曲線の曲率[*1]

田丸 博士
（広島大学大学院理学研究科）

[*1] 2017/06/04 公開

まえがき

概要

このノートは, 2017/06/03(土) に行われた「広島大学付属高等学校 SSH 先端研究実習」の配布資料です. (ほとんど同じ内容の実習を 2012 年度にも行っています.) 実習では, 曲率を定義し, いくつかの簡単な曲線の曲率を計算し, 曲率の性質をいくつか紹介しました (証明はしていない). 内容だけを見ると, 大学で曲線の幾何学を扱う講義の最初の数回分に相当します. もちろんこの実習は, 大学の講義と同じようにやった訳ではなく, いくつかの簡単な場合に曲率を計算して貰って, 確かにそれが曲がり具合を表している (と言っても良い) ことを実感する, ということを主眼としました.

覚書

この実習の対象は, SSH の実習でわざわざ数学を選ぶ, やる気のある高校生でした. ということで, やや背伸びをした内容ではあったと思うのですが, みなさん普通に追い付いていたように思いました. この内容は, また何かに機会に使い回すことになる予定なので, その時のための備忘録:

(1) 楕円の媒介変数表示は, 知らなかった場合に自力で求めるのは困難なようだった. この実習のテーマは媒介変数表示の求め方ではないので, 「$c(t) = (a\cos t, b\sin t)$ で表される曲線」のように天下りに与えた方が簡単で良さそう.

(2) 円の上半分をグラフと考えて $c(t) = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$ とおいて, その曲率を計算する問題があったが, 計算が大変だった模様. 特に, 積とか商の微分をやっていないと, どうしようもない. ということで, この例を他のものに取り換えられると嬉しいのだけど, 計算しやすい簡単な例が思い浮かばない...

第 1 章

曲線の曲率: 定義と例

本稿を通して, 曲線は全て平面 $\mathbb{R}^2$ 内に描かれているものとする. ここでは, なめらかな曲線とその曲率を定義し, 簡単な例を紹介する.

1.1 曲線

これから扱う曲線は, 媒介変数表示された曲線である.

定義 1.1. 写像 $c(t) = (x(t), y(t))$ のことを <u>曲線</u> と呼ぶ.

例 1.2. 以下は曲線である:

(1) 半径 $r > 0$ の円. 例えば $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$ とすれば良い.
(2) $y = f(x)$ のグラフ. 例えば $c(t) = (t, f(t))$ とすれば良い.

ここで, 曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ の微分は $c'(t) := (x'(t), y'(t))$ によって定義する.

定義 1.3. 曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ が次をみたすときに <u>なめらかな曲線</u> であると言う:

(i) 写像 c が (何回でも) 微分可能,
(ii) 全ての t に対して, $c'(t) \neq (0, 0)$.

例 1.4. 次が成り立つ:

(1) 半径 $r > 0$ の円 $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$ は, なめらかな曲線.
(2) $y = f(x)$ のグラフ $c(t) = (t, f(t))$ は, f が何回でも微分可能ならなめらかな曲線.
(3) 例えば $y = |x|$ は, なめらかな曲線ではない.

1.2　曲線の曲率

なめらかな曲線の曲率を定義する. 定義は天下りに導入し, 意味は後で説明する.

定義 1.5. なめらかな曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ に対して, 次の $k(t)$ を 曲率 と呼ぶ:

$$k(t) := \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{|c'(t)|^3}.$$

ここで, $|c'(t)|$ はベクトル $c'(t)$ の大きさを表す. すなわち,

$$|c'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

曲率は, 曲線の "曲がり具合" を表すものである. そのことの説明は次節で試みるが, ここではまずは具体例で観察する.

例 1.6. 曲率について次が成り立つ:

(1) 直線の曲率は 0 である (つまり全く曲がっていない).
(2) 半径 $r > 0$ の円 $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$ に対して, 曲率は $k(t) = 1/r$ (つまり一定).

