

# 身の回りにおける曲線と曲率

田丸 博士

広島大学

広島大学附属高等学校 SSH 先端研究実習

2017/06/03

# まえがき - (1/2)

## (第一部) 曲線の曲率: 定義と例

- なめらかな曲線:  $c(t) = (x(t), y(t))$
- 曲線の曲率:  $k(t) = (x'y'' - x''y')/|c'|^3$
- いくつかの実習: 放物線や楕円で一番曲がってるのはどこ?

## (第二部) 曲線の曲率: 性質

- 曲率の性質: 向きを逆にしたら?
- 曲率の性質: 表示方法を取り換えたなら?
- 曲率の意味: 一定の速さで走ったときの加速度

## まえがき - (2/2)

- このスライドでは, 次を紹介する.

### (第三部) 身の回りにおける曲線と曲率

- 曲線の曲率が実際に使われている例 (1)
- 曲線の曲率が実際に使われている例 (2)
- その他の雑多な例

## 例 (1) - (1/2)

### 復習

- 半径  $R (> 0)$  の円の曲率は  $1/R$ .
- つまり, 曲率  $k$  なら, 半径  $1/k$  の円と同じだけ曲がっている.

### 紹介

- 実際の道路の曲がり具合を表すために,  
「半径  $R$  の円と同じだけ曲がっている」  
という表し方をしている.

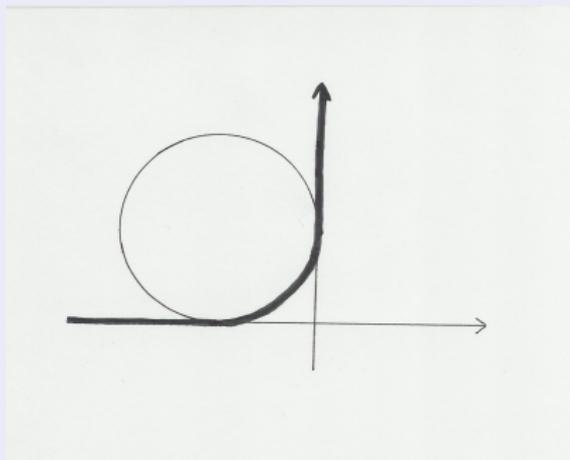
## 例 (1) - (2/2)



## 例 (2) - (1/6)

### 問題

次のような、直線と円を繋いだ道路は運転しやすいか？



## 例 (2) - (2/6)

### 考察

曲率  $k$  の道路を走るには:

- $k = 0 \Leftrightarrow$  ハンドルは真っすぐ.
- $|k|$  が大きい  $\Leftrightarrow$  カーブがきつい  $\Leftrightarrow$  ハンドルを大きく切る.
- $|k|$  が小さい  $\Leftrightarrow$  カーブが緩やか  $\Leftrightarrow$  ハンドルを小さく切る.

### 結論

- 道路の曲率が急激に変化する  
⇒ 急ハンドルを切らなくてはいけない  
⇒ 危険で運転しにくい.
- よって、直線と円を繋いだ道路は、急ハンドルが必要で危険.

## 例 (2) - (3/6)

### ではどういう道路が良い？

- ハンドルを一定の速さで切れば良いような道路。  
(これなら急ハンドルは不要)
- すなわち, 曲率が一定の速さで変化するような道路.
- すなわち, 曲率が  $k(t) = at$  ( $a$  は定数) となる曲線が良い.

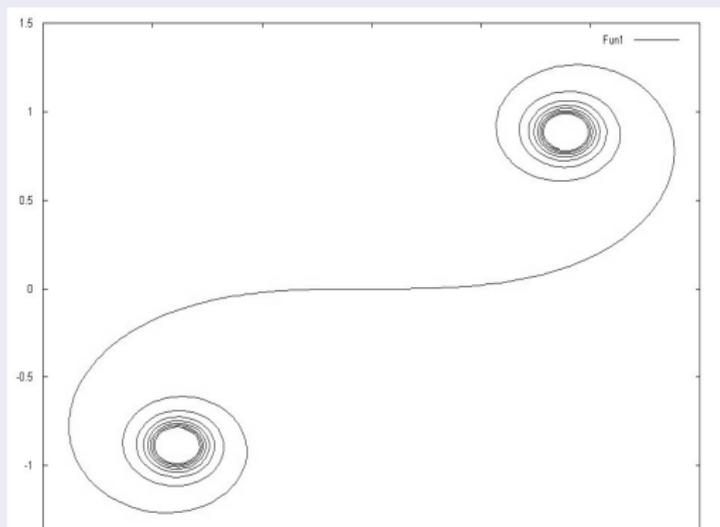
### ということで数学の問題になった

- $a$  を定数とする.
- 曲率が  $k(t) = at$  をみたす曲線を描け.

## 例 (2) - (4/6)

### 答

- $k(s) = as$  となる曲線は唯一つ存在 (クロソイド曲線 という).
- この曲線が, 実際に道路のカーブには使われている.





## 例 (2) - (6/6)

### クロソイド曲線の雑学

- クローソー（ギリシャ神話の女神の名前）が由来。
- 殆ど全ての高速道路に利用されている。  
(ジャンクションだけでなく、カーブでも、一般道でも)

### 余談 (国土交通省の HP より)

- 日本初のクロソイド曲線道路は、昭和 27 年 (1952 年)。
- 場所は三国峠。
- 以前の道路は、直線と円の組み合わせで、非常に事故が多かった。
- クロソイド曲線に変えてから、事故が激減した (らしい)。



## 例 (その他) - (2/2)

### その他の例

- ジェットコースターにも、クロソイド曲線が使われている。

### さらにあるか？

- 陸上競技のトラックは、クロソイド曲線ではないらしい。  
(描くのが難しい?)
- 競輪のトラックは、クロソイドもあったが、今は違うらしい。

## あとがき

- 周辺にクロソイド曲線っぽいもの (クロソイド曲線にすると良さそうなもの) があったら、お知らせ下さい。

## 参考文献

- 田丸博士, 「曲線の微分幾何 –高速道路のジャンクションは何であんな形なのか–」, 数学の基礎と展望 –数理を探ろう–, 平成 17 年度広島大学公開講座 (2005), pp36–44.