平成 28 年度卒業論文

球面と射影空間におけるカンドル内の
極大可換な部分集合

広島大学理学部数学科
B134232 長舗美香
指導教員 田丸博士 教授

2017 年 2 月 10 日

はじめに

先行研究より, $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}\} \subset S^n$ は興味深い性質を持つ部分カンドルであることが知られている．本論文では, その中の可換性に注目しカンドル内の極大可換部分集合について調べた．結果として, 球面と射影空間内の極大可換な部分集合を決定した.

第一章では, カンドルの定義や例を紹介し, カンドルの基本的な性質についてまとめた.

第二章では, カンドル内の極大可換な部分集合を定義し, 球面と射影空間について調べた．さらに極大可換な部分集合が持つ性質について紹介した.

最後になりましたが, 本論文を書くにあたり, 指導教員の田丸博士先生, 奥田孝幸先生, 久保亮先生やゼミの先輩方にはご多忙の中多くのことを御指導して頂きました．この場を借りて深くお礼申し上げます.

目次

1　カンドル

1.1　カンドルの定義と例

この節では, カンドルの定義と例を紹介する. 以下 X を集合とする.

定義 1.1. X と二項演算 $*: X \times X \to X$ の組 $(X, *)$ が**カンドル** (quandle) であるとは, 以下が成り立つこと:

(Q1) $\forall x \in X, x * x = x$.

(Q2) $\forall x, y \in X, \exists! z \in X : z * y = x$.

(Q3) $\forall x, y, z \in X, (x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

集合 X から X への写像全体のなす集合を $\mathrm{Map}(X, X)$ で表す.

命題 1.2. 写像 $s : X \to \mathrm{Map}(X, X) : x \mapsto s_x$ を考え, $x * y := s_y(x)$ と定める. このとき, $(X, *)$ がカンドルになるための必要十分条件は, 以下が成り立つこと:

(S1) $\forall x \in X, s_x(x) = x$.

(S2) $\forall x \in X, s_x$ は全単射.

(S3) $\forall x, y \in X, s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

証明. (Q1) と (S1), (Q2) と (S2), (Q3) と (S3) がそれぞれ対応している. □

上の条件を満たす s を**カンドル構造**と呼ぶ. 以下では (X, s) でカンドルを表す. 本論文で使用するカンドルの例をいくつか紹介する.

例 1.3. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において, 次で定義される s はカンドル構造である:

$$s_x(y) := 2x - y.$$

証明. $(\mathbb{R}^n, s)$ が条件 (S1), (S2), (S3) を満たすことを示す. 条件 (S1) は s の定義より明らか. 条件 (S2) を示す. 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$(s_x \circ s_x)(y) = s_x(2x - y) = 2x - (2x - y) = y.$$

$s_x \circ s_x = \mathrm{id}$ より s_x は全単射である. 次に (S3) を示す. 任意の $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$(s_x \circ s_y)(z) = s_x(2y - z) = 2x - (2y - z) = 2x - 2y + z.$$
$$(s_{s_x(y)} \circ s_x)(z) = s_{2x-y}(2x - z) = 2(2x - y) - (2x - z) = 2x - 2y + z.$$

したがって, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$ となる. □

例 1.4. (**共役カンドル**) 群 G に対して, 次で定義される s はカンドル構造である:

$$s_x(y) := x^{-1}yx.$$

証明. (G, s) が条件 (S1), (S2), (S3) を満たすことを示す．条件 (S1) は s の定義より明らか．条件 (S2) を示す．任意の $x, y \in G$ に対して,

$$(s_x \circ s_{x^{-1}})(y) = s_x(xyx^{-1}) = x^{-1}(xyx^{-1})x = y.$$

同様に $(s_{x^{-1}} \circ s_x)(y) = y$. したがって, (S2) が言える．次に条件 (S3) を示す．任意の $x, y, z \in G$ に対して,

$$\begin{aligned}
&(s_x \circ s_y)(z) = s_x(y^{-1}zy) = x^{-1}y^{-1}zyx. \\
&(s_{s_x(y)} \circ s_x)(z) = s_{x^{-1}yx}(x^{-1}zx) = x^{-1}y^{-1}x(x^{-1}zx)x^{-1}yx = x^{-1}y^{-1}zyx.
\end{aligned}$$

したがって, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$ となる． □

定義 1.5. 任意の集合 X に対し, $s_x = \mathrm{id}\ (\forall x \in X)$ によってカンドル構造を定めたものを**自明カンドル**と呼ぶ.

証明. (X, s) がカンドルの条件 (S1), (S2), (S3) を満たすことは容易にわかる． □

例 1.6. 球面 S^n に通常の折り返しによって s を定めたものはカンドルである．ここで通常の折り返しは, 以下で与えられる:

$$s_x(y) := 2\langle x, y\rangle x - y.$$

証明. 条件 (S1) は明らか．条件 (S2) を示す．任意の $x, y \in S^n$ に対して,

$$\begin{aligned}
(s_x \circ s_x)(y) &= s_x(2\langle x, y\rangle x - y) \\
&= 2\langle x, 2\langle x, y\rangle x - y\rangle x - (2\langle x, y\rangle x - y) \\
&= 4\langle x, y\rangle\langle x, x\rangle x - 2\langle x, y\rangle x - 2\langle x, y\rangle x + y = y.
\end{aligned}$$

したがって (S2) が示せた．条件 (S3) も同様に内積の双線形性から言える． □

定義 1.7. 単位円 S^1 の n 等分の成す集合に, カンドル構造を上記の折り返しで定めたものを**二面体カンドル（dihedral quandle）**と呼び, R_n で表す.

