

多様体の定義に向けて, 順を追って解説する.

$\mathbb{R}$ 内の開集合

定義 2.1. $\mathbb{R} \supset I$ が 開集合 とは次が成り立つこと: $\forall a \in I, \exists \varepsilon > 0 : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset I$.

例 2.2. 以下は $\mathbb{R}$ 内の開集合: (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^n$ 内の開集合

$\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離を d で表し, ε-近傍を $U(p; \varepsilon)$ で表す.

定義 2.3. $\mathbb{R}^n \supset O$ が 開集合 とは次が成り立つこと: $\forall p \in O, \exists \varepsilon > 0 : U(p; \varepsilon) \subset O$.

とくに $n = 1$ のとき, この条件は定義 2.1 の条件と一致することに注意.

例 2.4. 以下は $\mathbb{R}^2$ 内の開集合: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

例 2.5 (小テスト)**.** $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続のとき, $O := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) > 0\}$ は $\mathbb{R}^n$ 内の開集合.

$\mathbb{R}^n$ 内の開集合と同相なもの

定義 2.6. X, Y を位相空間とする. 写像 $f : X \to Y$ が 同相 とは, 以下が成り立つこと:
(i) f は全単射; (ii) f は連続; (iii) f^{-1} は連続.

定義 2.7. U を位相空間とし, $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ を考える. このとき (U, φ) が (m 次元) 座標近傍 とは, 以下が成り立つこと:
(i) $\mathbb{R}^m \supset \varphi(U)$ は開集合; (ii) $\varphi : U \to \varphi(U)$ は同相写像.

例 2.8. $\mathbb{R} \supset I$ を空でない開集合, $f : I \to \mathbb{R}$ を連続写像とする. このとき, 以下で定義される (U, φ) は 1 次元の座標近傍 ($y = f(x)$ のグラフ):

$$U := \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}, \quad \varphi : U \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x.$$

例 2.9 (小テスト)**.** 以下で定義される (U, φ) は 2 次元の座標近傍 (球面の北半球):

$$U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}, \quad \varphi : U \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y).$$

当然ながら U には自然な位相 ($\mathbb{R}^3$ からの相対位相) を入れている. ここで, φ や φ^{-1} が構成できれば, それが連続であることは認めて良い.

3　幾何学 A (2016/04/20): 多様体の定義 (2)

$\mathbb{R}^n$ 内の開集合と同相なもの (続き)

例 3.1 (先週のプリントに載せ忘れた自明な例)**.** $\mathbb{R}^m \supset O$ を空でない開集合, $\varphi : O \to \mathbb{R}^m$ を包含写像とする. このとき, (U, φ) は m 次元の座標近傍.

例 3.2 (グラフ)**.** $\mathbb{R}^m \supset O$ を空でない開集合, $f : O \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とする. このとき, 以下で定義される (U, φ) は m 次元の座標近傍 ($y = f(x)$ のグラフ):

$$U := \{(x, y) \in O \times \mathbb{R}^n \mid y = f(x)\}, \quad \varphi : U \to \mathbb{R}^m : (x, y) \mapsto x.$$

注意 3.3. 先の球面の北半球の例は, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ のグラフに他ならない.

注意 3.4. グラフで表すときの "座標の順番" はどうでも良い. 例えば $\mathbb{R}^3$ の場合, $z = f(x, y)$ のグラフでも $y = f(x, z)$ のグラフでも $x = f(y, z)$ のグラフでも, 全て座標近傍になる.

例 3.5 (立体射影 (グラフにならない例))**.** 以下で定義される (U, φ) は 1 次元の座標近傍:

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ y < 1\}, \quad \varphi : U \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{x}{1 - y}.$$

注意 3.6. 立体射影において, $(0, 1)$ と (x, y) を結ぶ直線と x 軸との交点が $(\varphi(x, y), 0)$.

問題 3.7 (演習: 座標近傍の開集合)**.** (U, φ) を m 次元の座標近傍とし, $U \supset U'$ を空でない開集合とする. 以下を示せ:

(1) 同相写像は開写像.
(2) $\varphi(U')$ は $\mathbb{R}^m$ 内の開集合.
(3) $(U', \varphi|_{U'})$ は m 次元座標近傍.

問題 3.8 (演習: 座標近傍の直積)**.** (U, φ) を m 次元座標近傍, (V, ψ) を n 次元座標近傍とする. また, $\varphi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^{m+n} : (x, y) \mapsto (\varphi(x), \psi(y))$ と定める. 以下を示せ:

(1) $(\varphi \times \psi)(U \times V) = \varphi(U) \times \psi(V)$.
(2) $\mathbb{R}^{m+n} \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ は同相.
(3) $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \supset \varphi(U) \times \psi(V)$ は開集合.
(4) $(U \times V, \varphi \times \psi)$ は $m + n$ 次元座標近傍.

4 幾何学 A (2016/04/20): 多様体の定義 (3)

多様体の定義 - 位相多様体

定義 4.1 (復習)**.** 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が <u>ハウスドルフ空間</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x, y \in X$ $(x \neq y)$, $\exists O_x, O_y \in \mathcal{O}$: $x \in O_x$, $y \in O_y$, $O_x \cap O_y = \emptyset$.

