第 1 章

線型イソトロピー表現の軌道

1.1 典型例

ここでは, ある表現に関して, どのような軌道が登場するかを考察する.

例 1.1 自然な作用 $\mathrm{O}(2) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ の軌道 $\mathrm{O}(2).p$ は, $\{0\}$ または半径 $r > 0$ の円.

例 1.2 自然な作用 $\mathrm{O}(3) \curvearrowright \mathbb{R}^3$ の軌道 $\mathrm{O}(3).p$ は, $\{0\}$ または半径 $r > 0$ の球面.

ここでは, 少しだけ複雑な例として, $\mathrm{O}(n)$ の次への作用を考える (本来は $\mathrm{SO}(n)$ の作用が良いのだが, 簡単のために $\mathrm{O}(n)$ にする):

$$\mathrm{Sym}^0(\mathbb{R}^n) := \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid {}^tX = X,\ \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

例 1.3 $\mathrm{O}(n)$ は次によって $\mathrm{Sym}^0(\mathbb{R}^n)$ に作用する:

$$g.X := gXg^{-1} \qquad (g \in \mathrm{O}(n),\ X \in \mathrm{Sym}^0(n, \mathbb{R})).$$

この群作用にどのような軌道が登場するかを考える. 本来は $\mathrm{SO}(n)$ の作用を考えるのだが, 簡単のために $\mathrm{O}(n)$ の作用で考え, さらに $n = 3$ とする.

補題 1.4（Step 0） 上で定めた $\mathrm{O}(3) \curvearrowright \mathrm{Sym}^0(\mathbb{R}^3)$ は, 次の内積を保つ:

$$\langle X, Y \rangle := \mathrm{tr}({}^tXY) = \mathrm{tr}(XY).$$

従って $\mathrm{O}(3)$ は, この内積に関する単位球 S^4 に作用している.

補題 1.5（Step 1） 上で定めた $\mathrm{O}(3) \curvearrowright \mathrm{Sym}^0(\mathbb{R}^3)$ について, 全ての軌道は次と交わる:

$$\mathfrak{a} := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}.$$

補題 1.6（Step 2）　上で定めた $\mathrm{O}(3) \curvearrowright \mathrm{Sym}^0(\mathbb{R}^3)$ について, 全ての軌道は次と交わる:

$$\mathfrak{a}^+ := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a} \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \right\}.$$

この $\mathfrak{a}^+$ を通る軌道を考える. すなわち $X \in \mathfrak{a}^+$ に対して, 軌道 $\mathrm{O}(3).X$ を求める. 軌道は $\mathrm{O}(3).X \cong \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(3)_X$ となるので, 固定部分群 $\mathrm{O}(3)_X$ を決定すれば良い.

補題 1.7（Step 3）　上で定めた $\mathrm{O}(3) \curvearrowright \mathrm{Sym}^0(\mathbb{R}^3)$ について, $X := \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathfrak{a}^+$ とすると, 以下が成り立つ:

(1)　$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ $(= 0)$ のとき, $\mathrm{O}(3)_X = \mathrm{O}(3)$.

(2)　$\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$ のとき, $\mathrm{O}(3)_X = \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(2)$.

(3)　$\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$ のとき, $\mathrm{O}(3)_X = \mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(1)$.

(4)　$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ のとき, $\mathrm{O}(3)_X = \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1)$.

従って, 登場する軌道の形は $\{0\}$, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $F_{1,2}(\mathbb{R}^3)$ となることが分かる. これによって得られた部分多様体 $S^4 \supset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ を Veronese 曲面, $S^4 \supset F_{1,2}(\mathbb{R}^3)$ を Cartan 超曲面と呼ぶ.

問題 1.8　$F_{1,2}(\mathbb{R}^3) = \mathrm{O}(3)/(\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1))$ を示せ.

以降では, 上で登場した表現が, $(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{SO}(n), \sigma)$ with $\sigma(g) := {}^t g^{-1}$ と関係することを述べる.

1.2　リー群の対称対

定義 1.9　(G, K, σ) が (リー群の) 対称対とは, 以下が成り立つこと: G は連結リー群, K は G 内の閉部分群, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, $\sigma^2 = \mathrm{id}$, $\mathrm{Fix}(\sigma, G)^0 \subset K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$.

例 1.10　$(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{SO}(n), \sigma)$ は, 次によって対称対: $\sigma(g) := {}^t g^{-1}$.

1.3　リー代数の準備

リー代数の定義と簡単な例を復習する.