1.2 準同型と同型

定義 1.8. $(X, s^X), (Y, s^Y)$ をカンドルとする．写像 $f : X \to Y$ が**準同型**であるとは, 次が成り立つこと:

$$\forall x \in X, f \circ s_x^X = s_{f(x)}^Y \circ f.$$

次の可換図式より準同型の条件は, 二項演算 $*$ を保つという条件と同値であることがわかる.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s^X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "s^Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

全単射な準同型写像を**同型写像**と呼ぶ. 二つのカンドルの間に同型写像が存在するとき, それらは**同型**であると言う.

例 1.9. 二面体カンドル R_n は, 集合 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に次でカンドル構造を定めたものと同型:

$$s_{[i]}([j]) := [2i - j].$$

証明. まず $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で定めた s が well-defined であることとカンドル構造であることを示す. 任意の $[i], [j], [x], [y] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ をとる. $i \sim j, x \sim y$ とする. ただし, 任意の $[a], [b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して, $a \sim b \Leftrightarrow a = nb$ である. このとき, $[2i - x] = [2nj - ny] = [2j - y]$. よって, s は well-defined である. カンドル構造であることは, 例 1.3 と同様に示すことができる.

次に, 二面体カンドルと $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が同型であることを示す. 次の写像を考える.

$$f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to R_n : [x] \mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi x}{n} \\ \sin \frac{2\pi x}{n} \end{pmatrix}.$$

f が well-defined であることと全単射であることは容易にわかる. したがって f が準同型であることを示す. 任意に $[x], [y] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ をとる.

$$\begin{aligned}
(s^{R_n}_{f([x])} \circ f)([y]) &= s^{R_n}_{f([x])}(\begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi y}{n} \\ \sin \frac{2\pi y}{n} \end{pmatrix}) \\
&= 2\langle \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi x}{n} \\ \sin \frac{2\pi x}{n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi y}{n} \\ \sin \frac{2\pi y}{n} \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi x}{n} \\ \sin \frac{2\pi x}{n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi y}{n} \\ \sin \frac{2\pi y}{n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(\cos \frac{2\pi x}{n})^2 \cos \frac{2\pi y}{n} + 2 \sin \frac{2\pi x}{n} \sin \frac{2\pi y}{n} \cos \frac{2\pi x}{n} - \cos \frac{2\pi y}{n} \\ 2 \cos \frac{2\pi x}{n} \cos \frac{2\pi y}{n} \sin \frac{2\pi x}{n} + 2(\sin \frac{2\pi x}{n})^2 \sin \frac{2\pi y}{n} - \sin \frac{2\pi y}{n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi x}{n} \cos \frac{2\pi y}{n} + \sin \frac{4\pi x}{n} \sin \frac{2\pi y}{n} \\ \sin \frac{4\pi x}{n} \cos \frac{2\pi y}{n} - \cos \frac{4\pi x}{n} \sin \frac{2\pi y}{n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi x - 2\pi y}{n} \\ \sin \frac{4\pi x - 2\pi y}{n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi(2x - y)}{n} \\ \sin \frac{2\pi(2x - y)}{n} \end{pmatrix} = (f \circ s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_{[x]})([y]).
\end{aligned}$$

□

命題 1.10. 準同型写像と準同型写像の合成は準同型である. また, 準同型写像が全単射の場合には, 逆写像も準同型である.

証明. $(X, s^X), (Y, s^Y), (Z, s^Z)$ をカンドル, f, g をそれぞれ X から Y, Y から Z への準同型とす

る．このとき, $g \circ f$ が準同型であることを示す．任意に $x \in X$ をとる．

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ s_x^X &= g \circ (f \circ s_x^X) \\ &= g \circ (s_{f(x)}^Y \circ f) \\ &= (g \circ s_{f(x)}^Y) \circ f \\ &= (s_{g(f(x))}^Z \circ g) \circ f \\ &= s_{g \circ f(x)}^Z \circ (g \circ f).\end{aligned}$$

したがって, 準同型の合成が準同型であることが言えた．次に f が同型写像であるとき f^{-1} が準同型であることを示す．任意に $y \in Y$ をとる．すると, $f^{-1}(y) \in X$ である．f は同型写像より,

$$f \circ s_{f^{-1}(y)}^X = s_{f \circ f^{-1}(y)}^Y \circ f = s_y^Y \circ f.$$

したがって, $f \circ s_{f^{-1}(y)}^X = s_y^Y \circ f$ となる．両側に f^{-1} を合成すると, $s_{f^{-1}(y)}^X \circ f^{-1} = f^{-1} \circ s_y^Y$ となり, 同型写像の逆写像が準同型であることが示せた． □

1.3 自己同型群と内部自己同型群

命題 1.10 から, 次が群になることが従う．

定義 1.11. カンドル (X, s) に対して, 次を**自己同型群**と呼ぶ．

$$\mathrm{Aut}(X, s) := \{f : X \to X : \text{同型写像}\}.$$

命題 1.12. 任意の $x \in X$ に対して, $s_x \in \mathrm{Aut}(X, s)$.