命題 4.2 (復習)**.** 以下が成り立つ:

(1) 距離から決まる位相はハウスドルフ.

(2) ハウスドルフ空間内の部分集合は, 相対位相に関してハウスドルフ.

(3) ハウスドルフ空間とハウスドルフ空間の直積は, 積位相に関してハウスドルフ.

従って, $\mathbb{R}^n$ は自然な位相に関してハウスドルフであり, その部分集合も相対位相に関してハウスドルフである. これらの事実はこの講義では認めて使っても良い.

定義 4.3. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. X の部分集合族 $\{U_\alpha\}$ が X の <u>開被覆</u> とは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall \alpha$, $U_\alpha \in \mathcal{O}$; (ii) $\displaystyle\bigcup_\alpha U_\alpha = X$.

定義 4.4. 位相空間 M が m 次元 <u>位相多様体</u> とは, 以下が成り立つこと:

(i) M はハウスドルフ空間;

(ii) $\exists \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$: $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆, 各 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ は m 次元座標近傍.

上の条件 (ii) を満たす $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を <u>局所座標系</u> と呼ぶ.

例 4.5. (U, φ) を m 次元座標近傍とする. このとき, U は m 次元位相多様体.

例 4.6. $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ は位相多様体ではない.

例 4.7 (n 次元球面)**.** $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$ は n 次元位相多様体.

例えば, 円周 S^1 の局所座標系を作るためには, S^1 を 4 つのグラフの和集合として表せば良い. すなわち, 以下で定義される $\{(U_x^\pm, \varphi_x^\pm), (U_y^\pm, \varphi_y^\pm)\}$ が局所座標系である:

$$\begin{aligned}
U_x^+ &:= \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}, \quad \varphi_x^+ : U_x^+ \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y, \\
U_x^- &:= \{(x, y) \in S^1 \mid x < 0\}, \quad \varphi_x^- : U_x^- \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y, \\
U_y^+ &:= \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}, \quad \varphi_y^+ : U_y^+ \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x, \\
U_y^- &:= \{(x, y) \in S^1 \mid y < 0\}, \quad \varphi_y^- : U_y^- \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x.
\end{aligned}$$

5 幾何学 A (2016/04/27): 多様体の定義 (4)

多様体の定義 - 可微分多様体

定義 5.1 (復習)**.** O を $\mathbb{R}^m$ 内の開集合, $f : O \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とする. このとき f が C^∞ 級 であるとは, 次が成り立つこと: f は各変数に関して何回でも偏微分可能.

定義 5.2. M を位相多様体, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を局所座標系とする.

(i) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき, 次の写像を $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ から (U_β, φ_β) への 座標変換 という:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta).$$

(ii) $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ が C^∞ 級局所座標系 とは, 次が成り立つこと: $\forall \alpha, \beta$ $(U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset)$, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ から (U_β, φ_β) への座標変換が C^∞ 級写像.

例 5.3. S^1 に対し, 先に定義した局所座標系 $\{(U_x^\pm, \varphi_x^\pm), (U_y^\pm, \varphi_y^\pm)\}$ を考える. このとき, (U_x^+, φ_x^+) から (U_y^+, φ_y^+) への座標変換は, 次で与えられるので, C^∞ 級写像である:

$$\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1} : (0,1) \to (0,1) : y \mapsto \sqrt{1-y^2}.$$

例 5.4 (小テスト問題)**.** 上と同じ設定において, (U_y^-, φ_y^-) から (U_x^+, φ_x^+) への座標変換を求めよ.

定義 5.5. M をハウスドルフ空間とする. このとき M が m 次元 C^∞ 級多様体 であるとは, m 次元 C^∞ 級局所座標系が存在すること. すなわち, $\exists\, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$:

(i) $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆;

(ii) $\forall \alpha$, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ は M の m 次元座標近傍;

(iii) $\forall \alpha, \beta$ $(U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset)$, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ から (U_β, φ_β) への座標変換は C^∞ 級写像.

例 5.6. (U, φ) を座標近傍とすると, U は C^∞ 級多様体. 従って, 特に $\mathbb{R}^m$ 内の (空でない) 開集合や, その上で定義されたグラフは C^∞ 級多様体.

例 5.7. 球面 S^n は, 以下で定義される局所座標系 $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}$ に関して n 次元 C^∞ 級多様体:

$$\begin{aligned}
&U_i^+ := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^{n+1} \mid x_i > 0\}, \\
&U_i^- := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^{n+1} \mid x_i < 0\}, \\
&\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

ここで $\widehat{x_i}$ は「x_i を抜く」ことを表す記号. 例えば $n = 2$, $i = 2$ のとき,

$$\varphi_2^+(x_1, x_2, x_3) = (x_1, \widehat{x_2}, x_3) = (x_1, x_3).$$

6　幾何学 A (2016/05/11): 多様体の定義 (5)

多様体の定義 - 可微分多様体の例

定義 6.1. S^n に対して, $p_\pm := (0,\dots,0,\pm 1) \in S^n$ とし, $U_\pm := S^n \setminus \{p_\pm\}$ とおく. このとき次の $\varphi_\pm$ を $p_\pm$ からの 立体射影 と呼ぶ:

$$\varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^n : (x_1,\dots,x_{n+1}) \mapsto (1/(1 \mp x_{n+1}))(x_1,\dots,x_n).$$

