第 1 章

対称空間とカンドル入門

本章では, 多様体構造などは一切仮定せずに, 集合としての対称空間を定義し, その例と性質を紹介する．実際には, 集合としての対称空間の一般化であるカンドルを扱う．ここでの主結果は, 等質なカンドルと “カンドル組” との間の対応である.

1.1　定義と例

集合 X から X 自身への写像全体の成す集合を $\mathrm{Map}(X, X)$ で表す.

定義 1.1　写像 $s : X \to \mathrm{Map}(X, X) : x \mapsto s_x$ を考える．このとき, (X, s) が **対称空間** であるとは, 以下が成り立つこと:

(S1)　$\forall x \in X,\ s_x(x) = x$,

(S2)　$\forall x \in X,\ s_x^2 = \mathrm{id}$.

(S3)　$\forall x, y \in X,\ s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

注意 1.2　上記の条件 (S2) を次に置き換えたものを **カンドル** と呼ぶ:

(S2)'　$\forall x \in X$, s_x は全単射.

例 1.3（自明な対称空間）　任意の集合 X は, 次の s によって対称空間となる: $s_x := \mathrm{id}$ $(\forall x \in X)$.

例 1.4　$\mathbb{R}^n$ は, 次の s によって対称空間となる: $s_x(y) := 2x - y$.

例 1.5　$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ は, s_p を “軸 op に関する折り返し” で定義することにより, 対称空間となる．式で書くと,

$$s_p(x) := 2\langle x, p \rangle p - x.$$

問題 1.6（レポート問題 1） 例 1.5 の s について $s_p \in \mathrm{O}(n+1)$ を示せ. また, これを用いて s が (S3) をみたすことを示せ.

例 1.7（正四面体カンドル） $X := \{1,2,3,4\}$ は, 次の s によりカンドルとなる:

$$s_1 := (234), \quad s_2 := (143), \quad s_3 := (124), \quad s_4 := (132).$$

1.2　群作用 (復習)

ここでは, 群作用の定義と例を復習する.

定義 1.8 写像 $\Phi : G \times M \to M$ に対して, $g.p := \Phi(g,p)$ と表す. 写像 Φ が G の M への **群作用** であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) 任意の $g, h \in G$ および任意の $p \in M$ に対して，$(gh).p = g.(h.p)$.

(ii) 任意の $p \in M$ に対して，$e.p = p$.

群 G が集合 M に作用することを，記号 $G \curvearrowright M$ で表すことが多い.

例 1.9 以下は群作用である：

(1) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (g,v) \mapsto gv$.

(2) 同じ写像により, $\mathrm{O}(n) \curvearrowright S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle = 1\}$.

ここで $\mathrm{O}(n)$ は直交群であり, $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な内積 $\langle , \rangle$ と次の関係がある:

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(n) &:= \{g \in M(n,\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n\} \\ &= \{g \in M(n,\mathbb{R}) \mid \langle g(\cdot), g(\cdot) \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle\}.\end{aligned}$$

例 1.10 $G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V$ は k 次元線型部分空間 $\}$ を **実グラスマン多様体** と呼ぶ. 次は群作用：$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times G_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n) : (g,V) \mapsto g.V := \{gv \mid v \in V\}$.

ここまでの群作用の例は, 全て行列の積を用いて定義されるものであった. そうではない例も存在することを注意しておく.

例 1.11 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を **上半平面** と呼ぶ. このとき，次で定める写像によって $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ (ここで $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$ でないことに注意):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

1.3　推移的な作用と等質な集合

推移的な群作用をもつ集合を等質集合と呼ぶ. ここでは, 等質集合であることと, 剰余集合の形で書けることが同値であることを示す.

まずは, 推移的な作用および等質集合について紹介する.

定義 1.12　G を群, M を集合とする. $G \curvearrowright M$ が **推移的** であるとは，次が成り立つこと：$\forall p, q \in M$，$\exists g \in G : g.p = q$．またこのとき, M は G に関して **等質** であるという.

補題 1.13　$o \in M$ を固定する．このとき，群 G の M への作用が推移的であることは次と同値：任意の $p \in M$ に対して，$g \in G$ を上手く選ぶと，$g.o = p$.

例 1.14　以下の作用は推移的である:

(1)　$n \geq 1$ のとき, $\mathrm{O}(n+1), \mathrm{SO}(n+1) \curvearrowright S^n$.

(2)　$k \in \{1, \ldots, n-1\}$ のとき, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$，$\mathrm{O}(n)$，$\mathrm{SO}(n) \curvearrowright G_k(\mathbb{R}^n)$.

(3)　$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, $S \curvearrowright \mathbb{R}\mathrm{H}^2$, ただしここで,

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0,\ b \in \mathbb{R} \right\}.$$

次に, 剰余集合について紹介する. 剰余集合は, G/K という形で表される集合である.

定義 1.15　G を群とし，K をその部分群とする．次で定義される G 上の同値関係 $\sim$ を **K による同値関係** と呼ぶ：$g \sim h :\Leftrightarrow g^{-1}h \in K$.

