

第 1 章

前書き

本稿は, 2016 年度幾何学 D・多様幾何基礎講義 B の参考資料である.

1.1 講義の内容

この講義では, 等質空間の幾何学に関する話題を扱う. 全体を網羅的に解説するのではなく, 特定の話題に絞って, 最近の研究の話に最短ルートで到達するように紹介する.

- (1) 群作用と等質集合.
- (2) リー群上の左不変計量.
- (3) 左不変計量に対する Milnor 型定理.

これらのうち, (1) と (2) は独立した内容. これらの準備の上で, 最近の研究結果 (3) の内容を解説することを目標とする.

1.2 諸注意

本講義は, 指定された「英語対応」の一つになっている. そのため, 口頭での説明は日本語で, 板書は (できるだけ) 英語で行う.

本稿および講義の途中に適宜レポート問題を出題する. それらの解答を, 定期的に指定する日時に提出すること. 成績は, 主にレポートによって付けるが, 参加状況も加味する.

1.3 参考資料

本講義の内容は, 2015 年に大阪大学で行った集中講義の内容とほぼ同一である. その時の資料が webpage 上にあるので, 参考にして良い. また, それ以外の場所で講義した内容も含まれるので, 探せばどこかに資料がある.

ちなみに (1) の内容は、非常に基本的であり、執筆中の本の原稿 (ゼミのテキストとして配布しているもの) にも含まれる。(2) の内容も、基本的な内容なのだが、それを主として扱っている教科書があるかどうかは不明。(3) の内容は、最近の研究結果である。教科書はまだ存在しないので、参考文献が欲しい場合には、下記の学術論文を参照:

- Hashinaga, T., Tamaru, H.: Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds, preprint. ArXiv:1501.05513.
- Hashinaga, T., Tamaru, H., Terada, K.: Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups, *J. Math. Soc. Japan* **68** (2016), 669–684.
- Kodama, H., Takahara, A., Tamaru, H.: The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling, *Manuscripta Math.* **135** (2011), 229–243.

1.4 群作用の初歩的な例

詳しくは次回以降に解説するが、群作用の定義と初歩的な例を導入として紹介する。以下では特に断らない限り、 G を群、 M を集合とする。

定義 1.1 写像 $\Phi : G \times M \rightarrow M$ に対して、 $g.p := \Phi(g, p)$ と表す。写像 Φ が G の M への群作用であるとは、以下が成り立つこと:

- (i) 任意の $g, h \in G$ および任意の $p \in M$ に対して、 $(gh).p = g.(h.p)$.
- (ii) 任意の $p \in M$ に対して、 $e.p = p$.

ここで e は G の単位元を表す。群 G が集合 M に作用することを、記号 $G \curvearrowright M$ で表すことが多い。

例 1.2 $\mathbb{RH}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ とおき、これを上半平面と呼ぶ。このとき、次によって $\text{SL}(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{RH}^2$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

問題 1.3 (やや易) 以下のいずれかに答えよ:

- (1) 上記の $\text{SL}(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{RH}^2$ が群作用の条件 (i) を示すことを示せ。
- (2) 上記と同じ式によって $\text{GL}(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{RH}^2$ とはならない。理由を述べよ。

第 2 章

等質な集合

等質な集合を、推移的な群作用をもつ集合として定義する。この章では、集合 M が等質であることと、 $M = G/K$ と書けることが同値になることを示す。また、後に登場するものも含めて、様々な等質空間の例を紹介する。

2.1 準備

直交群の性質など、線型代数の準備をしておく。

定義 2.1 $M(n, \mathbb{R})$ を $n \times n$ 実行列全体の集合とし、以下のように定義する:

- (1) $GL(n, \mathbb{R}) := \{g \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$ を **一般線型群** と呼ぶ。
- (2) $SL(n, \mathbb{R}) := \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ を **特殊線型群** と呼ぶ。

以下では $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。また、単位行列を I_n で表し、次のようにおく:

$$I_{p,q} := \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}.$$

定義 2.2 上記の記号の下で、以下のように定義する:

- (1) $O(p, q) := \{g \in GL(p+q, \mathbb{R}) \mid {}^t g I_{p,q} g = I_{p,q}\}$ を **(不定値) 直交群** と呼ぶ。
- (2) $SO(p, q) := SL(p+q, \mathbb{R}) \cap O(p, q)$ を **(不定値) 特殊直交群** と呼ぶ。

通常直交群は $O(n) := O(n, 0)$, 特殊直交群は $SO(n) := SO(n, 0)$. また、不定値直交群は、 \mathbb{R}^{p+q} 上の (不定値) 内積 $\langle x, y \rangle_{p,q} := {}^t x I_{p,q} y$ と関係する。

命題 2.3 各 $g \in M(p+q, \mathbb{R})$ に対して、以下は同値:

- (i) $g \in O(p, q)$.
- (ii) g は $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q}$ を保つ。すなわち、 $\forall v, w \in \mathbb{R}^{p+q}$, $\langle gv, gw \rangle_{p,q} = \langle v, w \rangle_{p,q}$.