ここで $\varphi_\pm(x)$ は, $p_\pm$ と x を結ぶ直線と $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n,0) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ の交点を表す. ちなみに逆写像は次で与えられる (演習問題):

$$(\varphi_\pm)^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_\pm : y = (y_1,\dots,y_n) \mapsto (1/(|y|^2+1))(2y_1,\dots,2y_n,\pm(|y|^2-1)).$$

命題 6.2. S^n は $\{(U_\pm,\varphi_\pm)\}$ によって n 次元 C^∞ 級多様体である. すなわち, 以下が成り立つ:

(1) S^n はハウスドルフ;

(2) $\{U_\pm\}$ は S^n の開被覆;

(3) $(U_\pm,\varphi_\pm)$ は n 次元座標近傍;

(4) $\{(U_\pm,\varphi_\pm)\}$ の任意の座標変換は C^∞ 級.

定義 6.3. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \{\ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \ell$ は原点を通る直線 $\}$ を 実射影空間 と呼ぶ.

補題 6.4. $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ とおくと, 以下が成り立つ:

(1) 次で定義される $\sim$ は X 上の同値関係: $x \sim y :\Leftrightarrow \exists c \neq 0 : x = cy$.

(2) 次は well-defined かつ全単射: $f : X/\sim \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n : [x] \mapsto \mathbb{R}x$.

以下では $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ と $X/\sim$ を同一視し, $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ には自然な射影 $\pi : X \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ による商位相を入れる. また $\pi(x) = [x] = [x_1 : \cdots : x_{n+1}]$ と表し, これを同次座標と呼ぶ.

命題 6.5. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = X/\sim$ は以下によって n 次元 C^∞ 級多様体である:

(1) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ はハウスドルフ.

(2) $U_i := \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid x_i \neq 0\}$ とおくと, $\{U_1,\dots,U_{n+1}\}$ は $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の開被覆.

(3) 各 i に対して, (U_i,φ_i) は n 次元座標近傍. ただしここで

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n : [x_1 : \cdots : x_{n+1}] \mapsto (1/x_i)(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{n+1}).$$

(4) $\{(U_i,\varphi_i) \mid i = 1,\dots,n+1\}$ の任意の座標変換は C^∞ 級.

命題 6.6 (演習問題)**.** M を m 次元 C^∞ 級多様体, $M \supset U\ (\neq \emptyset)$ を開集合とする. このとき U も m 次元 C^∞ 級多様体.

命題 6.7 (演習問題)**.** M, N をそれぞれ m 次元, n 次元の C^∞ 級多様体とする. このとき $M \times N$ は $m+n$ 次元 C^∞ 級多様体.

7 幾何学 A (2016/05/18): C^∞ 級写像 (1)

前回の追加

問題 7.1 (小テスト問題)**.** $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ について, 前頁の記号を用いる.

(1) $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2$ が well-defined であることを示せ.

(2) (U_1, φ_1) から (U_2, φ_2) への座標変換を求めよ.

$\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級写像

ここでは, $\mathbb{R} \supset I \ (\neq \emptyset)$ を開集合とし, 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ について以下を解説する:

(1) C^∞ 級関数の定義; (2) C^∞ 級写像の定義; (3) C^∞ 級同相.

また次頁以降では, これらを一般化していって, 最終的には C^∞ 級多様体の上の C^∞ 級写像について, その定義や諸性質を紹介する.

定義 7.2. $f : I \to \mathbb{R}$ を連続とする. このとき f が $\underline{C^\infty \text{ 級}}$ とは, 無限回連続微分可能であること.

命題 7.3 (復習)**.** $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $g \circ f$ も C^∞ 級写像.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

上では簡単のために定義域を $\mathbb{R}$ 全体にしたが, 合成できる設定 ($f : I \to \mathbb{R}$, $g : I' \to \mathbb{R}$ であって $f(I) \subset I'$) ならば, 合成関数の微分は上と同じように表せる. これは多変数でも同様.

定義 7.4. $\mathbb{R} \supset I, I'$ を開集合とする. このとき $f : I \to I'$ が $\underline{C^\infty \text{ 級同相}}$ であるとは, 以下が成り立つこと: (i) f : 全単射; (ii) f : C^∞ 級; (iii) f^{-1} : C^∞ 級.

例 7.5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ は全単射かつ C^∞ 級だが, f^{-1} は C^∞ 級ではない. すなわち, C^∞ 級同相の条件 (i), (ii) だけから (iii) は従わない.

8 幾何学 A (2016/05/18): C^∞ 級写像 (2)

$\mathbb{R}^m$ 上の C^∞ 級写像

以下では $\mathbb{R}^m \supset O\ (\neq \emptyset)$ を開集合とする．$m = 1$ のときは, $\mathbb{R}$ 内の開集合の場合と一致する．

定義 8.1. $f : O \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とする．このとき f が <u>C^∞ 級</u> とは, 全ての変数に関して無限回連続偏微分可能であること．

$(x_1, \ldots, x_m)$ を $\mathbb{R}^m$ の座標とすると, (標準基底 $\{e_k\}$ を使って) 偏導関数は次で定義された:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f_i(p + \varepsilon e_j) - f_i(p)}{\varepsilon}.$$

定義 8.2. $\mathbb{R}^m \supset O, O'$ を開集合とする．このとき $f : O \to O'$ が <u>C^∞ 級同相</u> であるとは, 以下が成り立つこと: (i) f : 全単射; (ii) f : C^∞ 級; (iii) f^{-1} : C^∞ 級.