ここで定義した関係 $\sim$ が同値関係であることは，容易に確かめられる．また，$g \in G$ を含む同値類を $[g]$ で表すと，次が成り立つ：

$$[g] = gK := \{gk \mid k \in K\}.$$

定義 1.16　群 G を部分群 K による同値関係で割った商集合を G/K で表し，G の K による **剰余集合** と呼ぶ.

次が, 等質な集合に関する基本的な定理.

定理 1.17　集合 M が G に関して等質であることと, $M = G/K$ と書けることは同値.

この定理を証明するためには, 以下の二つの命題を示せば良い.

命題 1.18　K を G の任意の部分群とする．このとき, G/K は G に関して等質である. 特に, 次により G は G/K に推移的に作用する: $g.[h] := [gh]$.

命題 1.19　M が G に関して等質であるとし, $p \in M$ とする. このとき, 次の写像は全単射である: $G/G_p \to M : [g] \mapsto g.p$.

ただしここで $G_p := \{g \in G \mid g.p = p\}$. これを G の p における固定部分群という.

問題 1.20（レポート問題 2）　命題 1.19 の証明の「全射」「単射」のうち, M の等質性が必要となる方に証明を与えよ.

1.4　等質な集合の例

等質な集合 M を G/K の形で書くことを等質空間表示という. 等質空間表示を求めるためには, 推移的に作用する群 G と, ある点 $p \in M$ での固定部分群を求めれば良い.

例 1.21　$n \geq 1$ とする．このとき，球面 S^n は以下の等質空間表示を持つ：

$$\begin{aligned} S^n &= \mathrm{O}(n+1)/\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\} \\ &= \mathrm{SO}(n+1)/\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{SO}(n) \right\}. \end{aligned}$$

このように, 等質空間表示は一意的ではない.

例 1.22　以下において，行列のブロック分割のサイズは $(k, n-k)$ であるとする．グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ は以下の等質空間表示をもつ：

$$\begin{aligned} G_k(\mathbb{R}^n) &= \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\left\{ \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \mid \det \neq 0 \right\} \\ &= \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\left\{ \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \mid \det = 1 \right\} \\ &= \mathrm{O}(n)/\left\{ \left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right] \mid \alpha \in \mathrm{O}(k),\ \beta \in \mathrm{O}(n-k) \right\} \\ &= \mathrm{SO}(n)/\left\{ \left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right] \mid \alpha \in \mathrm{O}(k),\ \beta \in \mathrm{O}(n-k),\ \det(\alpha)\det(\beta) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

例 1.23　上半平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ は以下の等質空間表示をもつ：

$$\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) = S/\{e\}.$$

例 1.24　$\mathfrak{M} := \{\langle , \rangle : \mathbb{R}^n$ 上の内積 $\}$ とする. このとき,

(1)　次による $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathfrak{M}$ は推移的: $g.\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle g^{-1}(\cdot), g^{-1}(\cdot) \rangle$.

(2)　$\mathfrak{M} = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$.

1.5　等質カンドル

カンドルが等質とは, 自己同型群が推移的に作用することと定義する. ここでは, これを説明するために必要となる用語や例を紹介する.

定義 1.25　(X, s^X), (Y, s^Y) をカンドルとする. 写像 $f : X \to Y$ が **準同型** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in X$, $f \circ s^X_x = s^Y_{f(x)} \circ f$.

命題 1.26　準同型写像と準同型写像の合成は準同型である. また, 準同型写像が全単射の場合には, 逆写像も準同型である.

全単射な準同型写像を **同型写像** と呼ぶ. 上の命題から, 次が群になることが従う.

定義 1.27　カンドル (X, s) に対して, 次を **自己同型群** と呼ぶ.

$$\mathrm{Aut}(X, s) := \{ f : X \to X : \text{同型写像} \}.$$

例 1.28　任意の $x \in X$ に対して, 次が成り立つ: $s_x \in \mathrm{Aut}(X, s)$.

定義 1.29　カンドル (X, s) が **等質** とは, $\mathrm{Aut}(X, s)$ が X に推移的に作用すること.

例 1.30　(X, s) を自明な対称空間とする. このとき, 任意の全単射 $f : X \to X$ は自己同型である. よって, (X, s) は等質.

例 1.31　$\mathbb{R}^n$ を前述の点対称による対称空間とする. このとき, 任意の平行移動および線型同型写像は自己同型である. よって, $\mathbb{R}^n$ は等質.

問題 1.32（レポート問題 3）　例 1.31 の $(\mathbb{R}^n, s)$ において, 任意の線型同型写像は自己同型であることを示せ.

例 1.33　S^n を前述の点対称による対称空間とする. このとき, 任意の $g \in \mathrm{O}(n+1)$ は自己同型として作用する. よって, S^n は等質.

1.6　等質カンドルとカンドル組

等質な集合 M は G/K の形で書くことができた. ここでは, これが等質なカンドルあるいは対称空間となるための (G, K) の性質を述べる.

定義 1.34　G を群, K を G の部分群とし, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ とする. このとき,

(1)　(G, K, σ) が **カンドル組** とは, 次が成り立つこと: $K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$.

(2)　(G, K, σ) が **対称対** とは, 次が成り立つこと: $\sigma^2 = \mathrm{id}$, $K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$.

ここで, 対称対 (symmetric pair) は定着した用語だが, カンドル組は未定着であることに注意しておく. 次の定理を紹介することが, この節の目標.