証明. 任意に $x \in X$ をとる．s_x が全単射かつ準同型であることを示せばよい．全単射であることはカンドルの定義の (S2) より明らかである．準同型であることは (S3) より従う． □

定義 1.13. 集合 $\{s_x \mid x \in X\}$ で生成される $\mathrm{Aut}(X, s)$ の部分群を**内部自己同型群**と呼び, $\mathrm{Inn}(X, s)$ で表す．

内部自己同型群と自己同型群は, 一般には異なる．

例 1.14. 自明カンドル (X, s) に対し, 自己同型群 $\mathrm{Aut}(X, s)$ は X 上の全単射全体の成す群, 内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(X, s)$ は単位元のみからなる群である．

証明. まず $\mathrm{Aut}(X, s) = \{f : X \to X \mid f \text{ は全単射}\}$ を示す．左辺が右辺に含まれていることは明らか. 逆の包含関係を示す．任意に $f \in \{f : X \to X \mid f \text{ は全単射}\}$ をとる．f は全単射なので準同型であることを示せばよい．任意の $x, y \in X$ に対して,

$$f \circ s_x^X(y) = f(y) = s_{f(x)}^Y \circ f(y).$$

したがって f は準同型写像である．次に $\mathrm{Inn}(X, s) = \{\mathrm{id}\}$ を示す．$\{s_x \mid x \in X\} = \{\mathrm{id}\} \subset \{\mathrm{id}\}$

かつ $\{\mathrm{id}\}$ は $\mathrm{Aut}(X,s)$ の部分群. また, $\{s_x \mid x \in X\} = \{\mathrm{id}\}$ を含む $\mathrm{Aut}(X,s)$ の任意の部分群 K に対して $\{\mathrm{id}\} \subset K$ である. 以上より $\mathrm{Inn}(X,s) = \{\mathrm{id}\}$ が示せた. □

補題 1.15. G を群, M を G の部分集合, H を M を含む G の部分群とする. このとき H の任意の元 h に対して, $h = g_1^{\pm 1} \cdots g_m^{\pm 1}$ を満たすような $g_1, \ldots, g_m \in M$ が存在するならば, $\langle M \rangle = H$ である.

証明. $\langle M \rangle$ は M を含む最小の部分群であるから, $\langle M \rangle \subset H$ は明らかである. $H \subset \langle M \rangle$ を示す. 任意に $h \in H$ をとる. 仮定より $h = g_1^{\pm 1} \cdots g_m^{\pm 1}$ を満たす $g_1, \ldots, g_m \in M$ が存在する. $g_1, \ldots, g_m \in \langle M \rangle$ であり, $\langle M \rangle$ は M を含む部分群だから, $h = g_1^{\pm 1} \cdots g_m^{\pm 1} \in \langle M \rangle$ である. □

例 1.16. R_3 の内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(R_3, s) = \{\mathrm{id}, s_0, s_1, s_2, s_1 \circ s_2, s_2 \circ s_1\}$ である. ただし, 正三角形の頂点のひとつを 0 とし, そこから反時計回りに 1, 2 とする.

証明. $\{f : R_3 \to R_3 \mid 全単射\}$ は群であり, $\{s_0, s_1, s_2\} \subset \{f : R_3 \to R_3 \mid 全単射\}$ である. また, $\{\mathrm{id}, s_0, s_1, s_2, s_1 \circ s_2, s_2 \circ s_1\}$ は $\{s_0, s_1, s_2\}$ を含む $\{f : R_3 \to R_3 \mid 全単射\}$ の部分群である. 任意の $s \in \{\mathrm{id}, s_0, s_1, s_2, s_1 \circ s_2, s_2 \circ s_1\}$ は s_0, s_1, s_2 の合成でかけるから, 補題 1.15 より $\mathrm{Inn}(R_3, s) = \langle \{s_0, s_1, s_2\} \rangle = \{\mathrm{id}, s_0, s_1, s_2, s_1 \circ s_2, s_2 \circ s_1\}$ である. □

1.4 部分カンドル

定義 1.17. カンドル (X,s) に対して, 部分集合 $M \subset X$ が**部分カンドル**であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in M, s_x(M) \subset M, s_x^{-1}(M) \subset M$.

命題 1.18. 部分カンドルはカンドルである.

証明. (X,s) をカンドル, $M \subset X$ を X 内の部分カンドルとする. このとき, $s\,|_M$ がカンドル構造の条件 (S1), (S2), (S3) を満たすことは容易にわかる. □

例 1.19. R_n は S^1 の部分カンドルである.