(iii) $g = (v_1, \dots, v_{p+q})$ と表すと, $\{v_1, \dots, v_{p+q}\}$ は \mathbb{R}^{p+q} の (p, q) -正規直交基底.

2.2 群作用

群作用の定義と例を紹介する. 以下では G を群, M を集合とする.

定義 2.4 写像 $\Phi : G \times M \rightarrow M$ に対して, $g.p := \Phi(g, p)$ と表す. 写像 Φ が G の M への群作用であるとは, 以下が成り立つこと:

- (i) 任意の $g, h \in G$ および任意の $p \in M$ に対して, $(gh).p = g.(h.p)$.
- (ii) 任意の $p \in M$ に対して, $e.p = p$.

群 G が集合 M に作用することを, 記号 $G \curvearrowright M$ で表すことが多い. 群作用の定義は, 積および単位元との適合性により与えられている. 逆元との適合性は, 自動的に導かれる.

命題 2.5 $\Phi : G \times M \rightarrow M$ により G が M に作用しているとする. このとき, 任意の $g \in G$ に対して次が成り立つ: $\Phi(g^{-1}, \cdot)$ は $\Phi(g, \cdot)$ の逆写像.

命題 2.6 $\Phi : G \times M \rightarrow M$ により G が M に作用しているとする. このとき,

- (1) 任意の部分群 $G' \subset G$ は, 制限写像 $\Phi|_{G' \times M}$ によって M に作用する.
- (2) 部分集合 $M' \subset M$ が G によって保たれている (すなわち $G.M' \subset M'$) とする. このとき, 制限写像 $\Phi|_{G \times M'} : G \times M' \rightarrow M'$ によって, G は M' に作用する.

以下で群作用の具体例を紹介する. まずは $\langle, \rangle := \langle, \rangle_{n,0}$ を用いたものから始める.

例 2.7 以下は群作用である:

- (1) $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (g, v) \mapsto gv$.
- (2) 作用する群を制限することにより, $\text{O}(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$.
- (3) 作用される集合を制限することにより, $\text{O}(n) \curvearrowright S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle = 1\}$.

例 2.8 上と同様に, $\text{O}(p+1, q) \curvearrowright M(p, q) := \{x \in \mathbb{R}^{p+q+1} \mid \langle x, x \rangle_{p+1, q} = 1\}$. ここで $M(n, 0)$ は球面, $M(0, n)$ は実双曲空間である. また $M(p, 1)$ はド・ジッター空間, $M(1, q)$ は反ド・ジッター空間と呼ばれる.

例 2.9 $G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V \text{ は } k \text{ 次元線型部分空間}\}$ を実グラスマン多様体と呼ぶ. 次は群作用: $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \times G_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n) : (g, V) \mapsto g.V := \{gv \mid v \in V\}$.

群作用は, 上記のような行列の積を使ったものが典型的だが, そうでないものも存在する. 例えば, 前書きで与えた上半平面への作用など.

2.3 推移的な作用

群作用が推移的であることの定義を述べ、例を紹介する。

定義 2.10 群 G の集合 M への作用が推移的であるとは、次が成り立つこと： $\forall p, q \in M$, $\exists g \in G : g.p = q$.

補題 2.11 $o \in M$ を固定する。このとき、群 G の M への作用が推移的であることは次と同値：任意の $p \in M$ に対して、 $g \in G$ を上手く選ぶと、 $g.o = p$.

例 2.12 $n \geq 1$ とすると、 $O(n+1)$ および $SO(n+1)$ は S^n に推移的に作用する。

小さい群が推移的なら大きい群も推移的に作用するので、 $SO(n+1) \curvearrowright S^n$ が推移的を示せば十分。このことは、正規直交基底の性質と命題 2.3 を用いて示すことができる。

例 2.13 $GL(n, \mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$, $SO(n)$ は $G_k(\mathbb{R}^n)$ に推移的に作用する。

例 2.14 $O(p+1, q)$ は $M(p, q)$ に推移的に作用する。

例 2.15 $SL(2, \mathbb{R})$ および次の群 S は、 $\mathbb{R}H^2$ に推移的に作用する：

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

この命題は、式変形だけで証明しようとする大変。特定の元が特定の変換を引き起こすことを見て、それをを用いて幾何的に考察して示すのが良い。

2.4 等質な集合

等質な集合を、推移的な群作用をもつ集合として定義する.

定義 2.16 G を群とする. 集合 M が G に関して **等質** であるとは, G が M に推移的に作用すること.

集合 M が G に関して等質であること, $M = G/K$ とかけることが同値になることを述べたい. そのために, まずは G/K を説明する.