中間試験情報

中間試験を 2016/05/25(水) の講義時間に行う．事前レポートを提出する場合は, 数学事務室のレポート提出 BOX に, 2016/05/23(月) 12:00 までに提出すること．

問題 8.3 (事前レポート問題)**.** 以下の各キーワードに関連する中間試験問題をそれぞれ予想し, その問題と解答を書け．ただしレポートには表紙を付けず, 一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと．

(1) 位相. (2) 座標近傍. (3) 多様体. (4) 射影空間.

9　幾何学 A (2016/05/25): 中間試験問題

注意

- 証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

参考: 定義や用語など

- (U, φ) が m 次元座標近傍 $:\Leftrightarrow$ (i) $\mathbb{R}^m \supset \varphi(U)$ は開, (ii) $\varphi : U \to \varphi(U)$ は同相.
- $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ に対して, $x \sim y :\Leftrightarrow \exists c \neq 0 : y = cx$.
- 実射影空間は (講義の定義とは表記が異なるが) $\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$.
- 上の同値関係に関する同値類を $[\cdot]$ とし, $[x_1 : \cdots : x_{n+1}] := [(x_1, \ldots, x_{n+1})]$.
- (U, φ) から (V, ψ) への座標変換とは, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$.

問題

[1] O を $\mathbb{R}^2$ 内の空でない開集合, $f : O \to \mathbb{R}$ を連続写像とする. このとき次が 2 次元座標近傍となることを示せ: $U := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in O\}$. (20 点)

[2] S^2 を 2 次元単位球面とし, $U_1^+ := \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_1 > 0\}$ とおく.

(1) U_1^+ は S^2 内の開集合であることを示せ ($\mathbb{R}^3$ 内の開集合は既知として良い). (20 点)

(2) U_1^+ がどのような関数のグラフであるか答えよ (証明不要). (10 点)

(3) S^2 の開被覆の例を挙げよ (証明不要). (10 点)

[3] $\mathbb{RP}^2$ を 2 次元実射影空間とし, 以下の座標近傍を考える:

$$U_1 := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{RP}^2 \mid x_1 \neq 0\}, \quad \varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2 : [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto (1/x_1)(x_2, x_3),$$
$$U_2 := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{RP}^2 \mid x_2 \neq 0\}, \quad \varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2 : [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto (1/x_2)(x_1, x_3).$$

(1) φ_1 が well-defined であることを示せ. (20 点)

(2) 像 $\varphi_1(U_1)$ および逆写像 $\varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \to U_1$ が何であるか予想し, それを示せ. (20 点)

(3) (U_1, φ_1) から (U_2, φ_2) への座標変換を求めよ (定義域と値域も明記すること). (20 点)

[4] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.

10　幾何学 A (2016/06/01): C^∞ 級写像 (3)

座標近傍上の C^∞ 級写像

ここでは (U, φ) を座標近傍とし, その上の C^∞ 級写像について解説する. 目次は以下の通り:
(1) C^∞ 級写像の定義; (2) 関数の和・積・スカラー倍; (3) 合成の微分; (4) C^∞ 級同相.

C^∞ 級写像の定義

定義 10.1. (U, φ) を座標近傍とし, 関数 $\xi : U \to \mathbb{R}$ を考える.

(1) ξ が $\underline{p \in U \text{ で } C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\xi \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

(2) ξ が $\underline{C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in U$, $\xi \circ \varphi^{-1}$ は p で C^∞ 級.

ここで $\xi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ の C^∞ 性は, 通常の意味の ($\mathbb{R}^m$ 内の開集合の上で定義された関数としての) C^∞ 性である. また, 容易に分かるように, $\xi : U \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級であるための必要十分条件は, $\xi \circ \varphi^{-1}$ が C^∞ 級であること.

例 10.2. O を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合とし, $\xi : O \to \mathbb{R}$ を考える. このとき, ξ が通常の意味で C^∞ 級であることと, 座標近傍 (O, id) 上の関数として C^∞ 級であることは同値.

例 10.3. I を $\mathbb{R}$ 内の空でない開集合, $f : I \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とし, (U, φ) を $y = f(x)$ のグラフとする. このとき, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級ならば, 制限 $F|_U$ は (U, φ) 上の C^∞ 級関数.

ここで $U := \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$, $\varphi : U \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ がグラフの定義だった. 高次元の C^∞ 級写像のグラフについても, 同様の性質が成り立つ.

定義 10.4. (U, φ), (V, ψ) を座標近傍とし, 写像 $F : U \to V$ を考える.

(1) F が $\underline{p \in U \text{ で } C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

(2) F が $\underline{C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in U$, $\psi \circ \xi \circ \varphi^{-1}$ は p で C^∞ 級.

関数の和・積・スカラー倍

$\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合 O に対して, $C^\infty(O)$ は関数の和・積・スカラー倍について閉じていた. そのことを用いると, 次が得られる.

