サッカーの幾何学：変分法に基づくゴールキーパーの最適位置

田丸 博士

広島大学

北九州数理科学セミナー
(北九州工業高等専門学校)
2016/05/20

あらすじ (1/3)

- 田丸の専門は幾何学です.
- 今回は, サッカーの問題を数学的に考えます.

Based on

- 神垣 雅郁 (2006 年度卒業論文)
- 与儀 勉 (2007 年度卒業論文)
- 岡田 克哉 (2009 年度卒業論文)
- 柿木 悠輔 (2014 年度卒業論文)

例題

• S (shooter)

K (goalkeeper) •　どこが最適な K？

(goal)

あらすじ (3/3)

注意

今日の話では,

- ある程度限定された状況のみを考える.
- その上で, 最適位置を決定する.
  (その位置が最適であることを "証明" する)

この問題を考えるために必要なこと

"最適な位置" って何？

- 位置が "最適" であることを定義せよ.
- その定義に, 純粋数学のアイデアを用いる.
  (Keyword: 変分法, min-max 原理)

準備 (1/5)

まずは, 変分法などの“考え方” を紹介する.

例題

- 横から見たら放物線 $y = x^2$ の形の坂道がある.
- その上にボールを置く.
- 転がった後, ボールはどこに行くか？

素直な解答

- ボールは低い方に転がる.
- よって, $y = x^2$ の最小値を与える点に向かって, 最終的にそこで止まる.

(注: ひねくれた解答はいくらでも考えられる.)

準備 (2/5)

ひねくれた解答を許さないためには,
問題を数学的に正しく述べなくてはならない.

必要なこと 1: 舞台設定

ありうるボールの位置の全てを設定する:

- 今回は $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.
- 坂道から横に転げ落ちる, などは考えない.

必要なこと 2: 基準設定

ボールがどのような規則に従って動くかを設定する:

- 今回は「y が小さくなる方向に動く」
- 実は無重力・摩擦がとても大きい, などを排除.

準備 (3/5)

例題

針金で作った枠を石鹸水に浸ける．どんな膜がはるか？

例

別スライドで...

準備 (4/5)

舞台設定

- $\mathcal{M} := \{M :$ 与えられた枠を境界とする "曲面"$\}$

基準設定

- $F : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ を次で定義: $F(M) :=$ [M の表面積].
- 石鹸膜は, 表面積が小さくなるように変化する.

よって, 求める曲面 M は「$F(M)$ を "極小" にする」.

補足: 枠によっては, 実現される曲面が 2 つ以上かも.

準備 (5/5)

まとめ

問題を数学的に述べるためには, 以下が必要:

- 舞台設定:
  考えられる状態の全体 $\mathcal{M}$ という集合を考える.
- 基準設定:
  写像 $F : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ を考える.
  (F : 実現されやすさ. エネルギーと呼ぶことも.)

サッカーの平面幾何モデル (1/5)

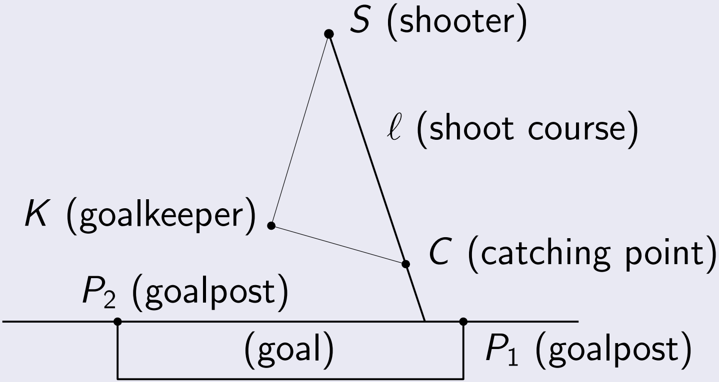
まずは舞台設定: “考える状態全体” を設定.

舞台設定 (ラフ)

今回は以下を考える:

- シューターがいる.
- キーパーが位置取りをする.
- シューターがシュートを撃つ.
- キーパーがそれを止めようとする.
  (他の選手は無視する.)