証明. R_n は S^1 のカンドル構造に関して閉じていることから従う. □

2　極大可換な部分集合

2.1　極大可換の定義

定義 2.1. (X,s) をカンドルとする．このとき, 以下の条件を満たす $A \subset X$ を**可換**であるという:

$$\forall a, b \in A, s_a \circ s_b = s_b \circ s_a.$$

$A \subset X$ が極大可換であるとは, 可換でありかつ, 可換であることに関して極大であるということである．カンドル内の極大可換な部分集合の性質を紹介する．

命題 2.2. カンドル (X,s) に対して $A \subset X$ が極大可換でかつ $f \in \mathrm{Aut}(X,s)$ ならば, $f(A) \subset X$ も極大可換である．

証明. $f(A)$ が極大可換であることを示す．まず可換であることを示す．任意の $a, b \in f(A)$ をとる．このとき, $a = f(a'), b = f(b')$ となるような $a', b' \in A$ が存在する．f は準同型より,

$$\begin{aligned} s_a \circ s_b &= s_{f(a')} \circ s_{f(b')} \\ &= (f \circ s_{a'} \circ f^{-1}) \circ (f \circ s_{b'} \circ f^{-1}) \\ &= f \circ s_{a'} \circ s_{b'} \circ f^{-1} \\ &= f \circ s_{b'} \circ s_{a'} \circ f^{-1} \\ &= (f \circ s_{b'} \circ f^{-1}) \circ (f \circ s_{a'} \circ f^{-1}) \\ &= s_{f(b')} \circ s_{f(a')} \\ &= s_b \circ s_a. \end{aligned}$$

次に極大であることを示す．$p \in X$ とし, $\{p\} \cup f(A)$ が可換であるとする．このとき $p \in f(A)$ を示せばよい．$f \in \mathrm{Aut}(X,s)$ より, $p = f(q)$ を満たす $q \in X$ が存在する．$q \in A$ を示す．任意の $a \in A$ に対して, f が準同型より上の証明と同様にして, $s_a \circ s_q = \mathrm{s}_q \circ s_a$ となる．したがって, $\{q\} \cup A$ は可換であり A は極大なので, $q \in A$ を得る． □

補題 2.3. (X,s) をカンドル, $A \subset X$ を極大可換とする．このとき, $a \in A$ かつ $s_a = s_b$ ならば $b \in A$ である．

証明. $a \in A$, $s_a = s_b$ とする．任意の $x \in A$ に対して,

$$s_b \circ s_x = s_a \circ s_x = s_x \circ s_a = s_x \circ s_b.$$

したがって $\{b\} \cup A$ は可換であり, A は極大より $b \in A$. □

命題 2.4. (X,s) をカンドル, $A \subset X$ は極大可換とする．このとき, A は X 内の部分カンドルである．

証明. 示すことは任意の $a \in A$ に対して, $s_a(A) \subset A, s_a^{-1}(A) \subset A$ である．任意に $a, b \in A$ をと

る．可換性とカンドルの定義より，

$$s_b \circ s_a = s_a \circ s_b = s_{s_a(b)} \circ s_a.$$

両端に右側から s_a^{-1} を作用させると，$s_b = s_{s_a(b)}$ となる．補題 2.3 より $s_a(b) \in A$．よって $s_a(A) \subset A$ が言えた．同様に，カンドルの定義と可換性より，

$$s_a \circ s_{s_a^{-1}(b)} = s_{s_a(s_a^{-1}(b))} \circ s_a = s_b \circ s_a = s_a \circ s_b.$$

したがって，$s_b = s_{s_a^{-1}(b)}$．補題 2.3 より $s_a^{-1}(b) \in A$ が成り立つので，$s_a^{-1}(A) \subset A$ である． □

2.2 球面の場合

球面の場合の極大可換な部分集合について考える．以下では (S^n, s) をカンドルとみなす．

補題 2.5. $x, y \in S^n$ とする．このとき，$s_x = s_y$ となる必要十分条件は $x = \pm y$ である．

証明. $x, y \in S^n$ とする．十分性 ($\Leftarrow$) を示す．$x = \pm y$ と仮定する．このとき任意の $z \in S^n$ に対して，

$$s_x(z) = 2\langle x, z\rangle x - z = 2\langle \pm y, z\rangle(\pm y) - z = 2\langle y, z\rangle y - z = s_y(z).$$

必要性 ($\Rightarrow$) を示す．$s_x = s_y$ とする．任意の $p \in S^n$ に対して，$2\langle x, p\rangle x - p = 2\langle y, p\rangle y - p$．つまり x は y の定数倍であり，$x, y \in S^n$ より，$x = \pm y$． □

補題 2.6. $A \subset S^n$ を極大可換であるとする．このとき，以下が成り立つ:

(1) $x, y \in A \Rightarrow s_x(y) = \pm y$.

(2) $x \in A \Rightarrow -x \in A$.

証明. (1) から示す．$x, y \in A$ とする．カンドルの定義と可換性より $s_y = s_{s_x(y)}$ が成り立つ．補題 2.5 から $s_x(y) = \pm y$.