定理 1.35　等質なカンドル (対称空間) は, カンドル組 (対称対) と対応する.

この定理の正確な主張は, 以下の命題に分けて述べる. まずは, 等質なカンドルからカンドル組を構成する.

命題 1.36　(X, s) を等質カンドル (対称空間) とする. このとき, 以下の (G, K, σ) はカンドル組 (対称対):

$$G := \mathrm{Aut}(X, s), \quad p \in X, \quad K := G_p, \quad \sigma : G \to G : g \mapsto s_p \circ g \circ s_p^{-1}.$$

次に, カンドル組から等質なカンドルを構成する.

命題 1.37　(G, K, σ) をカンドル組 (対称対) とする. このとき, 次の s により G/K は等質なカンドル (対称空間) になる: $s_{[g]}([h]) := [g\sigma(g^{-1}h)]$. このとき特に $G \subset \mathrm{Aut}(G/K, s)$.

自然に $G \curvearrowright G/K$ $(g.[h] := [gh]$ により$)$ だったことに注意.

問題 1.38（レポート問題 4）　命題 1.37 の証明を, 講義で省略した部分を補って完成させよ.

注意 1.39　上で定義した s は, 次のように考えると意味が分かりやすい:

(1)　原点 $[e]$ では次のように定めている: $s_{[e]}([h]) = [\sigma(h)]$.

(2)　他の点 $[g]$ には, g の作用を使ってばらまいている: $s_{[g]} = g \circ s_{[e]} \circ g^{-1}$.

1.7　等質な対称空間の例

等質な対称空間および対称対の例を紹介する.

例 1.40　任意の (G, K) に対して, $\sigma = \mathrm{id}$ とすると, (G, K, σ) は対称対. これから得られる対称空間は, 自明な対称空間.

以下では, 次の群を単に $\mathrm{O}(n)$ と略記することとする ($\mathrm{SO}(n)$ や $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$ 等も同様に略記):

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{O}(n) \right\}.$$

また, I_n を単位行列とし, 次の行列 $I_{p,q}$ を用いる:

$$I_{p,q} := \begin{bmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{bmatrix}.$$

例 1.41　$\sigma(g) := I_{1,n} g I_{1,n}$ とおくと, 以下は対称対. 得られる対称空間は S^n と同型:

(1)　$(\mathrm{SO}(n+1), \mathrm{SO}(n), \sigma)$.

(2)　$(\mathrm{O}(n+1), \mathrm{O}(n), \sigma)$.

例 1.42　$(\mathrm{O}(p+q), \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q), \sigma)$ は, $\sigma(g) := I_{p,q} g I_{p,q}$ とすると対称対である. 従って, 実グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{R}^n)$ は対称空間になる.

例 1.43　$(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{SO}(n), \sigma)$ は, $\sigma(g) := {}^t g^{-1}$ とすると対称対である. 特に $n = 1$ のときを考えると, 上半平面は対称空間.

例 1.44　$(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{O}(n), \sigma)$ は, 上と同じ σ により対称対である. 得られる対称空間は "$\mathbb{R}^n$ 上の正定値内積全体の集合" と同一視できる.

第 2 章

リー代数

ここでは, リー代数の基本的な事項を紹介する. 特に, 後の議論で用いられるルート系や岩澤分解などに主眼を置き, その具体例を行列を使って記述する.

2.1 リー代数の準備

リー代数の定義と簡単な例を復習する.

定義 2.1 $\mathfrak{g}$ を実線型空間とし, $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を双線型写像とする. このとき $(\mathfrak{g}, [,])$ が **リー代数** とは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] = -[Y, X]$.

(ii) $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

リー代数を単に $\mathfrak{g}$ で表すことも多い. 次が最も典型的な例.

例 2.2 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := M(n, \mathbb{R})$ は次によってリー代数: $[X, Y] := XY - YX$.

リー代数の例を与える一つの方法は, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の部分代数として与える方法である.

定義 2.3 $\mathfrak{g}$ をリー代数とする. $\mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}$ 内の **リー部分代数** とは, 次が成り立つこと:

(i) $\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ 内の線型部分空間.

(ii) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}'$, $[X, Y] \in \mathfrak{g}'$.

容易に分かるように, リー部分代数はリー代数である.

例 2.4 以下は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ のリー部分代数:

(1) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$.

(2) $\mathfrak{o}(p, q) := \{X \in \mathfrak{gl}(p + q, \mathbb{R}) \mid {}^{t}XI_{p,q} + I_{p,q}X = 0\}$.

上記と全く同様に, 複素行列全体も (実線型空間とみなして) リー代数になり, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 等も定義することができる.

2.2　階別リー代数

ここでは階別リー代数を紹介する. 階別 Lie 代数は, graded Lie algebra の直訳のつもりで使っているが, 次数付き Lie 代数と呼ばれることもある.

定義 2.5　線型空間としての直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が **階別 Lie 代数** であるとは, 次が成り立つこと: $[\mathfrak{g}^p, \mathfrak{g}^q] \subset \mathfrak{g}^{p+q}$ $(\forall p, q \in \mathbb{Z})$.