定義 2.17 G を群とし, K をその部分群とする. 次で定義される G 上の同値関係 \sim を K による同値関係 と呼ぶ:

$$g \sim h \Leftrightarrow g^{-1}h \in K.$$

ここで定義した関係 \sim が同値関係であることは, 容易に確かめられる. また, $g \in G$ を含む同値類を $[g]$ で表すと, 次が成り立つ:

$$[g] = gK := \{gk \mid k \in K\}.$$

定義 2.18 群 G を部分群 K による同値関係で割った商集合を G/K で表し, G の K による **剰余集合** と呼ぶ.

次が, 等質な集合に関する基本的な定理.

定理 2.19 集合 M が G に関して等質であることと, $M = G/K$ と書けることは同値.

この定理を証明するためには, 以下の二つの命題を示せば良い. これらはそれぞれ「 G/K は等質」と「等質ならば G/K と書ける」ことを意味する.

命題 2.20 K を G の任意の部分群とする. このとき, G/K は G に関して等質である. 特に, 次により G は G/K に推移的に作用する: $g \cdot [h] := [gh]$.

この命題を示すためには, well-defined であること, 群作用であること, そして推移的であることを示す必要がある.

命題 2.21 (問題 (標準)) M が G に関して等質であるとし, $p \in M$ とする. このとき, 次の写像は全単射である: $f : G/G_p \rightarrow M : [g] \mapsto g \cdot p$.

ここで, $G_p := \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$ である. これを G の p における固定部分群と呼ぶ.

2.5 等質な集合の例

等質な集合 M を G/K の形で書くことを等質空間表示という。等質空間表示を求めるためには、推移的に作用する群 G と、ある点 $p \in M$ での固定部分群を求めれば良い。

例 2.22 $n \geq 1$ とする。このとき、球面 S^n は以下の等質空間表示を持つ：

$$\begin{aligned} S^n &= \mathrm{O}(n+1) / \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\} \\ &= \mathrm{SO}(n+1) / \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{SO}(n) \right\}. \end{aligned}$$

このように、等質空間表示は一意的ではない。また、一般的に次が成り立つことに注意する： $G' \subset G$ を部分群とし、 $G' \curvearrowright M = G/G_p$ を考えると、 $G'_p = G' \cap G_p$ 。

例 2.23 (問題 (標準)) 以下において、行列のブロック分割のサイズは $(k, n-k)$ であるとする。グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ は以下の等質空間表示をもつ：

$$\begin{aligned} G_k(\mathbb{R}^n) &= \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) / \left\{ \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right] \mid \det \neq 0 \right\} \\ &= \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) / \left\{ \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right] \mid \det = 1 \right\} \\ &= \mathrm{O}(n) / \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array} \right] \mid \alpha \in \mathrm{O}(k), \beta \in \mathrm{O}(n-k) \right\} \\ &= \mathrm{SO}(n) / \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array} \right] \mid \alpha \in \mathrm{O}(k), \beta \in \mathrm{O}(n-k), \det(\alpha) \det(\beta) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

例 2.24 $\mathbb{R}H^2 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) = S/\{e\}$.

例 2.25 $M(p, q) = \mathrm{O}(p+1, q)/\mathrm{O}(p, q)$.

例 2.26 $\mathfrak{M} := \{\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \text{ 上の内積}\}$ とする。このとき、

- (1) 次による $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathfrak{M}$ は推移的: $g \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle := \langle g^{-1}(\cdot), g^{-1}(\cdot) \rangle$.
- (2) $\mathfrak{M} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$.

問題 2.27 (発展; レポート問題ではない) 以下の集合を等質空間表示せよ:

- (1) $\{J \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid J^2 = -I_{2n}\}$.
- (2) $\{\Omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \text{シンプレクティック形式 (i.e., 双線型, 交代, 非退化)}\}$.

2.6 軌道

等質集合の基本的な解説は、前頁までで終わった。ここでは関連する話題 (余談) として、群作用 $H \curvearrowright M$ に対して、各点を通る軌道を定義する。軌道は「良い部分集合」を与えることが多く、例えば部分多様体の研究において重要な例を供給する。

定義 2.28 各 $p \in M$ に対し、次を p を通る軌道と呼ぶ: $H.p := \{h.p \mid h \in H\}$.

当然ながら、軌道は等質集合である。また、作用が推移的であるための必要十分条件は、軌道が全体と一致すること。

例 2.29 $SO(2) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ に対し、軌道は「原点」または「同心円」になる。

例 2.30 上半平面 $\mathbb{RH}^2 = SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ について、以下の群を考える:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\}, \quad N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$$

このとき、これらの群作用による全ての軌道は「1次元」である。

例 2.31 $O(3) \curvearrowright M(3, \mathbb{R})$ を次で定める: $g.X := gXg^{-1}$. このとき以下が成り立つ:

- (1) $O(3) \curvearrowright \text{Sym}^0(3, \mathbb{R}) := \{X \in M(3, \mathbb{R}) \mid {}^tX = X, \text{tr}(X) = 0\}$.
- (2) $X := \text{diag}(1, 1, -2)$ を通る軌道は、 $O(3).X = O(3)/(O(1) \times O(2)) (\cong \mathbb{RP}^2)$.
- (3) $M(3, \mathbb{R})$ 上の内積を $\langle X, Y \rangle := \text{tr}({}^tXY)$ で定めると、これは $O(3)$ の作用で不変.
- (4) $O(3) \curvearrowright S^4 (\subset \text{Sym}^0(3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^5)$. ただし S^4 は、上記の内積に関する単位球.
- (5) 従って、 $O(3)$ 作用を用いて、 $\mathbb{RP}^2 \subset S^4$ が得られる.