(2) を示す．補題 2.5 より，$s_a = s_{-a}$．$a \in A$ だから，補題 2.3 より $-a \in A$． □

補題 2.7. $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}\} \subset S^n$ は極大可換である．

証明. 可換性から示す．任意の $e_i, e_j \in \{\pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}\}, x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$ に対して，

$$s_{e_i} \circ s_{e_j}(x) = s_{e_i}(-x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_j, \ldots, -x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, -x_j, \ldots, x_{n+1}).$$
$$s_{e_j} \circ s_{e_i}(x) = s_{e_j}(-x_1, \ldots, x_i, \ldots, -x_j, \ldots, -x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, -x_j, \ldots, x_{n+1}).$$

次に極大性を示す．$p = (p_1, \ldots, p_{n+1}) \in S^n$ とし，$\{p\} \cup \{\pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}\}$ が可換であるとする．このとき可換性とカンドルの定義より $s_{s_{e_1}(p)} = s_p$ が成立する．補題 2.5 より $s_{e_1}(p) = \pm p$. よって $p = \pm e_1, (0, p_2, \ldots, p_{n+1})$ となる．ただし $p_2^2 + \cdots + p_{n+1}^2 = 1$ である．$p = \pm e_1$ のとき $p \in \{\pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}\}$．$p = (0, p_2, \ldots, p_{n+1})$ のときを考える．同様に可換性とカンド

ルの定義より $s_{s_{e_2}(p)} = s_p$ が成り立つ．つまり $p = \pm e_2, (0, 0, p_3, \ldots, p_{n+1})$ となる．ただし，$p_3^2 + \cdots + p_{n+1}^2 = 1$. これを繰り返して，$p = \pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}$ となり，$p \in \{\pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}\}$ を得る． □

補題 2.8. 任意の $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底 $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ に対して，$\{\pm v_1, \ldots, \pm v_{n+1}\} \subset S^n$ は極大可換である．

証明. 可換性から示す．任意の $a, b \in \{\pm v_1, \ldots, \pm v_{n+1}\}$ に対して，$s_a \circ s_b = s_b \circ s_a$ を示す．$a = b$ のときは明らか，$a = -b$ のときは補題 2.5 より従う．a と b が直交するとき，

$$s_a \circ s_b(x) = 4\langle a, b\rangle\langle b, x\rangle b - 2\langle a, x\rangle a - 2\langle b, x\rangle b + x.$$
$$s_b \circ s_a(x) = 4\langle b, a\rangle\langle a, x\rangle a - 2\langle b, x\rangle b - 2\langle a, x\rangle a + x.$$

上記の式のそれぞれの右辺の第一項について，a と b が直交しているので $\langle a, b\rangle = 0$. よって可換性が言えた．次に極大性を示す．$p \in S^n$ とし $\{p\} \cup \{\pm v_1, \ldots, \pm v_{n+1}\}$ が可換であるとする．このとき，$s_{v_i}(p) = p$ を満たす i があることを背理法で示す．任意の i に対して，$s_{v_i}(p) \neq p$ とする．すると，$s_{v_i}(p) = -p$ となり，p は $v_1, \ldots, v_{n+1}$ と 直交する．つまり $p = 0$ となり，$p \in S^n$ に矛盾する．したがって，$s_{v_i}(p) = p$ を満たす i が存在し，このとき $p = \pm v_i$ だから $p \in S^n$ が言えた． □

補題 2.9. $A \subset S^n$ が極大可換であるとする．このとき，$A = \{\pm v_1, \ldots, \pm v_{n+1}\}$ となるような $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底 $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ が存在する．

証明. $v_1 \in A$ とする．補題 2.6(2) より $-v_1 \in A$. よって $\{\pm v_1\} \subset A$ である．$\{\pm v_1\}$ に，$\langle v_1, q\rangle = 0$ を満たすような $q \in S^n$ を付け加えると，$\{\pm v_1, q\}$ は可換となるため，$\{\pm v_1\}$ は極大でない．よって，$A \neq \{\pm v_1\}$. つまり，$\{\pm v_1\}$ には属さない $a \in A$ が存在する．任意に $v_2 \in A \backslash \{\pm v_1\}$ をとる．$v_1, v_2 \in A$ なので補題 2.6(1) から $s_{v_1}(v_2) = \pm v_2$ である．$v_2 \neq \pm v_1$ なので，v_2 は v_1 と直交する．補題 2.6(2) より $-v_2 \in A$. この操作を繰り返すと，$\{\pm v_1, \ldots, \pm v_{n+1}\} \subset A$ となり，補題 2.8 より $\{\pm v_1, \ldots, \pm v_{n+1}\}$ は極大なので，$A = \{\pm v_1, \ldots, \pm v_{n+1}\}$ となる． □

補題 2.10. 直交群 $O(n+1)$ が S^n に作用しているとする．このとき，$O(n+1) \subset \mathrm{Aut}(S^n, s)$ である．

証明. 任意の $g \in O(n+1)$ をとる．g が全単射かつ準同型であることを示す．$g \in O(n+1)$ より，$g^{-1} = {}^t g$ であることから g は全単射である．次に準同型であることを示す．任意の $x, y \in S^n$ に対して，

$$(s_{g(x)} \circ g)(y) = s_{gx}(gy) = (2\langle gx, gy\rangle gx - gy) = g(2\langle x, y\rangle x - y) = (g \circ s_x)(y).$$

したがって，g は準同型であるから，$g \in \mathrm{Aut}(S^n, s)$ が示せた． □

定理 2.11. $A \subset S^n$ が極大可換であるとする．このとき，$f(A) = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}\}$ となる $f \in \mathrm{Aut}(S^n, s)$ が存在する．

証明. A は極大可換なので, $A = \{\pm v_1, \ldots, \pm v_{n+1}\}$ と表すことができる. ただし, $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底である. 直交群 $O(n+1) \subset \mathrm{Aut}(S^n, s)$ かつ $f \in O(n+1)$ は正規交基底を正規直交基底に移す性質を持つので, $f(A) = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}\}$ をみたす $f \in O(n+1) \subset \mathrm{Aut}(S^n, s)$ が存在する. □

命題 2.2 と定理 2.11 より S^n 内の極大可換な部分集合は $\mathrm{Aut}(S^n, s)$ で移りあうので, 一意であることがわかる.