命題 10.5. (U, φ) を座標近傍とし, $C^\infty(U) := \{\xi : U \to \mathbb{R} : C^\infty\}$ とおく. このとき $C^\infty(U)$ は関数の和・積・スカラー倍について閉じている. すなわち, 以下が成り立つ:

(1) $a, b \in \mathbb{R}$, $\xi, \eta \in C^\infty(U) \Rightarrow a\xi + b\eta \in C^\infty(U)$.

(2) $\xi, \eta \in C^\infty(U) \Rightarrow \xi\eta \in C^\infty(U)$.

11　幾何学 A (2016/06/08): C^∞ 級写像 (4)

座標近傍上の C^∞ 級写像 (続き)

C^∞ 級写像 (続き)

定義 11.1 (復習)**.** (U,φ), (V,ψ) を座標近傍とし, 写像 $F : U \to V$ を考える. このとき F が $\underline{p \in U \text{ で } C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

例 11.2. S^n に対して, (U_1^+, φ_1^+) をグラフと思ったときの座標近傍, (U_+, φ_+) を立体射影による座標近傍とする. このとき次は C^∞ 級: $F : U_1^+ \to U_+ : x \mapsto x$.

ここで, 立体射影は次で与えられていた:

$$\varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (1/(1 \mp x_{n+1}))(x_1, \ldots, x_n).$$

C^∞ 級同相

(U,φ), (V,ψ) を座標近傍とし, それらの間の C^∞ 級同相写像を定義する.

定義 11.3. $F : U \to V$ が $\underline{C^\infty \text{ 級同相}}$ であるとは, 以下が成り立つこと:
(i) F : 全単射; (ii) F : C^∞ 級; (iii) F^{-1} : C^∞ 級.

例 11.4. S^n に対して (U_1^+, φ_1^+) をグラフと思ったときの座標近傍とし, $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ に対して (U_1, φ_1) を自然な座標近傍とする. このとき次は C^∞ 級同相: $F : U_1^+ \to U_1 : x \mapsto [x]$.

可微分多様体上の C^∞ 級写像

C^∞ 級関数

ここでは M は C^∞ 級多様体を表すものとする.

定義 11.5. $\xi : M \to \mathbb{R}$ を連続関数とする.

(1) ξ が $\underline{p \in M \text{ で } C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\exists (U,\varphi)$ (p を含む M の座標近傍) : $\xi \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.
(2) ξ が $\underline{C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M$, ξ は p で C^∞ 級.

命題 11.6. $\xi : M \to \mathbb{R}$ を連続関数とする.

(1) ξ が $p \in M$ で C^∞ 級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall (U,\varphi)$ (p を含む M の座標近傍), $\xi \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.
(2) ξ が C^∞ 級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall (U,\varphi)$ (M の座標近傍), $\xi \circ \varphi^{-1}$ は C^∞ 級.

12　幾何学 A (2016/06/08): C^∞ 級写像 (5)

球面 S^n に対して, グラフによって局所座標系を定めた多様体を $(S^n)_{\mathrm{gr}}$, 立体射影によって局所座標系を定めた多様体を $(S^n)_{\mathrm{pr}}$ と便宜的に表す.

例 12.1. S^1 上の関数 $f : S^1 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$ を考える. 定義域を $(S^1)_{\mathrm{gr}}$ と考えたとき, f は C^∞ 級関数.

例 12.2 (小テスト問題)**.** S^1 上の関数 $f : S^1 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$ を考える. 定義域を $(S^1)_{\mathrm{pr}}$ と考えたとき, f は C^∞ 級関数.

C^∞ 級写像

ここでは M, N は C^∞ 級多様体を表すものとする.

定義 12.3. $F : M \to N$ を連続写像とする.

(1) F が $\underline{p \in M \text{ で } C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\exists (U, \varphi)$ (p を含む M の座標近傍), $\exists (V, \psi)$ ($F(p)$ を含む N の座標近傍) : $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

(2) ξ が $\underline{C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M$, F は p で C^∞ 級.

命題 12.4 (小テスト問題)**.** $F : M \to N$ を連続写像とする. F が $p \in M$ で C^∞ 級であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall (U, \varphi)$ (p を含む M の座標近傍), $\forall (V, \psi)$ ($F(p)$ を含む N の座標近傍), $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

例 12.5. 次は C^∞ 級写像: $\pi : (S^n)_{\mathrm{gr}} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n : x \mapsto [x]$.

C^∞ 級同相

引き続き M, N を C^∞ 級多様体とする.

定義 12.6. $F : M \to N$ が $\underline{C^\infty \text{ 級同相}}$ であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) F : 全単射; (ii) F : C^∞ 級; (iii) F^{-1} : C^∞ 級.

例 12.7. 次の恒等写像は C^∞ 級同相: $\mathrm{id} : (S^n)_{\mathrm{gr}} \to (S^n)_{\mathrm{pr}}$.

13　幾何学 A (2016/06/15): 接空間 (1)

例 13.1 (補足)**.** S^n に対して (U_1^+, φ_1^+) をグラフによる座標近傍, $\mathbb{RP}^n$ に対して (U_1, φ_1) を自然な座標近傍とする. このとき次は C^∞ 級同相: $F : U_1^+ \to U_1 : x \mapsto [x]$. 特に以下が成り立つ:

(1) $X_1 := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1 > 0\}$ とおくと, 次は全射: $\pi : X_1 \to U_1 : x \mapsto [x]$.