この例で扱った群作用は、対称空間や部分多様体の業界では有名な作用 (の特殊な場合) になっている。また、上で得られた $\mathbb{RP}^2 (\subset S^4)$ は Veronese 曲面と呼ばれている。

2.7 補足

$\mathfrak{M} := \{\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \text{ 上の内積} \}$ と定める. このとき, $GL(n, \mathbb{R})$ は次によって \mathfrak{M} に作用していた: $g \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle := \langle g^{-1}(\cdot), g^{-1}(\cdot) \rangle$. これが群作用であることについて, 少し補足をする.

命題 2.32 自然な作用 $GL(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ を考える. このとき以下が成り立つ:

- (1) $GL(n, \mathbb{R})$ は $\text{Map}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \{F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \text{写像}\}$ に次によって作用する:
 $(g.F)(x) := F(g^{-1}x)$.
- (2) この作用は $(\mathbb{R}^n)^* := \{F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \text{線型}\}$ を保つ.

ここで, $(g.F)(x) := F(g.x)$ によって定めたものは ($n \geq 2$ の場合には) 群作用にならないことに注意する. 上の命題により, $GL(n, \mathbb{R}) \curvearrowright (\mathbb{R}^n)^*$ が得られる (ちなみに $(\mathbb{R}^n)^*$ は \mathbb{R}^n の双対空間). この命題の 2 階バージョンを考えると, 次のようになる.

命題 2.33 以下によって $GL(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathfrak{M}$ が得られる:

- (1) $GL(n, \mathbb{R})$ は $\text{Map}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \{F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \text{写像}\}$ に次によって作用する: $(g.F)(x, y) := F(g^{-1}x, g^{-1}y)$.
- (2) この作用は $\otimes^2(\mathbb{R}^n)^* := \{F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \text{双線型}\}$ を保つ.
- (3) さらに, この作用は $S^2(\mathbb{R}^n)^* := \{F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \text{対称, 双線型}\}$ を保つ.
- (4) さらに, この作用は $\mathfrak{M} := \{F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \text{対称, 双線型, 正定値}\}$ を保つ.

ここで (2), (3) に書いた記号は, テンソル積の記号. ここではその一般論には立ち入らないので, テンソルを知らない場合には単なる記号だと思って良い.

第3章

左不変計量

ここでは、内積付きリー代数 $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ に対して曲率を定義し、その性質を調べていく。これらに対応するリー群の上の左不変 (リーマン) 計量を調べることと同等であるが、そのことについては触れない。

3.1 リー代数の準備

リー代数の定義と簡単な例を復習する。リー代数 (Lie algebra) は歴史的にリー環と呼ばれることも多い。

定義 3.1 \mathfrak{g} を実線型空間とし、 $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を双線型写像とする。このとき $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ がリー代数 とは、以下が成り立つこと:

- (i) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = -[Y, X]$.
- (ii) $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

リー代数を単に \mathfrak{g} で表すことも多い。リー代数の積 $[\cdot, \cdot]$ を括弧積と呼ぶ。リー代数の最も典型的な例は、次のもの。

例 3.2 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := M(n, \mathbb{R})$ は次によってリー代数: $[X, Y] := XY - YX$.

定義 3.3 リー代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ に対し、 $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ が準同型写像 とは、以下が成り立つこと:

- (i) f は線型,
- (ii) f は括弧積を保つ, すなわち, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}, f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$.

定義 3.4 リー代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ に対し、 $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ が同型写像 とは、準同型かつ全単射であること。また、同型写像 $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ が存在するとき、 \mathfrak{g} と \mathfrak{g}' は同型 であるという。

3.2 リー代数の例

ここでは、リー代数の例を記述する方法を二つ紹介する。一つは、 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の部分代数として与える方法である。

定義 3.5 \mathfrak{g} をリー代数とする。 \mathfrak{g}' が \mathfrak{g} 内の リー部分代数 とは、次が成り立つこと:

- (i) \mathfrak{g}' は \mathfrak{g} 内の線型部分空間。
- (ii) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}', [X, Y] \in \mathfrak{g}'$.

容易に分かるように、リー部分代数はリー代数である。

例 3.6 以下は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ のリー部分代数:

- (1) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$.
- (2) $\mathfrak{o}(p, q) := \{X \in \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{R}) \mid {}^t X I_{p,q} + I_{p,q} X = 0\}$, ただし $n = p + q$.