2.3 射影空間の場合

射影空間の場合の極大可換な部分集合について考える. 最初に射影空間を定義しカンドル構造を入れる.

補題 2.12. 次で定める $\sim$ は S^n 上の同値関係である:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y.$$

証明. $\sim$ が反射律, 対称律, 推移率を満たすことを示すのは容易である. □

定義 2.13. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := S^n / \sim$ を**射影空間**という.

定義 2.14. 球面 $(S^n, \bar{s})$ をカンドルとする. このとき, 射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ に s を以下で定めるとカンドル構造になる:

$$s_{[x]} : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n : [y] \mapsto [\bar{s}_x(y)] \ ([x], [y] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n).$$

証明. s が well-defined であることと, カンドル構造の条件 (S1), (S2), (S3) を満たすことを示せばよい. まず, well-defined を示す. $[a], [b] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $a \sim b$ とする. このとき任意の $[x] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ に対して,

$$2\langle a, x\rangle a - x = 2\langle \pm b, x\rangle(\pm b) - x = 2\langle b, x\rangle b - x.$$

$[y], [z] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $y \sim z$ とする. このとき任意の $[c] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ に対して,

$$2\langle c, y\rangle c - y = 2\langle c, \pm z\rangle c - (\pm z) = \pm(2\langle c, z\rangle c - z).$$

よって s は well-defined である.

次に, カンドル構造であることを示す. (S1), (S2) は明らか. (S3) のみ示す. 任意に $[x], [y], [z] \in$

$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ をとる.

$$\begin{aligned}
s_{[x]} \circ s_{[y]}([z]) &= s_{[x]}([\bar{s}_y(z)]) \\
&= s_{[x]}([2\langle y, z\rangle y - z]) \\
&= [2\langle x, 2\langle y, z\rangle y - z\rangle x - 2\langle y, z\rangle y + z] \\
&= [4\langle x, y\rangle\langle y, z\rangle x - 2\langle x, z\rangle x - 2\langle y, z\rangle y + z]. \\
s_{s_{[x]}([y])} \circ s_{[x]}([z]) &= s_{[2\langle x,y\rangle x - y]}([\bar{s}_x(z)]) \\
&= [2\langle 2\langle x, y\rangle x - y, 2\langle x, z\rangle x - z\rangle(2\langle x, y\rangle x - y) - 2\langle x, z\rangle x + z] \\
&= [2(4\langle x, y\rangle\langle x, z\rangle\langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle\langle x, z\rangle - 2\langle x, z\rangle\langle y, x\rangle + \langle y, z\rangle)(2\langle x, y\rangle x - y) \\
&\quad - 2\langle x, z\rangle x + z] \\
&= [4\langle y, z\rangle\langle x, y\rangle x - 2\langle y, z\rangle y - 2\langle x, z\rangle x + z].
\end{aligned}$$

したがって (S3) が示された. □

補題 2.15. $(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, s)$ をカンドルとする. 直交群 $O(n+1)$ が $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ に作用しているとする. このとき, $O(n+1) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, s)$ である.

証明. 球面の場合の証明と同様にすればよい. □

以下, $(S^1, \bar{s}), (\mathbb{R}\mathrm{P}^1, s)$ をカンドルとする.

補題 2.16. $x, y \in S^1$ とする. $\bar{s}_x = -\bar{s}_y$ となる必要十分条件は $\langle x, y\rangle = 0$ である.

証明. 必要性 ($\Rightarrow$) から示す. 任意の $p \in S^1$ に対して $\bar{s}_x(p) = -\bar{s}_y(p)$ なので, $p = x$ とすると,

$$x = \bar{s}_x(x) = -\bar{s}_y(x) = -2\langle y, x\rangle y + x.$$

したがって, $\langle x, y\rangle y = 0$ より $\langle x, y\rangle = 0$ である. 次に, 十分性 ($\Leftarrow$) を示す. $\langle x, y\rangle = 0$ とする. $x = (a, b)$ と表すと, $y = \pm(-b, a)$ と表すことができる. ただし, $a^2 + b^2 = 1$ である. $y = (-b, a)$ のとき, 任意の $p = (p_1, p_2) \in S^1$ に対して

$$\begin{aligned}
\bar{s}_x(p) &= 2\langle x, p\rangle x - p = 2(ap_1 + bp_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2a^2p_1 + 2abp_2 - p_1 \\ 2abp_1 + 2b^2p_2 - p_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(1-b^2)p_1 + 2abp_2 - p_1 \\ 2abp_1 + 2(1-a^2)p_2 - p_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2b^2p_1 + 2abp_2 + p_1 \\ 2abp_1 - 2a^2p_2 + p_2 \end{pmatrix} \\
&= -2(-bp_1 + ap_2)\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = -2\langle y, p\rangle y + p = -\bar{s}_y(p).
\end{aligned}$$

$\bar{s}_{(-b,a)} = \bar{s}_{(b,-a)}$ なので, $\bar{s}_x = -\bar{s}_y$ が言えた. □

補題 2.17. $\{v_1, v_2\}$ を $\mathbb{R}^2$ の任意の正規直交基底とする. このとき, $\{[v_1], [v_2], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 +$

$v_2)], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2)]\} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ は極大可換である.