定義 1.11　$\mathfrak{g}$ を実線型空間とし, $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を双線型写像とする. このとき $(\mathfrak{g}, [,])$ が **リー代数** とは, 以下が成り立つこと:

(i)　$\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] = -[Y, X]$.

(ii)　$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

リー代数を単に $\mathfrak{g}$ で表すことも多い. 次が最も典型的な例.

例 1.12　$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) := M(n,\mathbb{R})$ は次によってリー代数: $[X,Y] := XY - YX$.

リー代数の例を与える一つの方法は, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ の部分代数として与える方法である.

定義 1.13　$\mathfrak{g}$ をリー代数とする. $\mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}$ 内の **リー部分代数** とは, 次が成り立つこと:

(i)　$\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ 内の線型部分空間.
(ii)　$\forall X, Y \in \mathfrak{g}'$, $[X,Y] \in \mathfrak{g}'$.

容易に分かるように, リー部分代数はリー代数である.

例 1.14　以下は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ のリー部分代数:

(1)　$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$.
(2)　$\mathfrak{o}(p,q) := \{X \in \mathfrak{gl}(p+q,\mathbb{R}) \mid {}^tXI_{p,q} + I_{p,q}X = 0\}$.

上記と全く同様に, 複素行列全体も (実線型空間とみなして) リー代数になり, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 等も定義することができる.

1.4　リー代数の対称対

定義 1.15　$(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\theta)$ が (リー代数の) 対称対とは, 以下が成り立つこと: $\mathfrak{g}$ はリー代数, $\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ 内のリー部分代数, $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $\sigma^2 = \mathrm{id}$, $\mathfrak{k} = \mathrm{Fix}(\theta,\mathfrak{g})$.

リー群の対称対とリー代数の対称対は “対応” する.

例 1.16　$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}),\mathfrak{o}(n),\theta)$ は, 次によって対称対: $\theta(X) := -{}^tX$.

以下では, $\mathfrak{g}$ が “単純” で, θ が “Cartan 対合” となるものを考える. (これは非コンパクト型の既約リーマン対称空間を考えることと同等である.) 登場する用語を説明しながら, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ は単純リー代数であり, 上記の θ は Cartan 対合であることを示していく.

1.5　単純リー代数

ここでは半単純リー代数の定義と例を紹介する. 引き続き $\mathfrak{g}$ はリー代数を表すとする.

定義 1.17　$\mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}$ 内の **イデアル** であるとは, 次が成り立つこと:

(i)　$\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ 内の線型部分空間.
(ii)　$\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall Y \in \mathfrak{g}'$, $[X,Y] \in \mathfrak{g}'$.

当然ながら, イデアルはリー部分代数である.

例 1.18　$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 内のイデアルである.

定義 1.19　$\mathfrak{g}$ が **単純** とは, $\dim \mathfrak{g} > 1$ であり, かつ非自明なイデアルをもたないこと.

例 1.20　$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ は単純リー代数である.

問題 1.21　上の例を $n = 3$ のときに示せ.

1.6　Killing 形式

ここでは, リー代数 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を定義し, これを用いて半単純性が判定できることを紹介する.

定義 1.22　次で定義される写像 $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ を **Killing 形式** と呼ぶ:

$$B(X, Y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y).$$

命題 1.23　Killing 形式 B は対称双線型写像であり, 次をみたす:

$$B([X, Y], Z) + B(Y, [X, Z]) = 0 \quad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}).$$

例 1.24　特殊線型 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ の Killing 形式 B は次をみたす:

$$B(X, Y) = 2n\mathrm{tr}(XY).$$

定理 1.25　$\mathfrak{g}$ が半単純であるための必要十分条件は, Killing 形式 B が非退化となること.

問題 1.26　$\mathfrak{h}^3 = \mathrm{Span}\{x, y, z\}$ とし, 括弧積を次で定義する: $[x, y] = z$, $[y, z] = [z, x] = 0$ (これを 3 次元 Heisenberg リー代数と呼ぶ). このとき $\mathfrak{h}^3$ の Killing 形式を求め, 退化していることを示せ.

1.7　Cartan 対合

以下では, $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数, B を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とする. 写像 $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が **対合** であるとは, θ が Lie 代数としての自己同型写像であり, $\theta^2 = \mathrm{id}$ をみたすこと.

定義 1.27　対合 $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が **Cartan 対合** であるとは, 次で定義される B_θ が正定値となること:

$$B_\theta(X, Y) := -B(X, \theta(Y)) \qquad (\text{for } X, Y \in \mathfrak{g}).$$

Cartan 対合 θ は対合なので, その固有値は ± 1 のいずれかである.