上記のようなリー代数は半単純と呼ばれるものである。この講義では、半単純ではないようなもの (例えば冪零や可解) を主に取り上げる。次がその典型例。

例 3.7 以下は $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ のリー部分代数 (これを 3 次元ハイゼンベルグ代数 と呼ぶ):

$$\mathfrak{h}^3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

リー代数を記述するもう一つの方法は、基底を用いて括弧積を表すものである。基底を $\{x_1, \dots, x_n\}$ としたとき、括弧積は歪対称かつ双線型だったので、 $[x_i, x_j]$ ($i < j$) さえ分かっているならば、括弧積は復元できる。

定義 3.8 $\{x_1, \dots, x_n\}$ を \mathfrak{g} の基底とする。このとき、各 $i < j$ に対して $[x_i, x_j]$ を指定したものを **bracket relation** と呼ぶ。

関係式のうち、0 となるものは省略することが多い。なお、bracket relation の和訳は、定着したものはないと思われる。

例 3.9 次で与えられるリー代数 \mathfrak{g} は、 \mathfrak{h}^3 と同型:

$$\mathfrak{g} = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}, \quad [e_1, e_2] = e_3.$$

3.3 曲率の定義

ここでは $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ を内積付きリー代数とし, その曲率を定義する.

定義 3.10 $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ を内積付きリー代数とし, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ とする.

(1) 次で定義される $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を **Levi-Civita 接続** と呼ぶ:

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

(2) $R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$ を **リーマン曲率** と呼ぶ.

(3) $\text{Ric}(X) := \sum R(X, e_i)e_i$ を **リッチ曲率** と呼ぶ. ここで $\{e_i\}$ は \mathfrak{g} の正規直交基底.

(4) σ を \mathfrak{g} 内の 2次元部分空間とすると, $K_\sigma := \langle R(E_1, E_2)E_2, E_1 \rangle$ を σ の **断面曲率** と呼ぶ. ここで $\{E_1, E_2\}$ は σ の正規直交基底.

注意 3.11 上で定義される ∇ は, 一般のリーマン多様体で定義される Levi-Civita 接続の特別な場合である. 実際, リー代数の元を左不変ベクトル場だと思って, いわゆる “Koszul 公式” に代入すると, 上式は出てくる.

命題 3.12 $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ および $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ について, 以下が成り立つ:

- (1) リッチ曲率 Ric は正規直交基底の取り方に依らない.
- (2) $\langle \nabla_X Y, Y \rangle = 0$. すなわち ∇_X は \langle, \rangle に関して交代.
- (3) $R(X, X) = 0$.
- (4) $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$.
- (5) 断面曲率 K_σ は正規直交基底の取り方に依らない.

例 3.13 \mathfrak{g} が可換なら, 任意の内積 \langle, \rangle に対して $R \equiv 0$.

一般には, 内積を取り替えると曲率の様相も変わる. 曲率を具体的に計算する時には, 次を使うと便利ことが多い.

命題 3.14 $U : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を次で定義する:

$$2\langle U(X, Y), Z \rangle = \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle \quad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}).$$

すると U は対称であり, $\nabla_X Y = (1/2)[X, Y] + U(X, Y)$ が成り立つ.

3.4 定曲率の例: 実双曲空間のリー代数

ここでは、曲率が特別な性質をみたすような例を紹介する。

定義 3.15 $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ について、

- (1) 定曲率とは、断面曲率 K_σ が σ に依らずに一定であること。
- (2) **Einstein** とは、 $\text{Ric} = c \cdot \text{id}$ ($c \in \mathbb{R}$) となること。

定義 3.16 次で定義される $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^n} := \text{span}\{A, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ を実双曲空間のリー代数と呼ぶ:

$$[A, X_i] = X_i \quad (i \in \{1, \dots, n-1\}).$$

注意 3.17 このリー代数に対応する単連結リー群は、実双曲空間 $\mathbb{R}H^n$ と自然に同一視できることが知られている。特に、左不変な定曲率計量をもつ。これを具体的に構成しよう。

補題 3.18 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^n}$ 上の内積 \langle, \rangle を、上の基底を正規直交にするものとして定める。このとき $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^n}, \langle, \rangle)$ について以下が成り立つ:

- (1) $U(A, A) = 0$, $U(A, X_i) = -(1/2)X_i$, $U(X_i, X_j) = \delta_{ij}A$.
- (2) $\nabla_A = 0$, $\nabla_{X_i}A = -X_i$, $\nabla_{X_i}X_j = \delta_{ij}A$.

命題 3.19 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^n}, \langle, \rangle)$ に対して、以下が成り立つ:

- (1) $K_\sigma \equiv -1$, よって定曲率である。
- (2) $\text{Ric} = -(n-1)\text{id}$, よって Einstein である。

問題 3.20 (レポート) 補題 3.18, 命題 3.19 を証明せよ (講義で省略した部分を補え)。

3.5 代数的 Ricci soliton の例: ハイゼンベルグ代数

代数的 Ricci soliton を定義し, \mathfrak{h}^3 がその例となることを紹介する.

