第 1 章

幾何学と不変量

本稿は「先端数学[*1]」で田丸が担当した回の内容をまとめたものである. 不変量の概念を定式化し, その一例として平面曲線の曲率を紹介する.

1.1 不変量

まずは不変量の定義を抽象的な形で与える.

定義 1.1. X, Y を集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする. このとき写像 $f : X \to Y$ が X の $\sim$ に関する <u>不変量</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \sim x_2)$, $f(x_1) = f(x_2)$.

例えば, 有限次元実線型空間の次元は, 線型同型に関する不変量である. これは, X が実ベクトル空間全体の集合, $\sim$ が線型同型, 写像は次元を与える写像 $\dim : X \to \mathbb{Z}$, とすると上記の不変量の定義に当てはまる.

例 1.2. 不変量の例として, 以下が成り立つ:

(1) 三角形に対して, 面積は合同に関する不変量. しかし相似に関する不変量ではない.
(2) 行列に対して, 階数・行列式・トレースはいずれも共役に関する不変量.

上記のように, 同じく三角形を扱う場合でも, 何と何を同じと思うか (合同か, 相似か) によって, 何が不変量になるかは異なる.

問題 1.3 (レポート問題 (1))**.** 今までに習った概念のうち, 不変量であるものの例を挙げよ. 証明は不要だが, 何に対する, どういう同値関係に関する不変量であるかを明記すること.

[*1] 2017/06/16, 広島大学, 数学科 3 年生対象

1.2　曲線の曲率

これから扱う曲線は, 媒介変数表示された曲線である.

定義 1.4. I を $\mathbb{R}$ 内の空でない開集合とする. 写像 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が なめらかな曲線 (あるいは, なめらかな曲線の助変数表示) であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) 写像 c が (何回でも) 微分可能,
(ii) 全ての t に対して, $c'(t) \neq (0, 0)$.

例 1.5. 以下はなめらかな曲線である:

(1) 半径 $r > 0$ の円 $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$;
(2) $f : I \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級のときの $y = f(x)$ のグラフ $c(t) = (t, f(t))$.

例えば, $y = |x|$ のグラフはなめらかな曲線ではない. また, $c(t) = (t^3, t^2)$ もなめらかな曲線ではない. 一方で, 自己交叉は許す.

定義 1.6. なめらかな曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ に対して, 次の $k(t)$ を 曲率 と呼ぶ:

$$k(t) := \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{|c'(t)|^3}.$$

例 1.7. 直線の曲率は 0 である (つまり全く曲がっていない).

例 1.8. 半径 $r > 0$ の円を $c(t) = (r \cos(at), r \sin(at))$ (ただし $a \neq 0$) で表す. このときの曲率は $k(t) = a/(|a|r)$.

問題 1.9 (レポート問題 (2))**.** 放物線 $y = ax^2$ (ただし $a > 0$) について以下を調べよ:

(1) 放物線の頂点での曲率を a を用いて表せ (a が大きくなるとどうなるか？).
(2) 各 a に対して, 放物線 $y = ax^2$ で最も曲がってる点を求めよ.

1.3　曲率の性質

ここでは曲線の曲率の性質, 特に不変量であることを紹介する. 以下では I, I' を $\mathbb{R}$ 内の空でない開集合とする.

命題 1.10. $c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする. このとき, 曲率 $k(t)$ は, 曲線の回転と平行移動によって不変である.

平行移動で不変であることは, 容易に示せる. 回転で不変であることを示す際には, 曲率

の定義式の分子を行列式を使って表しておくと便利.

命題 1.11. $c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする. また, $t : I' \to I$ を C^∞ 級関数とし, $t'(s) > 0$ ($\forall s \in I'$) が成り立つとする. このとき以下が成り立つ:

(1) $c \circ t : I' \to \mathbb{R}^2$ はなめらかな曲線;

(2) c の曲率と $c \circ t$ の曲率は一致する.

上のようにして得られた $c \circ t$ を 正のパラメータ変換 と呼ぶ. 例 1.8 の円を考えると, $a > 0$ のもの同士は正のパラメータ変換で移り合う. 命題の証明には, 合成写像の微分に関する性質を用いる.

問題 1.12 (レポート問題 (3)). 以下のいずれかを示せ:

(1) なめらかな曲線の曲率は, 回転によって不変である.

(2) なめらかな曲線の曲率は, 正のパラメータ変換によって不変である.

1.4　曲率の意味

曲率が実際に「曲がり具合」を表している (と考えて良い) 一つの根拠を紹介する. そのために, 加速度 (ベクトル) を用いる.

定義 1.13. $c(t)$ をなめらかな曲線とする. このとき

(1) $c'(t)$ を 速度ベクトル と呼ぶ;

(2) 二階微分 $c''(t)$ を 加速度ベクトル と呼ぶ.

命題 1.14. なめらかな曲線の曲率は, 「速さ 1 で走ったときの加速度の大きさ」と一致.

ここで, $c(t)$ の速さが 1 とは, 全ての t に対して $|c'(t)| = 1$ が成り立つこと. この命題は, 一定の速さで走った時に, 曲率が大きければ大きな加速度を感じて, 曲率が小さければ加速度も小さい, ということを意味する. したがって, 曲率の大きさは「道路が曲がり具合」を表していると考えられる.