定義 1.28　Cartan 対合 θ による固有空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を **Cartan 分解** と呼ぶ. ただしここで, $\mathfrak{k}$ は固有値 1, $\mathfrak{p}$ は固有値 -1 に対応する固有空間である.

例 1.29　特殊線型リー代数 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ に対して, $\theta(X) := -{}^tX$ は Cartan 対合. また, これによって得られる Cartan 分解 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は, 次で与えられる:

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n), \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \mid X = {}^tX\}.$$

命題 1.30　Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は次をみたす:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

事実 1.31　任意の半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, Cartan 対合が存在する. さらに, Cartan 対合は (G の作用による) 共役を除いて一意である.

1.8　コメント

事実 1.32　(G, K, σ) をリー群の対称対, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \theta)$ を対応するリー代数の対称対とし, θ は Cartan 対合であるとする. このとき以下が成り立つ:

(1) G は $\mathfrak{g}$ に自然に作用する. 特に $G < \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (リー部分群) のとき, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ であり, 上記の作用は $g.X := gXg^{-1}$ で与えられる.

(2) この作用の制限により $K \curvearrowright \mathfrak{g}$ であり, これは Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を保つ.

ここで得られた $K \curvearrowright \mathfrak{p}$ を線型イソトロピー表現と呼ぶ. ということで, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ の場合の線型イソトロピー表現が, 最初に例として挙げた表現に他ならない.

1.9 極大可換部分代数

以下では, $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数, θ を Cartan 対合, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とする. このとき $K \curvearrowright \mathfrak{p}$ であった.

定義 1.33 $\mathfrak{p}$ 内の部分空間 $\mathfrak{a}$ が **極大可換** であるとは, 以下が成り立つこと:

(1) $\mathfrak{a}$ は可換. すなわち, $\forall X, Y \in \mathfrak{a}$, $[X, Y] = 0$.

(2) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}$ とし, $\mathfrak{a}'$ が可換部分空間のとき, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$.

例 1.34 $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ のとき, 次は極大可換部分空間:

$$\mathfrak{a} := \left\{ \sum a_k E_{kk} \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}.$$

問題 1.35 上の例を示せ. (面倒な場合は $n = 3$ としてよい)

定理 1.36 $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間は K-作用による共役を除いて一意である.

この定理を $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ の場合に適用すると, $\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathrm{Sym}^0(\mathbb{R}^n)$ の全ての軌道が $\mathfrak{a}$ (対角行列の集合) と交わることが従う.

1.10 制限ルート系

以下では, $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数, B を Killing 形式, θ を Cartan 対合, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間とする.

命題 1.37 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\mathrm{ad}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_X$,

(2) $B([X, Y], Z) + B(Y, [X, Z]) = 0$,

(3) $X \in \mathfrak{p}$ のとき, $B_\theta(\mathrm{ad}_X(Y), Z) = B_\theta(Y, \mathrm{ad}_X(Z))$.

すなわち, 任意の $X \in \mathfrak{p}$ に対して, ad_X は B_θ に関して対称. よって ad_X は対角化可能であり, 固有値は全て実数になる. さらに $X \in \mathfrak{a}$ の場合には同時対角化可能. 従って, 同時固有空間を考えることは自然であろう. $\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ の双対空間とする.

定義 1.38 各 $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対して, 次を α に対応する **制限ルート空間** と呼ぶ:

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \quad (\forall H \in \mathfrak{a})\}.$$

定義 1.39 $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ が ($\mathfrak{a}$ に関する) **制限ルート** とは, 次が成り立つこと: $\alpha \neq 0$, $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$. また, ルート全体の集合を **制限ルート系** と呼び, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ で表す.

命題 1.40 制限ルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha)$ は B_θ に関する直交直和分解,

(2) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ $(\forall \alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\})$,

(3) $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ $(\forall \alpha \in \Delta \cup \{0\})$.

(4) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{a}$, ただしここで $\mathfrak{k}_0 := \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$.

この (1) の分解を **制限ルート空間分解** と呼ぶ.

例 1.41 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ に対して, 前述の Cartan 分解を考えると, 次が成り立つ:

(1) $\mathfrak{a} := \{\sum a_k E_{kk} \mid \mathrm{tr} = 0\}$ は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間,

(2) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}$,

(3) $\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \mathrm{span}\{E_{ij}\}$, ただしここで $\varepsilon_i(\sum a_k E_{kk}) := a_i$,

(4) $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$.