問題 1.7. 放物線 $y = ax^2$ (ただし $a > 0$) の曲率を計算し, 次を調べよ:

(1) 放物線の頂点での曲率を a を用いて表せ (a が大きくなるとどうなるか？).
(2) 各 a に対して, 放物線 $y = ax^2$ で最も曲がってる点を求めよ.

問題 1.8 (やや面倒)**.** 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ で最も曲がっている点と最も曲がっていない点を求めよ. ただし $a > b > 0$ とする.

問題 1.9 (発展的)**.** 曲線の曲率は, 曲線を平行移動しても変わらないことを示せ.

この問題は, 証明すべきことをきちんと書くところだけが難しい (計算は簡単). いずれにせよ, "曲がり具合" は平行移動しても変わらないので, この問題は, 曲率が曲がり具合を表していることの一つの状況証拠と言える. (ちなみに曲率は, 曲線を回転しても変わらない. しかし, その証明にはもう少し準備がいるので, ここでは扱わない.)

第 2 章

曲線の曲率: 性質

ここでは, 曲線の曲率の性質をいくつか紹介する. 紹介する性質は, 成り立つことの証明は与えないが, いくつかの具体例では正しいことを確かめる.

2.1　曲線の向きと曲率

なめからな曲線に対して, 表示方法 $c(t) = (x(t), y(t))$ は違っても, 同じ曲線を表すことがあり得る. その時に曲率がどう変わるかを調べる.

命題 2.1. なめらかな曲線の向きを逆にすると, 曲率は -1 倍される.

ここで, 曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ の向きを逆にするとは, $c_1(t) = (x(-t), y(-t))$ を考えること. この結果より, 曲率は右曲がり・左曲がりを区別していることが分かる.

問題 2.2. 命題 2.1 が成り立つことを, 以下の具体例で確かめよ:

(1) 放物線 $y = x^2$ の曲率を, $c(t)$ を逆向きに選んで計算せよ.
(2) 半径 $r > 0$ の円の曲率を, $c(t)$ を逆向きに選んで計算せよ.

問題 2.3 (少し発展)**.** 命題 2.1 が成り立つことを一般的に示せ.

2.2　曲線の変数変換と曲率

ここでは, なめらかな曲線の表示 $c(t) = (x(t), y(t))$ を, 向きは同じだが違うものに取り換えることを考える.

命題 2.4. なめらかな曲線の曲率は, 向きを変えなければ, どんな表示方法でも等しい.

問題 2.5. 命題 2.4 が成り立つことを, 以下の具体例で確かめよ:

(1) 半径 $r > 0$ の円の曲率を, $c(t) = (r\cos(at), r\sin(at))$ $(a > 0)$ を用いて計算せよ.

(2) 半径 $r > 0$ の円の上半分を $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ のグラフだと考えて $c(t)$ を選んで, 曲率を計算せよ.

2.3　曲率と加速度

最後に, 曲率が実際に「曲がり具合」を表している (と考えて良い) 一つの根拠を紹介する. そのために, 加速度 (ベクトル) を用いる.

定義 2.6. $c(t)$ をなめらかな曲線とする. このとき

(1) $c'(t)$ を <u>速度ベクトル</u> と呼ぶ;

(2) 二階微分 $c''(t)$ を <u>加速度ベクトル</u> と呼ぶ.

命題 2.7. なめらかな曲線の曲率は, 「速さ 1 で走ったときの加速度の大きさ」と一致.

ここで, $c(t)$ の速さが 1 とは, 全ての t に対して $|c'(t)| = 1$ が成り立つこと. この命題は, 一定の速さで走った時に, 曲率が大きければ大きな加速度を感じて, 曲率が小さければ加速度も小さい, ということを意味する. したがって, 曲率の大きさは「道路が曲がり具合」を表していると考えられる.

問題 2.8. 半径 $r > 0$ の円に対して, $c(t) = (r\cos(t/r), r\sin(t/r))$ とする. このとき, この表示は速さ 1 であり, 曲率の大きさと加速度ベクトルの大きさが一致することを確かめよ.