サッカーの平面幾何モデル (2/5)



サッカーの平面幾何モデル (3/5)

定義 (詳細な舞台設定)

$P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ を固定する.
次をみたす $\mathcal{M} := \{(S, K, \ell, C)\}$ を 平面幾何モデル:

- $S, K \in \mathbb{R}^2$.
- $\ell = SP$ (線分), ただし $P \in P_1P_2$.
- $C \in \ell$.

他, 細かい技術的な仮定も少しある (が省略).

平面幾何モデルでは, いろいろ簡略化している:

- 高さ, 人の幅, ボールの大きさなどは無視.
- シュートは直線だけ.

サッカーの平面幾何モデル (4/5)

舞台設定 $\mathcal{M} := \{(S, K, \ell, C)\}$ はできた．次は基準設定．

定義

次の $\mathrm{DR} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ を **距離比率函数**:

$$\mathrm{DR}(S, K, \ell, C) := \frac{|KC|}{|SC|} \ (\geqq 0).$$

注意

$\mathrm{DR}(S, K, \ell, C)$ は “ボールの取りやすさ” を表す:

- $|KC|$ が小さい $\Leftrightarrow$ ボールがキーパーの近く．
- $|SC|$ が大きい $\Leftrightarrow$ シューターが遠い．

サッカーの平面幾何モデル (5/5)

定義 (復習)

$$\mathrm{DR}(S, K, \ell, C) := \frac{|KC|}{|SC|} \ (\geqq 0).$$

コメント

以下のように考えていく:

- $\mathrm{DR}(S, K, \ell, C)$ が最小 $\Leftrightarrow$: キーパー目線で最適.
- $\mathrm{DR}(S, K, \ell, C)$ が最大 $\Leftrightarrow$: シューター目線で最適.

最適キャッチングポイント (1/3)

定義

(S, K, ℓ) が与えられているとする.
このとき $\ell \ni C_0$ が **最適キャッチングポイント**
$:\Leftrightarrow$ $\mathrm{DR}(S, K, \ell, C)$ が $C = C_0$ で最小.

注意

今は (S, K, ℓ) は与えられている (動かない) ので,

- C の動く範囲は線分の上のみ;
- よって, 実質的に 1 変数の函数の最小値の問題.

最適キャッチングポイント (2/3)

補題

$\triangle SKC$ に着目すると,

$$\mathrm{DR}(S, K, \ell, C) = \frac{|KC|}{|SC|} = \frac{\sin \angle S}{\sin \angle K}.$$

$(\because)$ 正弦定理より. $\square$

観察

(S, K, ℓ) が動かないので, $\angle S = \angle KSC = (\text{一定})$.

最適キャッチングポイント (3/3)

定理 1

(S, K, ℓ) に対して,

- C_0 が最適 $\Leftrightarrow \sin \angle K$ が最大.
- 特に, $\angle K = \angle SKC_0 = 90^\circ$ なら C_0 は最適.

定理 1 の言い換え

ゴールキーパーは, シュートに対して,

- シューターに正対して "真横" に動くのが最適.
- ただし, 真横ではゴールラインを割ってしまう場合は, ゴールライン上で取れるように動く.

最適シュートコース (1/4)

記号

C_0 を最適キャッチングポイントとして,

$$\begin{aligned} \mathrm{DR}(S, K, \ell) &:= \mathrm{DR}(S, K, \ell, C_0) \\ &= \min_{C \in \ell} \mathrm{DR}(S, K, \ell, C). \end{aligned}$$

定義

(S, K) に対し, ℓ_0 が **最適シュートコース**

$:\Leftrightarrow$ $\mathrm{DR}(S, K, \ell)$ が $\ell = \ell_0$ で最大.

最適シュートコース (2/4)

注意

(S, K) に対し, ℓ_0 が最適シュートコースとは,

$$\begin{aligned} \mathrm{DR}(S, K, \ell_0) &= \max_{\ell} \mathrm{DR}(S, K, \ell) \\ &= \max_{\ell} \min_{C} \mathrm{DR}(S, K, \ell, C). \end{aligned}$$

このような定式化を ミニマックス法 と呼ぶ.