定義 2.6　階別 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が **第 ν 種** であるとは, 次が成り立つこと:

(i)　$\mathfrak{g}^\nu \neq 0$,

(ii)　$|p| > \nu$ ならば $\mathfrak{g}^p = 0$.

例 2.7　$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ (または $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$) に対して, 次は第 1 種の階別 Lie 代数を与える:

$$\mathfrak{g}^{-1} := \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} & & \\ \hline * & & \\ * & & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{0} := \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} * & & \\ \hline & * & * \\ & * & * \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{1} := \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} & * & * \\ \hline & & \\ & & \end{array} \right) \right\}$$

例 2.8　$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ (または $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$) に対して, 次は第 1 種の階別 Lie 代数を与える:

$$\mathfrak{g}^{-1} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} & & \\ & & \\ \hline * & * & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{0} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & \\ * & * & \\ \hline & & * \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{1} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} & & * \\ & & * \\ \hline & & \end{array} \right) \right\}$$

例 2.9　$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ (または $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$) に対して, 次は第 2 種の階別 Lie 代数を与える:

$$\mathfrak{g}^{-2} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline * & & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{-1} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline * & & \\ \hline & * & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{0} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} * & & \\ \hline & * & \\ \hline & & * \end{array} \right) \right\},$$

$$\mathfrak{g}^{1} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} & * & \\ \hline & & * \\ \hline & & \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{g}^{2} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} & & * \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right) \right\}.$$

命題 2.10　上と同様に, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ (または $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$) をブロック分割することにより, 階別 Lie 代数を構成することができる.

2.3　階別リー代数の構成方法

以下では $\mathfrak{g}$ はリー代数を表すものとする.

定義 2.11　各 $X \in \mathfrak{g}$ に対し, 次を **随伴写像** という: $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : Y \mapsto [X, Y]$.

随伴写像 ad_X は明らかに線型である.

命題 2.12　$Z \in \mathfrak{g}$ に対し, ad_Z が対角化可能であり, 全ての固有値が整数であるとする. このとき, 次によって階別リー代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が得られる:

$$\mathfrak{g}^k := \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_Z(X) = kX\}.$$

このような $Z \in \mathfrak{g}$ を, 階別リー代数の **特性元** と呼ぶ.

例 2.13　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ に対して, 次は階別リー代数の特性元である:

$$Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}.$$

ちなみに, 特性元の整数倍も特性元となるが, それらから得られる階別リー代数は同じものとみなすことが多い.

例 2.14　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ に対して, 次の元の整数係数一時結合は, 階別リー代数の特性元:

$$H^1 := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad H^2 := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$

問題 2.15（レポート問題 5）　上の H^1 が特性元であることを示せ. また, H^1 から得られる階別リー代数を書け.

実は, 半単純リー代数に対しては, このような特性元を用いた方法で全ての階別リー代数が得られることが分かっている.

2.4　半単純リー代数

ここでは半単純リー代数の定義と例を紹介する. 引き続き $\mathfrak{g}$ はリー代数を表すとする.

定義 2.16　$\mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}$ 内の **イデアル** であるとは, 次が成り立つこと:

(i)　$\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ 内の線型部分空間.

(ii)　$\forall X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{g}', [X, Y] \in \mathfrak{g}'$.

当然ながら, イデアルはリー部分代数である.

例 2.17　$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 内のイデアルである.

定義 2.18　$\mathfrak{g}$ が **単純** とは, $\dim\mathfrak{g} > 1$ であり, かつ非自明なイデアルをもたないこと.

例 2.19　$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ は単純リー代数である.

定義 2.20　$\mathfrak{g}$ が **半単純** であるとは, 単純リー代数の直和として書けること.

例 2.21　$\mathfrak{h}^3 = \mathrm{Span}\{x,y,z\}$ とし, 括弧積を次で定義する: $[x,y]=z$, $[y,z]=[z,x]=0$ (これを 3 次元 Heisenberg リー代数と呼ぶ). このとき $\mathfrak{h}^3$ は半単純ではない.

2.5　Killing 形式

ここでは, リー代数 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を定義し, これを用いて半単純性が判定できることを紹介する.

定義 2.22　次で定義される写像 $B:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ を **Killing 形式** と呼ぶ:

$$B(X,Y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y).$$

命題 2.23　Killing 形式 B は対称双線型写像であり, 次をみたす:

$$B([X,Y],Z) + B(Y,[X,Z]) = 0 \quad (\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}).$$

例 2.24　一般線型 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ の Killing 形式 B は次をみたす:

$$B(X,Y) = 2n\mathrm{tr}(XY) - 2\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y).$$

命題 2.25　Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のイデアルを $\mathfrak{g}'$ とし, それぞれの Killing 形式を B, B' とする. このとき B' は B の制限となる, すなわち,

$$B' = B|_{\mathfrak{g}'\times\mathfrak{g}'}.$$

例 2.26　特殊線型 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ の Killing 形式 B は次をみたす:

$$B(X,Y) = 2n\mathrm{tr}(XY).$$

定理 2.27　$\mathfrak{g}$ が半単純であるための必要十分条件は, Killing 形式 B が非退化となること.