証明. 可換性から示す. 任意に $[a], [b] \in \{[v_1], [v_2], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2)]\}$ をとる. $[a] = [v_1], [b] = [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)]$ とする. このとき, $\langle \bar{s}_a(b), b\rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)\rangle = 0$. よって補題 2.16 より, $\bar{s}_{\bar{s}_a(b)} = -\bar{s}_b$ が成り立つ. つまり, $s_{s_{[a]}([b])} = s_{[b]}$ である. 両辺に $s_{[a]}$ を右から作用させると, カンドルの定義より,

$$s_{[b]} \circ s_{[a]} = s_{s_{[a]}([b])} \circ s_{[a]} = s_{[a]} \circ s_{[b]}.$$

他の場合も同様にやると可換性が言える. 次に極大性を示す. $[p] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ とし $\{[p]\} \cup \{[v_1], [v_2], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2)]\}$ は可換であるとする. このときカンドルの定義と可換性から $s_{s_{[v_1]}([p])} = s_{[p]}$, つまり $\bar{s}_{\bar{s}_{v_1}(p)} = \pm\bar{s}_p$ が成立する. $\bar{s}_{\bar{s}_{v_1}(p)} = \bar{s}_p$ のとき $p = \pm v_1, \pm v_2$ となり, $\bar{s}_{\bar{s}_{v_1}(p)} = -\bar{s}_p$ のとき $\langle \bar{s}_{v_1}(p), p\rangle = 0$, すなわち $p = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2), \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2)$ となる. いずれの場合も, $[p] \in \{[v_1], [v_2], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2)]\}$ である. □

補題 2.17 より, $\{[e_1], [e_2], [(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})], [(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})]\} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ が極大可換であることがわかる.

補題 2.18. $A \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ が極大可換ならば, $A = \{[v_1], [v_2], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2)]\}$ となるような $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底 $\{v_1, v_2\}$ が存在する.

証明. $A \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ を極大可換とする. $[v_1] \in A$ をとる. $\{[v_1]\}$ に $\langle v_1, a\rangle = 0$ を満たす $[a] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ を付け加えると, $\{[v_1], [a]\}$ は可換になるので $\{[v_1]\}$ は極大ではない. したがって $\{[v_1]\} \neq A$ である. $[p] \in A \setminus \{[v_1]\}$ をとる. $[p], [v_1] \in A$ であり $p \neq \pm v_1$ より, $(1)\langle p, v_1\rangle = 0$ または, $(2)\langle \bar{s}_{v_1}(p), p\rangle = 0$ である. (1) のとき, $p = v_2$ とする. $\{[v_1], [v_2]\}$ は極大ではないので, $[q] \in A \setminus \{[v_1], [v_2]\}$ がとれる. $q \neq \pm v_1, \pm v_2$ なので, $\langle \bar{s}_{v_i}(q), q\rangle = 0$ である $(i = 1, 2)$. このとき $q = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2), \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2)$ となる. $q = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)$ のとき, $\{[v_1], [v_2], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)]\}$ は極大ではないので同様に考えると, $\{[v_1], [v_2], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2)]\} \subset A$ となり, 補題 2.17 より, $A = \{[v_1], [v_2], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2)]\}$ である. (2) も (1) と同様にすればよい. □

定理 2.19. $A \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ は極大可換であるとする. このとき, $f(A) = \{[e_1], [e_2], [(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})], [(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})]\}$ となるような $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}\mathrm{P}^1, s)$ が存在する.

証明. $A \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ は極大可換なので, 補題 2.18 より $A = \{[v_1], [v_2], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)], [\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2)]\}$ となるような $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底 $\{v_1, v_2\}$ が存在する. 直交群 $O(2)$ は正規直交基底を正規直交基底に移し, 補題 2.15 より $O(2) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{R}\mathrm{P}^1, s)$ なので, $f(A) = \{[e_1], [e_2], [(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})], [(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})]\}$ となるような $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}\mathrm{P}^1, s)$ が存在する. □

命題 2.2 と定理 2.19 より, $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ 内の極大可換な部分集合は自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}\mathrm{P}^1, s)$ で移りあうので一意であることが言えた.

以下では $n \geq 2$ とし, $(S^n, \bar{s})$, $(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, s)$ をカンドルとみなす.

補題 2.20. $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の任意の正規直交基底とする. このとき $\{[v_1], \ldots, [v_{n+1}]\} \subset$

$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は極大可換である.