最適シュートコース (3/4)

観察

$\triangle SKC$ に着目して,

$$\mathrm{DR}(S, K, \ell, C) = \frac{|KC|}{|SC|} = \frac{\sin \angle S}{\sin \angle K}.$$

キーパー K のポジションが “ある程度前” だとすると,

$$\max \sin \angle K = \sin \angle SKC_0 = \sin 90^\circ = 1.$$

よってその時には,

$$\mathrm{DR}(S, K, \ell) = \mathrm{DR}(S, K, \ell, C_0) = \sin \angle S.$$

最適シュートコース (4/4)

定理 2

K は "ある程度前" に居るとする．このとき，

- $\angle P_1SK > \angle P_2SK$ なら，$\ell = SP_1$ が最適シュート．
- $\angle P_1SK < \angle P_2SK$ なら，$\ell = SP_2$ が最適シュート．

定理 2 の言い換え

最適シュートコース
$=$ キーパーの位置の反対側のポストへのシュート．

主張は当たり前．一方で，それが証明できたということは，モデルが適切だったという状況証拠ともいえる．

キーパーの最適ポジション (1/3)

記号

ℓ_0 を最適シュートコースとして,

$$\begin{aligned}\mathrm{DR}(S, K) &:= \mathrm{DR}(S, K, \ell_0)\\ &= \max_{\ell} \mathrm{DR}(S, K, \ell).\end{aligned}$$

定義

S に対し, K_0 がキーパーの **最適ポジション**

$:\Leftrightarrow$ $\mathrm{DR}(S, K)$ が $K = K_0$ で最小.

キーパーの最適ポジション (2/3)

注意

S に対し, K_0 がキーパーの最適ポジションとは,

$$\begin{aligned} \mathrm{DR}(S, K_0) &= \min_K \mathrm{DR}(S, K) \\ &= \min_K \max_\ell \mathrm{DR}(S, K, \ell) \\ &= \min_K \max_\ell \min_C \mathrm{DR}(S, K, \ell, C). \end{aligned}$$

キーパーの最適ポジション (3/3)

証明は略すが, 前の計算より...

定理 3

S に対して, キーパーの最適ポジション K_0 は,

- $\angle P_1SK = \angle P_2SK$ であり,
- さらに K は "ある程度前".

定理 3 の言い換え

キーパーは, $\angle P_1SP_2$ の二等分線上に居るのが最適.
しかしゴールラインに張り付いていてはダメ.

発展 (1/5)

守備がキーパー＋ディフェンダーの場合

設定

- (S, K, ℓ, C) : 前と同じ.
- D : ディフェンダー.
- C' : ディフェンダーがボールに触ろうとする点.

定義

上の設定の下で, 次を **距離比率函数** と呼ぶ:

$$\mathrm{DR}(S, K, D, \ell, C, C') := \min\left\{\frac{|KC|}{|SC|}, \frac{|DC'|}{|SC'|}\right\}$$

発展 (2/5)

コメント

- 先の DR は,「キーパーとディフェンダーのどちらかはボールに触りやすい」ことを表す.
- 前と同様に考えると, 最適ポジション等が定義できる.

定理 (ラフ)

上のモデルにおいて, 最適ポジションは,

「キーパーとディフェンダーが左右をバランス良く守っている状態」

発展 (3/5)

もう少し具体的に言うと

シュートが撃たれようとしているとき,

- ディフェンダーは (完全にブロックできないなら) 少なくとも左右の片側を塞ぐべき.
- ディフェンダーが足を伸ばして, シュートが足の下を通ってキーパーが逆をつかれるのが最悪.

発展 (4/5)

シュートがカーブしてる場合
(キーパー 1 人で, モデルは同じように作れる)

定理

シュートがカーブのとき, 最適キャッチポイントは,

- カーブがキーパーから「離れていく」場合は, シューターに正対して真横より前.
- 逆の場合は, シューターに正対して真横より後ろ.

発展 (5/5)

予想

シューターの利き足が右で, カーブ回転のボールを蹴れる (シュート回転は無理) とする. このとき,

ゴール正面からよりも, 左サイド寄りからの方がシュートを決めやすい?

最後

まとめ

- 今回は, 数学の「変分法」のアイデアを用いて, サッカーを数学的に考えました.
- 引き続き考えるべき問題がいっぱいあります.

コメント

- 問題を数学に翻訳するところが, 本質的に難しい.
- しかし, 適切に翻訳することで, 数学はもっといろいろなことに使える... と嬉しいです.

Thank you!