幾何学と不変量

田丸 博士

広島大学

先端数学 2016/07/22

概要

今日の内容

- 「不変量」の考え方を紹介する.

効用

- 不変量は, 数学のほぼ全分野に登場する「定石」.
- これを知ることは「見通しの良さ」に繋がります.

不変量 (1/10)

問題:

- $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$ (線型同型でない) を示せ.

類題:

以下をどうやって示せば良いか？

- 半径の違う円は合同ではない.
  (回転・平行移動・折り返しの合成で移れない)
- 三葉結び目は連続変形してもほどけない.

不変量 (2/10)

$\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$ の証明:

- 一般に $V \cong W$ ならば $\dim V = \dim W$.
- ところが $\dim \mathbb{R} = 1 \neq 2 = \dim \mathbb{R}^2$. よって $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$.

まとめると...

- ポイントは「$V \cong W$ ならば $\dim V = \dim W$」.
- つまり, 線型同型なら次元は変わらない.
- これを「次元は線型同型に関する不変量」と言う.

不変量 (3/10)

一般的な状況設定:

X を集合とする. (例: 線型空間全体)
X 上に「同じ」という概念がある. (例: 線型同型)
(正確には, X 上に同値関係 $\sim$ が与えられている)

定義:

写像 $f : X \to Y$ が, 上の「同じ」に関する 不変量
:$\Leftrightarrow$ 「x と x' が同じ $(x \sim x')$ ならば $f(x) = f(x')$」

不変量 (4/10)

例:

血液型は, 人間に関する不変量. つまり,

- X := { 人間全体 }.
- $b : X \to \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{O}, \mathrm{AB}\}$, $b(x)$:= [x 氏の血液型].
- このとき, $x = x'$ (同一人物) ならば $b(x) = b(x')$.

それがどうした？

- X = { 人間全体 } はとても複雑.
- それと比較すると $Y := \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{O}, \mathrm{AB}\}$ は簡単.
- 難しい X を, 簡単な Y の話に帰着できる... かも

不変量 (5/10)

応用例パターン 1:

同一人物判定ができる:

- x_0 : 犯人 (特定できないが $b(x_0)$ が分かっている).
- x_1 : 容疑者.
- このとき, $b(x_0) \neq b(x_1)$ ならば $x_0 \neq x_1$.

応用例パターン 2:

血液型占いができる:

- $b(x)$ から x の情報を得ることができる (かも).
- 例えば, $b(x) = \mathrm{A}$ ならば x さんは几帳面, ...

不変量 (6/10)

例: 三角形.

設定:

- $X :=$ {(平面内の) 三角形全体 }.
- 二つの三角形が同じ: 合同, または相似.

命題:

以下は三角形の相似に関する不変量:

- 三角の大きさ, 三辺の長さの比率, ...

以下は三角形の合同に関する不変量:

- 面積, 三辺の長さ, ...

不変量 (7/10)

例: 三角形 (続き).

応用例:

占いパターン

- 三角形の三辺の長さが分かると, 面積が計算できる. (ヘロンの公式)

観察:

例えば, 三角形の三角の大きさから面積を求める公式などは, あり得ない.

不変量 (8/10)

例: 行列.

設定:

- $M(n,\mathbb{R}) := \{X : n \times n$ 実行列$\}$.
- X と Y が **共役** $:\Leftrightarrow \exists g$ (可逆行列) : $gXg^{-1} = Y$.

命題:

以下は共役に関する不変量:

- 行列式 $\det(X)$, 階数 $\mathrm{rank}(X)$, トレース $\mathrm{tr}(X)$.

応用 (占いパターーン):

- $\det(X) \neq 0$ ならば, 行列 X は可逆.

例: オイラー標数 $\mathcal{X}(M)$.

定義:

- M : 多面体 :⇔ 平面に囲まれた立体.
- $\mathcal{X}(M) :=$ 頂点の数 − 辺の数 + 面の数.

定理:

- $\mathcal{X}(M)$ は位相同型に関する不変量.

系 (オイラーの多面体定理):

- M : 穴のない多面体 $\Rightarrow \mathcal{X}(M) = 2$.

不変量 (10/10)

コメント:

- このように, 数学で登場する量は, ほぼ全て不変量.

レポート問題 1:

- 不変量の例を挙げ, それを説明せよ.
  (どういう同値関係に関する不変量か, どんな応用があるか, ...)

曲線の曲率 (1/11)

平面曲線の「曲率」という不変量を紹介する.

概略:

- 対象: 平面内のなめらかな曲線.
- 同じ: 回転と平行移動で移り合うものは同じ.
- 不変量: 曲率 (曲がり具合を表すもの).

曲線の曲率 (2/11)

対象は, 平面内のなめらかな曲線.

定義:

$c(t) = (x(t), y(t))$ が なめらかな曲線

$:\Leftrightarrow$ (i) $c(t)$ は (何回でも) 微分可能.