定義 3.21 次の $\text{Der}(\mathfrak{g})$ を \mathfrak{g} の 微分代数 と呼ぶ:

$$\text{Der}(\mathfrak{g}) := \{D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} : \text{線型} \mid D([\cdot, \cdot]) = [D(\cdot), \cdot] + [\cdot, D(\cdot)]\}.$$

例 3.22 3次元ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{h}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ に対して,

$$\text{Der}(\mathfrak{h}^3) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mid a_{11} + a_{22} = a_{33} \right\}.$$

定義 3.23 $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ が代数的 **Ricci soliton** とは, 次が成り立つこと: $\exists c \in \mathbb{R}, \exists D \in \text{Der}(\mathfrak{g}) : \text{Ric} = c \cdot \text{id} + D$.

注意 3.24 $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ に対応する単連結リー群と左不変計量の組を (G, g) とする. このとき, $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ が代数的 Ricci soliton なら, (G, g) は Ricci soliton である. (詳細は省略.)

補題 3.25 $\mathfrak{h}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ に対し, $\{e_1, e_2, e_3\}$ を正規直交にする内積を \langle, \rangle とする. このとき,

- $U(e_1, e_1) = U(e_1, e_2) = U(e_2, e_2) = U(e_3, e_3) = 0,$
- $U(e_1, e_3) = -(1/2)e_2, \quad U(e_2, e_3) = (1/2)e_1.$
- $\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = (1/2)e_3, \quad \nabla_{e_1} e_3 = -(1/2)e_2,$
- $\nabla_{e_2} e_1 = -(1/2)e_3, \quad \nabla_{e_2} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_2} e_3 = (1/2)e_1,$
- $\nabla_{e_3} e_1 = -(1/2)e_2, \quad \nabla_{e_3} e_2 = (1/2)e_1, \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0.$

命題 3.26 $(\mathfrak{h}^3, \langle, \rangle)$ は代数的 Ricci soliton. とくに

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

注意 3.27 与えられた $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ の曲率の計算, Einstein や代数的 Ricci soliton であるかどうかの判定は, (複雑かも知れないが) 直接計算することが可能. 一方で, 同じ \mathfrak{g} でも, 内積 \langle, \rangle を別のものにする, 曲率は全く変わることが多いことに注意する.

第 4 章

Milnor 型定理

前の章では, 内積付きリー代数 $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ の曲率を計算し, Einstein や代数的 Ricci soliton であるかを判定できることを述べた. ここでは, リー代数が与えられたときに, その上に Einstein や代数的 Ricci soliton となる内積が存在するかどうかを調べる方法を紹介する.

4.1 Milnor 枠

定義 4.1 リー代数 \mathfrak{g} が **unimodular** とは, 次が成り立つこと: $\forall X \in \mathfrak{g}, \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_X) = 0$.

定理 4.2 (Milnor, 1976) \mathfrak{g} を 3 次元 unimodular リー代数とすると, 次が成り立つ: $\forall \langle, \rangle : \mathfrak{g}$ 上の内積, $\exists \{x_1, x_2, x_3\} : \langle, \rangle$ に関する正規直交基底, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$[x_1, x_2] = \lambda_3 x_3, [x_2, x_3] = \lambda_1 x_1, [x_3, x_1] = \lambda_2 x_2.$$

注意 4.3 この定理により, 3 次元 unimodular リー代数の分類が得られる. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ の符号が, 例えば $(+++)$ なら $\mathfrak{so}(3)$, $(++-)$ なら $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $(+00)$ なら Heisenberg.

注意 4.4 この定理により, 3 次元 unimodular リー代数上の内積がどのくらいあるかが分かる. これを使って, Einstein や Ricci soliton などの存在・非存在が分かる.

注意 4.5 この定理の証明は $\dim = 3$ に強く依存している. 実際, $[\cdot, \cdot] : \wedge^2 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を考えると, 3 次元の特殊性により $\wedge^2 \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$ となり, 線型写像 $L : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ が得られる. この L が本質的に使われる.

注意 4.6 一方で, \mathfrak{g} が 3 次元のとき, その上の内積全体の集合は $\mathfrak{M} := \operatorname{GL}(3, \mathbb{R})/\operatorname{O}(3)$ と同一視できる. このとき $\dim \mathfrak{M} = 6$. しかし上の定理はパラメータ高々 3 つで全ての内積を表している. 残りの次元は, $[\cdot, \cdot]$ を保つ基底の取り換え (つまり $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ の作用) で吸収されていると考えられる.

4.2 自己同型群

リー代数 \mathfrak{g} の自己同型群 $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ を定義し、具体例で計算を見せる。

定義 4.7 次を \mathfrak{g} の自己同型群と呼ぶ:

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}) := \{\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} : \text{線型同型} \mid \varphi([\cdot, \cdot]) = [\varphi(\cdot), \varphi(\cdot)]\}$$

例 4.8 次のリー代数を考える: $\mathfrak{g} := \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$, $[e_1, e_2] = e_2$. このとき,

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in \text{GL}(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

上で定義したリー代数は、 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^2} \oplus \mathbb{R}$ という直和リー代数と同型。

例 4.9 (レポート) 3次元ハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{h}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ に対して,

$$\text{Aut}(\mathfrak{h}^3) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \text{GL}(3, \mathbb{R}) \mid a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{33} \right\}.$$

4.3 軌道の代表系

群 H が集合 M に作用しているとする. 推移的とは限らない.