(2) 次は well-defined: $\widetilde{G} : X_1 \to U_1^+ : x \mapsto (1/|x|)x$.

(3) 次は well-defined: $G : U_1 \to U_1^+ : \pi(x) \mapsto \widetilde{G}(x)$. ただし $x \in X_1$.

(4) G は F の逆写像.

接空間のための準備

O を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合とする. その場合に, 接空間のアイデアを述べる.

定義 13.2. 次を $p \in O$ における O の 接空間 と呼ぶ:

$$T_pO := \{X \in \mathbb{R}^m \mid X \text{ は } p \text{ を始点とするベクトル }\}.$$

通常は $T_pO = \mathbb{R}^m$ と同一視することが多い. 接空間があると, 微分写像を定義できる.

定義 13.3. $f : O \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とする. 次を f の $p \in O$ における 微分写像 と呼ぶ:

$$(df)_p : T_pO \to T_{f(p)}\mathbb{R}^n : X \mapsto \lim_{t \to 0}(1/t)\left(f(p+tX) - f(p)\right).$$

命題 13.4 (復習)**.** $f : O \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像, $p \in O$ とする. このとき以下が成り立つ:

(1) $(df)_p$ は線型写像.

(2) $\{e_1, \ldots, e_m\}$ を T_pO の標準的な基底とすると, $(df)_p(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$.

(3) $f = (f_1, \ldots, f_n)$ と表す. $(df)_p$ を標準的な基底に関して行列表示すると $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)$.

$(Jf)_p := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)$ と表し, これを ヤコビ行列 と呼ぶ. 微分写像やヤコビ行列を使うと便利であるという例を二つ紹介する.

命題 13.5 (チェインルール)**.** $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ を C^∞ 級写像とする. このとき, $g \circ f$ も C^∞ 級写像であり, 次が成り立つ: $\forall p \in \mathbb{R}^m$, $(J(g \circ f))_p = (Jg)_{f(p)}(Jf)_p$.

これを行列の成分で書き下したものが, 合成写像の微分の公式 (チェインルール) である.

定理 13.6 (逆写像定理)**.** $f : O \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像, $p \in O$ とする. このとき f が p の周りで C^∞ 級同相であるための必要十分条件は, $\det(Jf)_p \neq 0$ となること.

条件「$\det(Jf)_p \neq 0$」は, 「微分写像 $(df)_p$ が線型同型」と言い換えることができる.

14　幾何学 A (2016/06/22): 接空間 (2)

$\mathbb{R}$ 内の開集合の接空間

接空間の元によって, 関数をその方向に微分することができた. より詳しい説明の前に, ここでは I を $\mathbb{R}$ 内の空でない開集合とし, その上の関数の微分について調べる.

命題 14.1 (復習)**.** $C^\infty(I) := \{\xi : I \to \mathbb{R} : C^\infty \text{ 級 }\}$ は, 関数の和・積・スカラー倍に関して閉じている (これにより $\mathbb{R}$-代数となる). ただしここで, $\xi, \eta \in C^\infty(I)$, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}(a\xi + b\eta)(x) &:= a\xi(x) + b\eta(x),\\ (\xi\eta)(x) &:= \xi(x)\eta(x).\end{aligned}$$

定義 14.2. $p \in I$ に対し, $D_pI := \{v : C^\infty(I) \to \mathbb{R} : \text{(i), (ii) をみたす }\}$ とおく. ただしここで,

(i) 線型,
(ii) 積の微分法則, すなわち, $\forall \xi, \eta \in C^\infty(I)$, $(\xi\eta)'(p) = \xi'(p)\eta(p) + \xi(p)\eta'(p)$.

ここで次のように定める: $\left(\frac{d}{dx}\right)_p : C^\infty(I) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \frac{d\xi}{dx}(p) = \xi'(p)$.

命題 14.3. $p \in I$ とすると, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\left(\tfrac{d}{dx}\right)_p\right\} = D_pI.$$

上の命題の $(\supset)$ の証明には, 次の補題を用いる.

補題 14.4. 簡単のために $p = 0$ とすると, 以下が成り立つ:

(1) $\forall v \in D_0I$, $v(1) = 0$, $v(\text{定数関数}) = 0$, $v(x^2) = 0$.
(2) $\forall \xi \in C^\infty(I)$, $\exists \eta \in C^\infty(I)$: $\xi(x) = \xi(0) + \xi'(0)x + \eta(x)x^2$.

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合の接空間

O を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合とする. ここでは以下を示す:

$$\begin{array}{ccccccc} & & T_pO & = & \{c'(0)\} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\tfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\} & = & \{D_X \mid X \in T_pO\} & = & \{D_{c'(0)}\} & = & D_pO \end{array}$$

まずは上段の等号を示す. 一般に, C^∞ 級写像 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O$ を O 内の曲線と呼び, $c'(0)$ を $c(0)$ における速度ベクトルと呼ぶ.

命題 14.5. $T_pO = \{c'(0) \mid \varepsilon > 0,\ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O : C^\infty,\ c(0) = p\}$.