2.6　Cartan 分解

以下では, $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数, B を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とする. 写像 $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が **対合** であるとは, θ が Lie 代数としての自己同型写像であり, $\theta^2 = \mathrm{id}$ をみたすこと.

定義 2.28　対合 $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が **Cartan 対合** であるとは, 次で定義される B_θ が正定値となること:

$$B_\theta(X, Y) := -B(X, \theta(Y)) \qquad (\text{for } X, Y \in \mathfrak{g}).$$

Cartan 対合 θ は対合なので, その固有値は ± 1 のいずれかである.

定義 2.29　Cartan 対合 θ による固有空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を **Cartan 分解** と呼ぶ. ただしここで, $\mathfrak{k}$ は固有値 1, $\mathfrak{p}$ は固有値 -1 に対応する固有空間である.

例 2.30　特殊線型リー代数 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ に対して, $\theta(X) := -{}^tX$ は Cartan 対合. また, これによって得られる Cartan 分解 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は, 次で与えられる:

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n), \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \mid X = {}^tX\}.$$

命題 2.31　Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は次をみたす:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

定理 2.32　任意の半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, Cartan 対合が存在する. さらに, Cartan 対合は (内部自己同型による) 共役を除いて一意である.

命題 2.33　任意の $X \in \mathfrak{p}$ に対して, ad_X は B_θ に関して対称である. よって ad_X は対角化可能であり, 固有値は全て実数になる.

従って $X \in \mathfrak{p}$ の中で, ad_X の固有値が全て整数になるものが存在すれば, それは階別リー代数の特性元になる. 実は, 特性元は (共役を除いて) このような形のものに限る.

2.7　極大可換部分代数

以下では, $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数, θ を Cartan 対合, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とする.

定義 2.34　$\mathfrak{p}$ 内の部分空間 $\mathfrak{a}$ が **極大可換** であるとは, 以下が成り立つこと:

(1)　$\mathfrak{a}$ は可換. すなわち, $\forall X, Y \in \mathfrak{a}$, $[X, Y] = 0$.

(2)　$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}$ とし, $\mathfrak{a}'$ が可換部分空間のとき, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$.

例 2.35　$\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ のとき, 次は極大可換部分空間:

$$\mathfrak{a} := \left\{ \sum a_k E_{kk} \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}.$$

問題 2.36（レポート問題 6）　上の例を示せ. (面倒な場合は $n = 3$ としてよい)

定理 2.37　$\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間は共役を除いて一意である.

従って, 階別リー代数の特性元 $Z \in \mathfrak{g}$ を探す場合には, $Z \in \mathfrak{a}$ として良いことが分かる.

2.8　制限ルート系

以下では, $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数, B を Killing 形式, θ を Cartan 対合, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間とする. また, $\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ の双対空間とする.

定義 2.38　各 $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対して, 次を α に対応する **制限ルート空間** と呼ぶ:

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \quad (\forall H \in \mathfrak{a})\}.$$

定義 2.39　$\alpha \in \mathfrak{a}^*$ が ($\mathfrak{a}$ に関する) **制限ルート** とは, 次が成り立つこと: $\alpha \neq 0$, $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$. また, ルート全体の集合を **制限ルート系** と呼び, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ で表す.

命題 2.40　制限ルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に対して, 次が成り立つ:

(1)　$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha)$ は B_θ に関する直交直和分解,

(2)　$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ $(\forall \alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\})$,

(3)　$\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ $(\forall \alpha \in \Delta \cup \{0\})$.

この (1) の分解を **制限ルート空間分解** と呼ぶ.

例 2.41　$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ に対して, 前述の Cartan 分解を考えると, 次が成り立つ:

(1)　$\mathfrak{a} := \{\sum a_k E_{kk} \mid \mathrm{tr} = 0\}$ は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間,

(2)　$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}$,

(3)　$\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \mathrm{span}\{E_{ij}\}$, ただしここで $\varepsilon_i(\sum a_k E_{kk}) := a_i$,

(4)　$\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$.

2.9　単純ルート

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ の階別リー代数の特性元 Z は, 上の結果より, 対角行列を考えれば良い. さらに, 適当な共役を取ることにより, 対角成分を入れ替えても良いことが分かる. ここでは, このような対角成分の入れ替えに相当する手続きを説明する.

定義 2.42　Δ をルート系とする. $\Delta \supset \Lambda := \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ が**単純ルート系** であるとは, 次が成り立つこと:

(i) Λ は $\mathfrak{a}^*$ の基底,

(ii) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して, 次をみたす $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ または $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ が存在する: $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r$.

定義 2.43　Δ をルート系, $\Lambda = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ を単純ルート系とし, $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r \in \Delta$ とする.

(1) $\alpha \in \Delta$ が **正ルート** とは, $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となること.

(2) $\alpha \in \Delta$ が **負ルート** とは, $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ となること.

(3) $\alpha \in \Delta$ が **最高ルート** とは, 次が成り立つこと: 任意の $c'_1\alpha_1 + \cdots + c'_r\alpha_r \in \Delta$ に対して, $c_1 \geq c'_1$, $\dots$, $c_r \geq c'_r$.

例 2.44　$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ のとき, $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ $(i = 1, \dots, n-1)$ とおくと, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ は単純ルート系. 最高ルートは, $\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}$.