証明. 可換性から示す. 任意の $[a], [b] \in \{[v_1], \ldots, [v_{n+1}]\}, [x] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ に対して,

$$(s_{[a]} \circ s_{[b]})([x]) = [\bar{s}_a \circ \bar{s}_b(x)] = [\bar{s}_b \circ \bar{s}_a(x)] = (s_{[b]} \circ s_{[a]})([x]).$$

よって $\{[v_1], \ldots, [v_{n+1}]\} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の可換性が言えた. 次に極大性を示す. $[p] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ かつ $\{[p]\} \cup \{[v_1], \ldots, [v_{n+1}]\}$ が可換であると仮定する. このとき, カンドルの定義と可換性より $s_{s_{[v_i]}([p])} = s_{[p]}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ が成り立つ. つまり, $\bar{s}_{\bar{s}_{v_i}(p)} = \pm \bar{s}_p$ である. このとき, $\bar{s}_{\bar{s}_{v_i}(p)}, -\bar{s}_p$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ から $\mathbb{R}^{n+1}$ の線型写像とみると, $\bar{s}_{\bar{s}_{v_i}(p)}$ は固有値 1 を 1 個, -1 を n 個持つ. 一方, $-\bar{s}_p$ は固有値 1 を n 個, -1 を 1 個持つので, $\bar{s}_{\bar{s}_{v_i}(p)} \neq -\bar{s}_p$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ である. したがって, $\bar{s}_{\bar{s}_{v_i}(p)} = \bar{s}_p$ つまり $\bar{s}_{v_i}(p) = \pm p$ を得る. このとき, $\{p\} \cup \{\pm v_1, \ldots, \pm v_{n+1}\}$ が可換となり補題 2.8 より, $\{\pm v_1, \ldots, \pm v_{n+1}\}$ は極大だから, $p \in \{\pm v_1, \ldots, \pm v_{n+1}\}$ がわかる. よって $[p] \in \{[v_1], \ldots, [v_{n+1}]\}$ が言えた. □

この補題から, $\{[e_1], \ldots, [e_{n+1}]\} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ が極大可換であることがわかる.

補題 2.21. $\pi : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n : p \mapsto [p]$ を自然な射影とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $A \subset S^n$ が可換ならば, $\pi(A) \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は可換である.

(2) $B \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ が極大可換ならば, $\pi^{-1}(B) \subset S^n$ は極大可換である.

証明. (1) から示す. $A \subset S^n$ が可換であるとする. 任意に $a, b \in \pi(A)$ をとる. このとき, $a = \pi(a'), b = \pi(b')$ となるような $a', b' \in A$ が存在する. 任意の $[x] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ に対して,

$$(s_a \circ s_b)([x]) = [\bar{s}_{a'} \circ \bar{s}_{b'}(x)] = [\bar{s}_{b'} \circ \bar{s}_{a'}(x)] = (s_b \circ s_a)([x]).$$

したがって $s_a \circ s_b = s_b \circ s_a$ である.

(2) を示す. $B \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ が極大可換であるとする. $\pi^{-1}(B)$ の可換性を示す. 任意に $a, b \in \pi^{-1}(B)$ をとる. $\pi(a) = [a], \pi(b) = [b] \in B$ である. $B \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は可換だから, $s_{[a]} \circ s_{[b]} = s_{[b]} \circ s_{[a]}$ が成り立つ. これより, $b = \pm a$ または $\langle a, b \rangle = 0$ である. このとき, $\bar{s}_a \circ \bar{s}_b = \bar{s}_b \circ \bar{s}_a$ が成り立つ. 次に極大性について示す. $p \in S^n$ として, $\{p\} \cup \pi^{-1}(B)$ が可換であるとする. このとき, (1) と π の全射性より, $\{\pi(p)\} \cup \pi(\pi^{-1}(B)) = \{\pi(p)\} \cup B$ は可換である. B は極大より, $\pi(p) \in B$ つまり, $p \in \pi^{-1}(B)$ である. □

補題 2.22. $A \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ が極大可換であるとする. このとき, $A = \{[v_1], \ldots, [v_{n+1}]\}$ となるような $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底 $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ が存在する.

証明. $A \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ が可換なので, 補題 2.21(2) より, $\pi^{-1}(A) \subset S^n$ は可換である. したがって, 補題 2.9 から $\pi^{-1}(A) = \{\pm v_1, \ldots, \pm v_{n+1}\}$ となるような $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底 $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ が存在する. π は全射なので, $A = \pi(\pi^{-1}(A)) = \pi(\{\pm v_1, \ldots, \pm v_{n+1}\}) = \{[v_1] \ldots, [v_{n+1}]\}$ となる. □

定理 2.23. $A \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ が極大可換であるとする. このとき, $f(A) = \{[e_1], \ldots, [e_{n+1}]\}$ を満たす

$f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, s)$ が存在する.

証明. $A \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ が可換なので, 補題 2.22 より $A = \{[v_1], \ldots, [v_{n+1}]\}$ なるような $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底 $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ が存在する. 直交群 $O(n+1)$ は正規直交基底を正規直交基底に移す性質を持ち, 補題 2.15 より $O(n+1) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, s)$ だから, $f(A) = \{[e_1], \ldots, [e_{n+1}]\}$ を満たすような $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, s)$ が存在する. □

命題 2.2 と定理 2.23 より, $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 内の極大可換な部分集合は $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, s)$ で移りあうので, 一意であることがわかった.

参考文献

[1] 田丸 博士, 集合としての対称空間, preprint.

[2] 田丸 博士, 離散的対称空間論とカンドル, 大阪市立大学集中講義資料, 2013.

[3] 古木 好, 頂点推移的なグラフと等質な平坦カンドル, 平成 28 年度修士論文.