15　幾何学 A (2016/06/22): 接空間 (3)

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合の接空間 (続き)

次に下段に話を移す. 下段に登場する用語を定義するためには, 次が必要.

命題 15.1 (復習)**.** $C^\infty(O) := \{\xi : O \to \mathbb{R} : C^\infty$ 級 $\}$ は, 関数の和・積・スカラー倍に関して閉じている (これにより $\mathbb{R}$-代数となる).

まず, $X \in T_pO$ があると, その方向微分 $D_X : C^\infty(O) \to \mathbb{R}$ が得られる.

定義 15.2. $\xi \in C^\infty(O)$, $X \in T_pO$ とする. このとき, 次を ξ の X による 方向微分 と呼ぶ:

$$D_X\xi := (d\xi)_p(X) := \lim_{t\to 0}(1/t)\left(\xi(p+tX) - \xi(p)\right).$$

微分写像 $(d\xi)_p$ は線型であり, D_{e_j} は偏微分に一致するので, 次が従う.

命題 15.3. O の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ とすると, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\tfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\} = \{D_X \mid X \in T_pO\}.$$

ここで上式の左辺は次の意味:

$$\left(a_1\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \cdots + a_m\left(\tfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right)\xi := a_1\tfrac{\partial\xi}{\partial x_1}(p) + \cdots + a_m\tfrac{\partial\xi}{\partial x_m}(p).$$

前の結果から $\{D_X \mid X \in T_pO\} = \{D_{c'(0)}\}$. チェインルールより, $D_{c'(0)}$ は次をみたす.

命題 15.4. $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O$ を C^∞ 級とし, $c(0) = p$ とする. このとき次が成立: $\forall\xi \in C^\infty(O)$,

$$(\xi \circ c)'(0) = (J\xi)_p(Jc)_0 = (d\xi)_p(c'(0)) = D_{c'(0)}\xi.$$

このときの $D_{c'(0)}$ を曲線 c に沿う微分と呼ぶこともある.

定義 15.5. $D_pO := \{v : C^\infty(O) \to \mathbb{R} \mid v$ は線型, 積の微分法則をみたす $\}$ を 方向微分の空間 と呼ぶ.

次の命題の証明は, 1 変数関数の場合に帰着すればできる.

命題 15.6. $\{D_{c'(0)} \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O : C^\infty,\ c(0) = p\} \subset D_pO$.

問題 15.7 (小テスト)**.** 上記の $D_{c'(0)}$ が積の微分法則をみたすことを示せ.

命題 15.8. $D_pO \subset \mathrm{Span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\}$.

16　幾何学 A (2016/07/06): 接空間 (4)

座標近傍の接空間

(U, φ) を m 次元座標近傍とする. ここでは以下を定義し, 示す:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\tfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right\} \quad = \quad \{c'(0)\} \quad = \quad D_p U$$

命題 16.1. $C^\infty(U) := \{\xi : U \to \mathbb{R} : C^\infty \text{ 級 }\}$ は, 関数の和・積・スカラー倍に関して閉じている (これにより $\mathbb{R}$-代数となる).

局所座標と接空間

定義 16.2. $\varphi(U)$ の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ で表す. このとき $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ を次で定義する:

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\xi \circ \varphi^{-1})(p).$$

定義 16.3. $T_p U := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right\}$ を (U, φ) の $p \in U$ における 接空間 という.

命題 16.4.

(1) 上記の $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right\}$ は一次独立.

(2) $T_p U$ は m 次元線型空間である.

曲線の速度ベクトルと接空間

次に $c'(0)$ を定義する. $\mathbb{R}^m$ 内の開集合について $(\xi \circ c)'(0) = D_{c'(0)}\xi$ だった.

定義 16.5. $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ を C^∞ 級とする. このとき 速度ベクトル $c'(0)$ を次で定義する:

$$c'(0) : C^\infty(U) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto (\xi \circ c)'(0).$$

問題 16.6 (小テスト)**.** 次を示せ: $T_p U \subset \{c'(0) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U : C^\infty,\ c(0) = p\}$.

方向微分の空間と接空間

定義 16.7. $D_p U := \{v : C^\infty(U) \to \mathbb{R} \mid v \text{ は線型, 積の微分法則をみたす }\}$ を 方向微分の空間.

命題 16.8. $\{c'(0) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U : C^\infty,\ c(0) = p\} \subset D_p U \subset T_p U$.

17 幾何学 A (2016/07/13): 接空間 (5)

多様体の接空間

M を m 次元 C^∞ 級多様体とする. その接空間は, 座標近傍の接空間と同様に 3 通りの方法で表示できる.

曲線の速度ベクトルと接空間

接空間の定義としては, どの表示方法を採用しても良いが, ここでは曲線の速度ベクトルを用いたものを定義とする (局所座標を使うと, その取り方に依存しないことが気になる).

定義 17.1. $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を C^∞ 級とする. このとき 速度ベクトル $c'(0)$ を次で定義する:

$$c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto (\xi \circ c)'(0).$$

定義 17.2. $T_pM := \{c'(0) \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty,\ c(0) = p\}$ を p における 接空間 と呼ぶ.

方向微分の空間と接空間

定義 17.3. $D_pM := \{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid v$ は線型, 積の微分法則をみたす $\}$ を 方向微分の空間.