問題 2.45（レポート問題 7）　例 2.44 を $n = 4$ のときに示せ.

制限ルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ は抽象的な意味でのルート系なので, ルート系の一般論はそのまま使える. 特に, 次が成り立つ.

定理 2.46　全ての制限ルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に対し, 単純ルート系が存在する. さらに, 単純ルート系 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ を一つ固定したとき, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ は, 共役で次の集合内に移すことができる:

$$\mathfrak{a}^+ := \{X \in \mathfrak{a} \mid \alpha_i(X) \geq 0 \ (\forall i)\}.$$

第 3 章

岩澤分解と余等質性 1 作用

3.1　簡単な例

例 3.1　$\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ への次の群の作用は余等質性 1 であり, 軌道も具体的に記述できる:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\}, \qquad N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.2　可解リー代数

定義 3.2　$\mathfrak{g}$ をリー代数とする. このとき

(1)　$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] := \{\sum_{i=1}^{n} [X_i, Y_i] \mid X_i, Y_i \in \mathfrak{g}\}$ を **derived ideal** と呼ぶ.

(2)　$\mathfrak{g}$ が **冪零** とは, $\mathfrak{g}_1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots, \mathfrak{g}_k := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k]$ で定義される列が有限回で $\{0\}$ となること.

(3)　$\mathfrak{g}$ が **可解** とは, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が冪零となること.

例 3.3　次は可解リー代数:

$$\mathfrak{s} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

さらに次はベクトル空間の直和: $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{o}(2) \oplus \mathfrak{s}$.

例 3.4　$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 内の狭義上三角行列全体は冪零リー代数 (特に $n = 3$ のときを Heisenberg リー代数と呼ぶ), 広義上三角行列全体は可解リー代数.

問題 3.5（レポート問題 8）　例 3.4 を $n = 3$ のときに示せ.

命題 3.6　リー代数に対し, 以下が成り立つ:

(1)　可換ならば冪零, 冪零なら可解.

(2)　冪零リー代数の部分リー代数は冪零, 可解リー代数の部分リー代数は可解.

3.3　岩澤分解

ここでは, 先に述べた $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の良い分解が, 一般の (半) 単純リー代数でもできることを照会する. これまでの記号を用い, $\mathfrak{g}$ を単純リー代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ とし, その単純ルート系を $\Lambda = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ とする.

定義 3.7　各ルート $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r$ に対して, $\mathrm{level}(\alpha) := c_1 + \cdots + c_r$ を α の (Λ に関する) **レベル** と呼ぶ.

補題 3.8　$\mathfrak{g}^k := \bigoplus_{\mathrm{level}(\alpha)=k} \mathfrak{g}_\alpha$ とおくと, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ は階別リー代数.

命題 3.9　以下が成り立つ:

(1)　$\mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$ は冪零リー代数,

(2)　$\mathfrak{s} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ は可解リー代数 (特に $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$),

(3)　$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{s} = 0$.

補題 3.10　各 $\alpha > 0$ について, 以下が成り立つ:

(1)　$(1+\theta)\mathfrak{g}_\alpha = (1+\theta)\mathfrak{g}_{-\alpha}$ $(=: \mathfrak{k}_\alpha)$,

(2)　$(1-\theta)\mathfrak{g}_\alpha = (1-\theta)\mathfrak{g}_{-\alpha}$ $(=: \mathfrak{p}_\alpha)$.

従って, $\mathfrak{g}$ のルート空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ の両辺を $(1 \pm \theta)$ で送ることにより, 次を得る (これもルート空間分解と呼ぶ).

命題 3.11　以下が成り立つ:

(1)　$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{k}_\alpha$,

(2)　$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{p}_\alpha$.

また, 各 $\alpha > 0$ に対して $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \mathfrak{k}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ は容易に確かめられる.

定理 3.12　$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ は, ベクトル空間としての直和分解 (これを **岩澤分解** と呼ぶ).

この分解は, 直交直和ではなく, またリー代数の直和でもないことに注意する. ちなみにリー群にも, 対応する分解 $G = KAN$ がある.

命題 3.13　S を, 上記の $\mathfrak{s}$ をリー代数にもつ G 内の連結リー部分群とする. このとき $M := G/K \cong S/\{e\} \cong S$.

$\mathbb{R}\mathrm{H}^2 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ の場合には, 確かにそうなっていた. 状況証拠として次を挙げておく.

命題 3.14　以下が成り立つ:

(1)　$M \supset S.[e] \cong S/S_{[e]} = S/(S \cap K)$.

(2)　$\dim \mathfrak{s} = \dim \mathfrak{p}$ $(= \dim G/K)$.

(3)　(再掲) $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{k} = 0$.

3.4　余等質性 1 作用

ここでは, 岩澤分解の応用として, 非コンパクト型対称空間への余等質性 1 作用の話題を紹介する. まずは全体像を記述する定理を証明抜きで述べる.

定理 3.15　$M = G/K$ を非コンパクト型の既約リーマン対称空間とする (これは対応する $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \theta)$ で言うと, $\mathfrak{g}$ が単純で θ が Cartan 対合の場合に相当する). このとき連結リー群による余等質性 1 作用は以下のいずれかをみたす:

(K)　唯一の特異軌道をもつ,

(A)　特異軌道はなく, 唯一の極小軌道をもつ,

(N)　特異軌道はなく, 全ての軌道は合同である.