定義 4.10 各 $p \in M$ に対し, 次を p を通る軌道と呼ぶ: $H.p := \{h.p \mid h \in H\}$.

定義 4.11 \mathfrak{U} を M 内の部分集合とする. このとき, \mathfrak{U} が H -作用に関する軌道の代表系であるとは, 次が成り立つこと: \mathfrak{U} が全ての H -軌道と交わる.

ちなみに, \mathfrak{U} が全ての H -軌道と交わるとは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M, \mathfrak{U} \cap H.p \neq \emptyset$.

例 4.12 $\text{SO}(2) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ に対して, 原点を通る直線は軌道の代表系.

上記の設定を $M := G/K$ という等質な集合の場合に考える. H を G 内の部分群とすると, H は M に自然に作用する.

定義 4.13 上記の作用 $H \curvearrowright M = G/K$ を考え, $o := [e]$ とおく. また, \mathfrak{U} を G の部分集合とする. このとき, \mathfrak{U} が軌道の代表系であるとは, 次が成り立つこと: $\{h.o \mid h \in \mathfrak{U}\}$ が全ての H -軌道と交わる.

例 4.14 上半平面 $\mathbb{RH}^2 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ について, 以下の群を考える:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\}, \quad N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$$

このとき以下が成り立つ;

- (1) $A \curvearrowright \mathbb{RH}^2$ に対して, N は軌道の代表系.
- (2) $N \curvearrowright \mathbb{RH}^2$ に対して, A は軌道の代表系であることを示せ.

一般に, 軌道の代表系を求めるためには, 次の補題が便利.

補題 4.15 $H \curvearrowright M = G/K$ とし, \mathfrak{U} を G の部分集合とする. このとき, \mathfrak{U} が軌道の代表系であることと次が同値: $\forall g \in G, \mathfrak{U} \cap HgK \neq \emptyset$.

ここで $HgK := \{h g k \mid h \in H, k \in K\}$. これを 両側剰余類 と呼ぶ. 記号の簡略化のため, これを単に $[[g]]$ と書くこともある.

例 4.16 $\mathfrak{M} := \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ への次の群の作用を考える:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

このとき次の \mathfrak{U} は軌道の代表系:

$$\mathfrak{U} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \geq 0 \right\}.$$

問題 4.17 (レポート) $\mathfrak{M} := \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ への次の群の作用を考える:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

このとき, $\mathfrak{U} := \{I_3\}$ が軌道の代表系 (すなわち作用が推移的) であることを示せ.

4.4 主定理

以下では $\{e_1, \dots, e_n\}$ を \mathfrak{g} の基底とし, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$ と同一視する. このとき, 群作用の章で見たように, 次の作用が推移的であった:

$$GL(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathfrak{M}(\mathfrak{g}) := \{\langle, \rangle : \mathfrak{g} \text{ 上の内積}\}, \quad g \cdot \langle, \rangle := \langle g^{-1}(\cdot), g^{-1}(\cdot) \rangle.$$

基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を正規直交にする \mathfrak{g} 上の内積を \langle, \rangle_0 で表す. すると, $GL(n, \mathbb{R})$ の \langle, \rangle_0 での固定部分群は, (上記の正規直交基底に関する行列表示の下で) $O(n)$ と一致する. 従って次の等質空間表示を得る:

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{g}) \cong GL(n, \mathbb{R})/O(n).$$

本稿の主定理では, 上記の空間 $\mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ に対して, 次の群による作用を考える:

$$\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}) := \{c\varphi \in GL(n, \mathbb{R}) \mid c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})\}.$$

定理 4.18 作用 $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ に対して, \mathcal{U} が軌道の代表系であるとする. このとき次が成り立つ: $\forall \langle, \rangle : \mathfrak{g}$ 上の内積, $\exists k > 0, \exists \varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{g}), \exists g \in \mathcal{U} : \{\varphi g e_1, \dots, \varphi g e_n\}$ は $k\langle, \rangle$ に関する正規直交基底.

この定理は, 各リー代数の「Milnor 型定理」を得るための手続きを定めたものである. この手続きを適用することにより, 下記のような命題を得ることができる.

命題 4.19 次のリー代数を考える: $\mathfrak{g} := \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$, $[e_1, e_2] = e_2$. このとき次が成り立つ: $\forall \langle, \rangle, \exists \lambda \geq 0, \exists k > 0, \exists \{x_1, x_2, x_3\} : k\langle, \rangle$ に関する正規直交基底:

$$[x_1, x_2] = x_2 + \lambda x_3.$$

この命題のようなものを「Milnor 型定理」と呼ぶ. 軌道の代表系 \mathcal{U} を求めることができれば, 上記の手続きは原理的には任意のリー代数に対して適用可能である.