問題 1.42 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (実リー代数とみなす) について, Cartan 分解は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{p}$ の形で与えられる. このときの $\mathfrak{p}$, その中の適切な極大可換部分代数を求め, ルート空間分解を与えよ.

1.11 単純ルート

先に述べた $\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathrm{Sym}^0(\mathbb{R}^n)$ に対し, 全ての軌道が $\mathfrak{a}$ に交わることを示した後に, 成分を並び変えて $\mathfrak{a}^+$ とも交わることを述べた. ここでは, この成分の入れ替えに相当する手続きを説明する.

定義 1.43 Δ をルート系とする. $\Delta \supset \Lambda := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ が**単純ルート系** であるとは, 次が成り立つこと:

(i) Λ は $\mathfrak{a}^*$ の基底,

(ii) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して, 次をみたす $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ または $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ が存在する: $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r$.

定義 1.44 Δ をルート系, $\Lambda = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ を単純ルート系とし, $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r \in \Delta$ とする.

(1) $\alpha \in \Delta$ が **正ルート** とは, $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となること.

(2) $\alpha \in \Delta$ が **負ルート** とは, $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ となること.

(3) $\alpha \in \Delta$ が **最高ルート** とは, 次が成り立つこと: 任意の $c'_1\alpha_1 + \cdots + c'_r\alpha_r \in \Delta$ に対して, $c_1 \geq c'_1$, ..., $c_r \geq c'_r$.

例 1.45　$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ のとき, $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ とおくと, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ は単純ルート系. 最高ルートは, $\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}$.

制限ルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ は抽象的な意味でのルート系なので, ルート系の一般論はそのまま使える. 特に, 次が成り立つ.

定理 1.46　全ての制限ルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に対し, 単純ルート系が存在する. さらに, 単純ルート系 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ を一つ固定したとき, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ は, 共役で次の集合内に移すことができる:

$$\mathfrak{a}^+ := \{X \in \mathfrak{a} \mid \alpha_i(X) \geq 0 \ (\forall i)\}.$$

例 1.47　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ のとき, $\mathfrak{a}$, Δ, Λ を上記のようにとると,

$$\mathfrak{a}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a} \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \right\}.$$

第 2 章

岩澤分解

2.1　簡単な例

例 2.1　$\mathbb{RH}^2$ への次の群の作用は余等質性 1 であり, 軌道も具体的に記述できる:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\}, \qquad N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.2　可解リー代数

定義 2.2　$\mathfrak{g}$ をリー代数とする. このとき

(1)　$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] := \{\sum_{i=1}^{n} [X_i, Y_i] \mid X_i, Y_i \in \mathfrak{g}\}$ を **derived ideal** と呼ぶ.

(2)　$\mathfrak{g}$ が **冪零** とは, $\mathfrak{g}_1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, ..., $\mathfrak{g}_k := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k]$ で定義される列が有限回で $\{0\}$ となること.

(3)　$\mathfrak{g}$ が **可解** とは, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が冪霊となること.

例 2.3　次は可解リー代数:

$$\mathfrak{s} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

さらに次はベクトル空間の直和: $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{o}(2) \oplus \mathfrak{s}$.

例 2.4　$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 内の狭義上三角行列全体は冪霊リー代数 (特に $n = 3$ のときを Heisenberg リー代数と呼ぶ), 広義上三角行列全体は可解リー代数.

2.3　岩澤分解

これまでの記号を用いる．すなわち, $\mathfrak{g}$ を単純リー代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ とし, その単純ルート系を $\Lambda = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ とする．

定義 2.5　各ルート $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r$ に対して, $\mathrm{level}(\alpha) := c_1 + \cdots + c_r$ を α の **レベル** と呼ぶ．

補題 2.6　$\mathfrak{g}^k := \bigoplus_{\mathrm{level}(\alpha)=k} \mathfrak{g}_\alpha$ とおくと, 次が成り立つ:

$$[\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^l] \subset \mathfrak{g}^{k+l}.$$

命題 2.7　以下が成り立つ:

(1)　$\mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$ は冪霊リー代数,

(2)　$\mathfrak{s} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ は可解リー代数 (特に $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$),

(3)　$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{s} = 0$.

命題 2.8　$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ は, ベクトル空間としての直和分解 (これを **岩澤分解** と呼ぶ).

この分解は, 直交直和ではなく, またリー代数の直和でもないことに注意する．ちなみにリー群にも, 対応する分解 $G = KAN$ がある．

事実 2.9　S を, 上記の $\mathfrak{s}$ をリー代数にもつ G 内の連結リー部分群とする．このとき $M := G/K \cong S/\{e\} \cong S$.