問題 17.4 (小テスト)**.** 次を示せ: $T_pM \subset D_pM$.

局所座標と接空間

定義 17.5. (U, φ) を M の局所座標とし, $\varphi(U)$ の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ で表す. また $p \in U$ とする. このとき $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ を次で定義する:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi \circ \varphi^{-1})(p).$$

命題 17.6. $D_pM \subset \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right\} \subset T_pM.$

従って上記の 3 通りの表記は全て一致する. さらにこのことから T_pM が m 次元線型空間であることも従う. これらのことを正確に行うためには, $C^\infty(M)$ と $C^\infty(U)$ の違いに気を付けなくてはならない ($\xi \in C^\infty(M) \Rightarrow \xi|_U \in C^\infty(U)$ だが, この逆は正しいとは限らない).

18 幾何学 A (2016/07/13): 微分写像 (1)

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合における微分写像

以下では O を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合とする.

定義 18.1 (復習の復習)**.** $f : O \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とする. 次を f の $p \in O$ における 微分写像 と呼ぶ:

$$(df)_p : T_pO \to T_{f(p)}\mathbb{R}^n : X \mapsto \lim_{t\to 0}(1/t)\left(f(p+tX) - f(p)\right).$$

接ベクトル $X \in T_pO$ に対して方向微分 D_X を対応させることが, 多様体の接空間を定義するためのアイデアであった. そこで, 微分写像を D_X を用いて表す.

命題 18.2. $f : O \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像, $p \in O$, $X \in T_pO$, $\xi \in C^\infty(O)$ とする. このとき以下が成り立つ: $D_{(df)_pX}\xi = D_X(\xi \circ f)$.

多様体における微分写像

以下では M, N を C^∞ 級多様体, $F : M \to N$ を C^∞ 級写像とし, $p \in M$ とする. ここでは, 微分写像を方向微分を用いて定義する.

命題 18.3. 各 $v \in D_pM$ に対し, $(dF)_pv : C^\infty(N) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto v(\xi \circ F)$ と定義する. このとき次が成り立つ: $(dF)_pv \in D_{F(p)}N$.

定義 18.4. 上で定義した $(dF)_p : D_pM \to D_{F(p)}N$ を F の p での 微分写像 と呼ぶ.

問題 18.5 (小テスト)**.** L, M, N を C^∞ 級多様体とし, $F_1 : L \to M$, $F_2 : M \to N$ を C^∞ 級写像とする. このとき次を示せ: $\forall p \in M$, $d(F_2 \circ F_1)_p = (dF_2)_{F_1(p)} \circ (dF_1)_p$.

19　幾何学 A (2016/07/27): 微分写像 (2)

多様体における微分写像 (続き)

命題 19.1.

(1) 恒等写像 $\mathrm{id}_M : M \to M$ に対して, 次が成り立つ: $d(\mathrm{id}_M)_p = \mathrm{id}_{T_pM}$.

(2) M と N が C^∞ 級同相のとき, 次が成り立つ: $\dim M = \dim N$.

接空間には 3 通りの表示方法があったが, そのうちの方向微分の空間を用いることにより, 微分写像を定義した. 以下では, 他の表示方法を用いて微分写像を記述する.

命題 19.2. $F : M \to N$ を C^∞ 級写像とする. また, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ も C^∞ 級写像であるとし, $p := c(0)$ とおく. このとき次が成り立つ:

$$(dF)_p(c'(0)) = (F \circ c)'(0).$$

命題 19.3. $F : M \to N$ を C^∞ 級写像, (U, φ) を M の局所座標とし, $p \in U$ とする. また, (V, ψ) を N の局所座標で $F(p) \in V$ をみたすものとする. さらに, $\varphi(U)$, $\psi(V)$ の座標をそれぞれ $(x_1, \ldots, x_m)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ とおく. このとき次が成り立つ:

$$(dF)_p \left(\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\tfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{F(p)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_{F(p)} \right) J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}.$$

上記のように, 接空間の 3 通りの表示に応じて, 微分写像も 3 通りの表示方法がある. これらの表示方法は, 目的に応じて使い分けると便利である. 最後に, 微分写像の一つの応用を紹介する.

定理 19.4 (逆写像定理)**.** $F : M \to N$ を C^∞ 級写像とし, $p \in M$ とする. このとき, $(dF)_p$ が線型同型ならば, F は p の周りで C^∞ 級同相である.

ベクトル場 (発展)

ここでは $\mathbb{R}^m$ 上のベクトル場を紹介する. これを一般化して多様体上のベクトル場を定義することができる. $\mathbb{R}^m$ の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ を $\varphi(U)$ で表す.

定義 19.5. $\xi_i \in C^\infty(U)$ とする. このとき $X := \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ を U 上の <u>ベクトル場</u> と呼ぶ.

注意 19.6. $X := \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ を U 上のベクトル場とする. このとき次が成り立つ:

(1) $X : C^\infty(\mathbb{R}^m) \to C^\infty(\mathbb{R}^m)$ という写像を与える. ここで $Xf := \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

(2) X は $\mathbb{R}^m$ の各点に接ベクトルを対応させる. ここで $X_p := \sum \xi_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p\mathbb{R}^m$.