(ii) 全ての t に対して $c'(t) \neq (0, 0)$.

補足:

上の条件を車の運転に例えると:

(i) スピンターンしない.

(ii) 止まらない.

曲線の曲率 (3/11)

例:

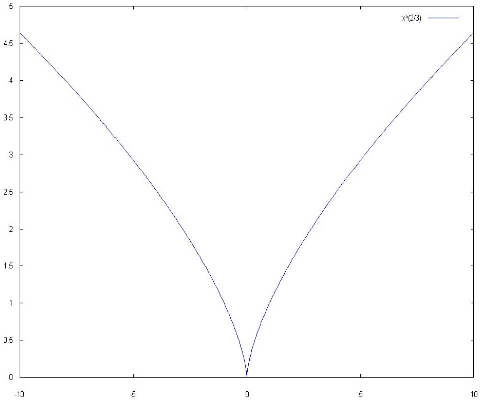
- 半径 r の円は, なめらかな曲線.
- $y = f(x)$ のグラフは, f が何回でも微分可能なら, なめらかな曲線.
- $y = |x|$ のグラフは, なめらかな曲線でない.

曲線の曲率 (4/11)

なぜ $c'(t) \neq (0,0)$ が必要か？

例:

- $c(t) = (t^3, t^2)$ は, なめらかな曲線でない.



曲線の曲率 (5/11)

二つの曲線が「同じ」ということを定義する.

定義:

曲線 $c_1(t)$ と $c_2(t)$ が 向きを保つ合同

$:\Leftrightarrow$ $c_1(t)$ と $c_2(t)$ が回転と平行移動で移り合う

上の条件を真面目に書くと:

- $g \in SO(2)$ と $v \in \mathbb{R}^2$ が存在し, $c_2(t) = gc_1(t) + v$.

補足:

$\mathbb{R}^2$ 内の直線に関する折り返しは, 向きを保たない.
(ので, ここでは考えない.)

曲線の曲率 (6/11)

曲線の曲率を定義する.

定義:

$c(t) = (x(t), y(t))$ をなめらかな曲線とする.
このとき, 次を 曲率 という:

$$\kappa(t) := \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{|c'(t)|^3}.$$

注:

$c(t)$ における曲がり具合を表すのが $\kappa(t)$.
κ は t の関数なので, 曲率関数と呼ぶこともある.

曲線の曲率 (7/11)

例 (半径 r の円):

$c(t) = (r\cos t, r\sin t)$ とすると,

- $c'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-r\sin t, r\cos t)$,
- $c''(t) = (x''(t), y''(t)) = (-r\cos t, -r\sin t)$,
- $|c'(t)|^2 = (-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2 = r^2$,
- $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = \cdots = r^2$.

従って,

$$\kappa(t) = 1/r.$$

曲線の曲率 (8/11)

レポート問題 2:

$y = x^2$ のグラフを考える.

- なめらかな曲線であることを示せ.
- 最も曲がっているのは $(0, 0)$ であることを示せ.
  (注: 最も曲がってる :⇔ 曲率の絶対値が最大)

他の例:

- 直線の曲率は 0.
- 楕円で最も曲がっているのは, 長軸の端点.

曲線の曲率 (9/11)

曲率が不変量であること.

定理:

$c_1(t)$ と $c_2(t)$ が向きを保つ合同
$\Rightarrow$ それぞれの曲率は等しい (つまり $\kappa_1(t) = \kappa_2(t)$).

レポート問題 3:

上の定理を示せ.
ヒント: 曲率の分子は,

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = \det\begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix}.$$

証明には, 行列式の性質 (不変量であること) を用いる.

曲線の曲率 (10/11)

ここは余談...

補足:

- 曲線の曲率は, 行列の不変量 (行列式) を使って定義された.
- このように, 新しい不変量を作るために「既知の不変量を用いる」ことは, とてもよくある.

例えば...:

曲面の曲率を定義するためには,

- 曲面の情報から行列を作り,
- その行列式やトレースを取る.

曲線の曲率 (11/11)

曲率の意味: 曲率 = 速さ 1 で走った時の加速度.

定義:

なめらかな曲線 $c(t)$ が 速さ 1

$:\Leftrightarrow$ 全ての t に対して $|c'(t)| = 1$.

命題:

なめらかな曲線 $c(t)$ に対して,

- 上手くパラメータを取り替えて, 速さ 1 にできる.
- パラメータを取り替えても, 曲率は変わらない.
- $c(t)$ が速さ 1 であるとすると, $|\kappa(t)| = |c''(t)|$.

まとめ

不変量:

不変量の考え方は, 単純ですが, 数学の (ほぼ) 全ての分野に登場する「定石」のようなものです.

曲線の曲率:

平面曲線に対しては, その曲がり具合を表す「曲率」という不変量があります.

この先:

様々な不変量が登場します. 不変量は, 数値・関数・多項式・群など, いろいろな場合があります.