$\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ の場合には, 確かにそうなっていた．状況証拠として次を挙げておく．

命題 2.10　以下が成り立つ:

(1)　各 $\alpha > 0$ に対し, $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} = (1+\theta)\mathfrak{g}_\alpha \oplus (1-\theta)\mathfrak{g}_\alpha$,

(2)　$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha>0}(1-\theta)\mathfrak{g}_\alpha$,

(3)　$\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{p}$ $(= \dim G/K)$.

(4)　$M \supset S.[e] \cong S/S_{[e]} = S/(S \cap K)$.

2.4　岩澤分解 (補足)

講義で紹介した命題 2.8 の証明には, 命題 2.10 を用いた. この順序を適切に並び替えて証明を整理したものを, ここでは紹介しておく. 命題 2.7 の次に以下を示す.

補題 2.11　各 $\alpha > 0$ について, 以下が成り立つ:

(1)　$(1+\theta)\mathfrak{g}_\alpha = (1+\theta)\mathfrak{g}_{-\alpha}$ $(=: \mathfrak{k}_\alpha)$,

(2)　$(1-\theta)\mathfrak{g}_\alpha = (1-\theta)\mathfrak{g}_{-\alpha}$ $(=: \mathfrak{p}_\alpha)$.

従って, $\mathfrak{g}$ のルート空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ の両辺を $(1 \pm \theta)$ で送ることにより, 次を得る (これもルート空間分解と呼ぶ).

命題 2.12　以下が成り立つ:

(1)　$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{k}_\alpha$,

(2)　$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{p}_\alpha$.

また, 各 $\alpha > 0$ に対して $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \mathfrak{k}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ は容易に確かめられる. これらを用いると, 命題 2.8 (特に $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$) を直接示すことができる.

2.5　余等質性 1 作用

事実 2.13　$M = G/K$ を非コンパクト型の既約リーマン対称空間とする (これは対応する $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \theta)$ で言うと, $\mathfrak{g}$ が単純で θ が Cartan 対合の場合に相当する). このとき連結リー群による余等質性 1 作用は以下のいずれかをみたす:

(K)　唯一の特異軌道をもつ,

(A)　特異軌道はなく, 唯一の極小軌道をもつ,

(N)　特異軌道はなく, 全ての軌道は合同である.

このような群作用のうち, (A)-type, (N)-type については, 岩澤分解を用いて構成できることを紹介する. 次は準備のための一般的な補題.

補題 2.14　一般に S を連結リー群とし, S' をその余次元 1 の部分群とする. このとき $S' \curvearrowright S$ は余等質性 1 であり, 特異軌道をもたない.

従って岩澤分解の可解部分 S 内で, 余次元 1 の部分群があれば, 特異軌道をもたない余等質性 1 作用が得られる. ここで $\ominus$ は (B_θ に関する) 直交補空間を表すとする.

命題 2.15　$0 \neq H \in \mathfrak{a}$ とする．このとき $\mathfrak{s}_H := \mathfrak{s} \ominus \mathrm{span}\{H\} = (\mathfrak{a} \ominus \mathrm{span}\{H\}) \oplus \mathfrak{n}$ は余次元 1 のリー部分代数. 従って対応する連結リー群による $S_H \curvearrowright M = G/K$ は余等質性 1 作用で, 特異軌道をもたない.

命題 2.16　$\alpha \in \Lambda$ (単純ルート) とし, $0 \neq X \in \mathfrak{g}_\alpha$ とする．このとき $\mathfrak{s}_X := \mathfrak{s} \ominus \mathrm{span}\{X\} = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{n} \ominus \mathrm{span}\{X\})$ は余次元 1 のリー部分代数. 従って対応する連結リー群による $S_X \curvearrowright M = G/K$ は余等質性 1 作用で, 特異軌道をもたない.

事実 2.17（Berndt-T. (2003)）　上記の S_H の作用は (N)-type であり, S_X の作用は (A)-type である．さらに, (A)-type および (N)-type の余等質性 1 作用は, “軌道同値” を除いて全てこの方法で得られる.

ここで軌道同値は, 作用している群が “共役” であることよりも弱い同値関係である.

定義 2.18　群作用 $G, G' \curvearrowright M$ が **軌道同値** とは, 以下が成り立つこと: $\exists f : M \to M$: 全単射 (or diffeo, 文脈に依存する) : $\forall p \in M,\ f(G.p) = G'.f(p)$.