ここでは, 上記のような群作用のうち, (A)-type, (N)-type については, 岩澤分解を用いて構成できることを紹介する. 次は準備のための一般的な補題.

補題 3.16　一般に S を連結リー群とし, S' をその余次元 1 の部分群とする. このとき $S' \curvearrowright S$ は余等質性 1 であり, 特異軌道をもたない.

従って岩澤分解の可解部分 S 内で, 余次元 1 の部分群があれば, 特異軌道をもたない余等質性 1 作用が得られる. ここで $\ominus$ は (B_θ に関する) 直交補空間を表すとする.

命題 3.17　$0 \neq H \in \mathfrak{a}$ とする. このとき $\mathfrak{s}_H := \mathfrak{s} \ominus \mathrm{span}\{H\} = (\mathfrak{a} \ominus \mathrm{span}\{H\}) \oplus \mathfrak{n}$ は余次元 1 のイデアル (特にリー部分代数). 従って対応する連結リー群による $S_H \curvearrowright M = G/K$ は余等質性 1 作用で, 特異軌道をもたない.

命題 3.18　上記の S_H は S 内の正規部分群である. 一般に S' が S 内の正規部分群ならば, その作用の全ての軌道は合同である.

命題 3.19　$\alpha \in \Lambda$ (単純ルート) とし, $0 \neq X \in \mathfrak{g}_\alpha$ とする. このとき $\mathfrak{s}_X := \mathfrak{s} \ominus \mathrm{span}\{X\} = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{n} \ominus \mathrm{span}\{X\})$ は余次元 1 のリー部分代数. 従って対応する連結リー群による $S_X \curvearrowright M = G/K$ は余等質性 1 作用で, 特異軌道をもたない.

問題 3.20（レポート問題 9）　上記の $\mathfrak{s}_X$ がリー部分代数であることを示せ.

定理 3.21　上記の S_H の作用は (N)-type であり, S_X の作用は (A)-type である. さらに, (A)-type および (N)-type の余等質性 1 作用は, “軌道同値” を除いて全てこの方法で得られる.

ここで軌道同値は, 作用している群が “共役” であることよりも弱い同値関係である.

定義 3.22　群作用 $G, G' \curvearrowright M$ が **軌道同値** とは, 以下が成り立つこと: $\exists f : M \to M$: 全単射 (or diffeo, 文脈に依存する) : $\forall p \in M,\ f(G.p) = G'.f(p)$.

第 4 章

放物型部分群と可解多様体

4.1　放物型部分代数

定義 4.1　$\mathfrak{g}$ を半単純リー代数とする. $\mathfrak{g}$ 内の部分リー代数 $\mathfrak{q}$ が **放物型部分代数** であるとは, 次が成り立つこと: 非自明な階別リー代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ が存在し, $\mathfrak{q} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}^k$.

ここで自明な階別リー代数とは, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ で得られるもの.

例 4.2　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ または $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ のとき, 以下は放物型部分代数:

$$\mathfrak{q} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right) \right\}, \quad \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right) \right\}, \quad \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} * & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right) \right\}.$$

4.2　双対基底と放物型部分代数

以下, これまでの記号を用いる. すなわち, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分代数, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ をルート系, $\Lambda = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ を単純ルート系とする.

定義 4.3　$\mathfrak{a}$ の基底 $\{H^1, \ldots, H^r\}$ が Λ の **双対基底** であるとは, 以下が成り立つこと: $\alpha_i(H^j) = \delta_{ij}$ (Kronecker delta).

例 4.4　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ または $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ のとき, 以前の記号を用いて $\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ とおく. すると $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ は単純ルート系であり, その双対基底は以下で与えられる:

$$H^1 := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H^2 := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

問題 4.5（レポート問題 10）　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ とし, 以前の記号を用いて $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ とおく ($i \in \{1, 2, 3\}$). このとき $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ の双対基底 $\{H^1, H^2, H^3\}$ を求めよ.

命題 4.6　$c_1, \ldots, c_r \in \{0, 1\}$ とし, $Z := c_1 H^1 + \cdots + c_r H^r$ とおく (ただし $Z \neq 0$ とする). このとき

(1)　$\mathfrak{g}^k := \{X \in \mathfrak{g} \mid [Z, X] = kX\}$ とおくと, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ は階別リー代数,

(2)　$\mathfrak{q} := \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}^k$ は放物型部分代数.

命題 4.7　$\mathfrak{g}$ 内の全ての放物型部分代数は, 上の命題で得られたもののいずれかと共役.

例 4.8　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ または $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ のとき, その放物型部分代数は H^1, H^2, $H^1 + H^2$ から得られる 3 種類のいずれかと共役.

問題 4.9（レポート問題 11）　上の例 4.8 において, H^2, $H^1 + H^2$ から得られる放物型部分代数を求めよ.

4.3　単純ルートと放物型部分代数

放物型部分代数を, 単純ルート $\Lambda = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ の部分集合を用いて表す. Λ' を Λ 内の真部分集合とする.