系 4.20 上記のリー代数は, Einstein 内積を許容しない (代数的 Ricci soliton は許容する). 特に, $k = 1$ とすると, 正規直交基底 $\{x_1, x_2, x_3\}$ に関して次が成り立つ:

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} -(1 + (\lambda^2/2)) & & \\ & 0 & \\ & & \lambda^2/2 \end{pmatrix}.$$

4.5 関連する話題

問題 4.21 (レポート) 今回の講義内容を 3 ~ 4 行でまとめよ (ただし, やったことを単に並べるだけでなく, 起承転結などを意識して組み立てること). また, 講義の感想を書いて下さい (特に, 難易度および英語による板書について).

ここまで, 左不変計量の研究に関する紹介を行った. この場合にも未解決のことは多く残っている. 例えば, 次の問題は当然確かめておくべき内容と思われる.

問題 4.22 Milnor 型定理を得るための手続き (定理 4.18) を, 3 次元 unimodular リー代数に適用し, その場合に Milnor 枠が復元できるかどうかを確かめよ.

当然, 高次元の場合などに問題は山ほど残っているのだが, ここでは, 上記の研究が, 他の幾何構造の研究にも応用できること (可能性) について述べる. まずは不定値内積.

定理 4.23 \mathfrak{g} を n 次元リー代数とし, $p+q=n$ とする. このとき \mathfrak{g} 上の符号数 (p, q) の不定値内積全体の集合は $GL(p+q, \mathbb{R})/O(p, q)$ と表せる. さらに, $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ の作用の軌道の代表系を考えることにより, 不定値内積版の Milnor 型定理を得ることができる.

不定値内積の場合には, 軌道の代表系が分かっているリー代数自体が少ない. 例えば, 自己同型群 $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ が大きいものでいうと, 次の場合ですら分かっていない.

問題 4.24 $\mathfrak{g} := \mathfrak{h}^3 \oplus \mathbb{R}$ とする. このとき $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ の $GL(p+q, \mathbb{R})/O(p, q)$ への作用に対して, 軌道の代表系を求めよ (ただし $(p, q) = (1, 3), (2, 2)$).

さらに, 内積以外の幾何構造に対しても, 上記の手法は適用できると思われる. その中でも有力な候補として, 複素構造とシンプレクティック構造を挙げる (問題 2.27 参照).

問題 4.25 \mathfrak{g} を $2n$ 次元リー代数とする. このとき \mathfrak{g} 上の (概) 複素構造全体の集合を等質空間表示せよ. また, そこへの群作用を考えることにより, (概) 複素構造版の Milnor 型定理を作る手続きを与えよ.

問題 4.26 \mathfrak{g} を $2n$ 次元リー代数とする. このとき \mathfrak{g} 上の非退化 2 次形式全体の集合を等質空間表示せよ. また, そこへの群作用を考えることにより, この構造に関する Milnor 型定理を作る手続きを与えよ.

内積についての Milnor 型定理は, 例えば Einstein 内積が存在するかどうかを調べる際に有効であった. 上で挙げた問題は, 可積分な左不変複素構造や左不変シンプレクティック構造の存在問題について, 一つのアプローチ方法を与えると考えている.

参考文献

- [1] Hashinaga, T.: On the minimality of the corresponding submanifolds to four-dimensional solvsolitons, *Hiroshima Math. J.* **44** (2014), 173–191.
- [2] Hashinaga, T., Tamaru, H.: Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds, preprint. ArXiv:1501.05513.
- [3] Hashinaga, T., Tamaru, H., Terada, K.: Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups, *J. Math. Soc. Japan* **68** (2016), 669–684.
- [4] Kodama, H., Takahara, A., Tamaru, H.: The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling, *Manuscripta Math.* **135** (2011), 229–243.
- [5] Kubo, A., Onda, K., Taketomi, Y., Tamaru, H.: On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups, *Hiroshima Math. J.* **46** (2016), to appear.
- [6] Taketomi, Y., Tamaru, H.: On the nonexistence of left-invariant Ricci solitons — a conjecture and examples, *Transf. Groups*, to appear.
- [7] Tamaru, H.: The space of left-invariant metrics — on a generalization of Milnor frames. In: *Proceedings of The Seventeenth International Workshop on Diff. Geom.* **17** (2013), 55–65.
- [8] Tamaru, H.: Group actions on symmetric spaces related to left-invariant geometric structures. In: *Development of group actions and submanifold theory*, RIMS Kokyuroku **1929** (2014), 1–12.
- [9] Tamaru, H.: The space of left-invariant Riemannian metrics. In: *Geometry and Topology of Manifolds*, Springer Proc. Math. Stat. **154** (2016), 315–326.
- [10] 田中真紀子, 田丸博士: 対称空間の幾何学 (執筆中).