定義 4.10　$\alpha = c_1 \alpha_1 + \cdots + c_r \alpha_r \in \Delta \cup \{0\}$ に対し, 次を Λ' **に関するレベル** とよぶ:

$$\mathrm{level}_{\Lambda'}(\alpha) := \sum_{\alpha_i \in \Lambda \setminus \Lambda'} c_i.$$

例 4.11　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ または $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ のとき, 上と同様に $\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ とすると, その真部分集合は以下の 3 通り: $\emptyset$, $\{\alpha_1\}$, $\{\alpha_2\}$.

命題 4.12　Λ 内の真部分集合 Λ' に対して,

(1)　$\mathfrak{g}^k := \bigoplus_{\mathrm{level}_{\Lambda'}(\alpha) = k} \mathfrak{g}_\alpha$ とおくと, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ は階別リー代数,

(2)　$\mathfrak{q} := \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}^k$ は放物型部分代数.

命題 4.13　全ての放物型部分代数は, 共役を除いて上の命題の方法で得られる.

例 4.14　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ または $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ のとき, その放物型部分代数は $\emptyset$, $\{\alpha_1\}$, $\{\alpha_2\}$ から得られる 3 種類のいずれかと共役.

4.4 Langlands 分解

半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ には, 岩澤分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ があった. ここでは, 放物型部分代数 $\mathfrak{q}$ にも類似の分解があることを紹介する.

命題 4.15 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$ を階別リー代数, $\mathfrak{q} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}^k$ を付随する放物型部分代数とする. このとき以下が成り立つ:

(1) $\mathfrak{l}_\mathfrak{q} := \mathfrak{g}^0$ は $\mathfrak{q}$ 内の部分リー代数.

(2) $\mathfrak{n}_\mathfrak{q} := \bigoplus_{k>0} \mathfrak{g}^k$ は $\mathfrak{q}$ 内の冪零部分リー代数.

(3) $\mathfrak{q} = \mathfrak{l}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ はベクトル空間としての直和 (これを **Chevalley 分解** と呼ぶ).

$\Phi \subsetneq \Lambda$ から得られる放物型部分代数を $\mathfrak{q}_\Phi$, その Chevalley 分解を $\mathfrak{q}_\Phi = \mathfrak{l}_\Phi \oplus \mathfrak{n}_\Phi$ 等の記号で表すことが多い. 以下の議論では, 放物型部分代数は階別リー代数の特性元 Z を使う方が便利なことが多い.

例 4.16 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ とし, H^1 から得られる放物型部分代数を $\mathfrak{q}_1$ とする. このとき, Chevalley 分解 $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ は次で与えられる:

$$\mathfrak{l}_1 := \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} * & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right) \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}, \quad \mathfrak{n}_1 := \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

次に, Chevalley 分解に現れる $\mathfrak{l}_\Phi$ をさらに分解する. 例えば上記の $\mathfrak{l}_1$ の場合は, 次の分解をもつ:

$$\mathfrak{l}_1 := \mathrm{span}\{H^1\} \oplus \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right) \mid \mathrm{tr} = 0 \right\}.$$

命題 4.17 $Z := H^{i_1} + \cdots + H^{i_m}$ (ただし $i_1 < \cdots < i_m$) とし, これから得られる放物型部分代数を $\mathfrak{q}$, Chevalley 分解を $\mathfrak{q} = \mathfrak{l}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ とする. このとき以下が成り立つ:

(1) $\mathfrak{a}_\mathfrak{q} := \mathrm{span}\{H^{i_1}, \ldots, H^{i_m}\}$ は $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}$ 内の可換な部分リー代数.

(2) $\mathfrak{m}_\mathfrak{q} := \mathfrak{l}_\mathfrak{q} \ominus \mathfrak{a}_\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}$ 内の部分リー代数.

(3) $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{a}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ はベクトル空間としての直和 (これを **Langlands 分解** と呼ぶ).

4.5　Langlands 分解の可解部分

命題 4.18　$\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{a}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ を Langlands 分解とする．このとき $\mathfrak{s}_\mathfrak{q} := \mathfrak{a}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ は可解な部分リー代数.

ちなみに $Z := H^1 + \cdots + H^r$ とした場合には, Langlands 分解の可解部分と岩澤分解の可解部分は一致する (この場合の放物型部分代数は "極小" と呼ばれる).

例 4.19　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ とし, H^1 から定まる放物型部分代数を $\mathfrak{q}_1$ とする．このときその Langlands 分解の可解部分は

$$\mathfrak{s}_1 := \mathrm{span}\{H^1\} \oplus \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

問題 4.20（レポート問題 12）　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(5, \mathbb{R})$ とし, Λ を標準的な単純ルート系とする．このとき $Z := H^1 + H^2$ から得られる放物型部分代数とその Langlands 分解を求めよ.

定理 4.21　$\mathfrak{s}_\mathfrak{q} := \mathfrak{a}_\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{n}_\mathfrak{q}$ を Langlands 分解の可解部分とする．このとき $\mathfrak{s}_\mathfrak{q}$ は Einstein 内積をもつ.

Langlands 分解の可解部分は, これ以外にも余等質性 1 作用の研究などで重要な役割を果たす．したがって, その定義や具体例を知っていると, 取り組むことができる問題が実は数多くある.