Discrete symmetric spaces, quandles, and their subsets

TAMARU, Hiroshi (田丸 博士)

Hiroshi University (広島大学)

広島大学数学教室談話会
(広島大学)
2018/07/24

Abstract (1/2)

本業 (昨年北京で話した内容)

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{対称空間}} \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{\text{左不変計量}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
& \boxed{\text{群作用・部分多様体}}
\end{tikzcd}
$$

Abstract (2/2)

本日の講演内容 (目次)

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{対称空間}} \arrow[r] \arrow[d, "(1)"'] \arrow[dr] & \boxed{\text{左不変計量}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\boxed{\text{カンドル}} \arrow[r, shift right, "(3)"'] & \boxed{\text{群作用・部分多様体}} \arrow[l, shift right, "(2)"']
\end{tikzcd}
$$

Sec. 1 - Quandles (1/5)

$\boxed{\text{対称空間}} \longrightarrow \boxed{\text{カンドル}}$

Def. (Joyce 1982)

Let X be a set, and consider

- $s : X \times X \to X : (y, x) \mapsto s_x(y)$.

Then (X, s) is a **quandle** (or **symmetric set**) if

(S1) $\forall x \in X$, $s_x(x) = x$.

(S2) $\forall x \in X$, s_x is bijective (or $s_x^2 = \mathrm{id}$).

(S3) $\forall x, y \in X$, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

Sec. 1 - Quandles (2/5)

Ex.

- (リーマン) 対称空間はカンドル.
- 球面 S^n は "軸に関する折り返し" によりカンドル.
- 円 S^1 上の n 等分点からなる集合は (部分) カンドル.
  (これを **dihedral quandle** という)
- 群 G は $s_g(h) := gh^{-1}g$ によりカンドル.

問題 (1)

- (対称空間論を参考にして) カンドルの "構造理論" を作れ.

Sec. 1 - Quandles (3/5)

Def. (Ishihara-T. 2016)

- A quandle (X, s) is **flat** if
$G^0(X, s) := \langle \{ s_x \circ s_y \mid x, y \in X \} \rangle$ is abelian.

Note

- This is a characterizing condition for a Riem. symmetric space to be flat (i.e., curvature $\equiv 0$).

Ex.

- S^1 is flat. $(\because \ G^0(S^1, s) = \mathrm{SO}(2).)$
- R_n (dihedral quandle) is flat.

Sec. 1 - Quandles (4/5)

Thm. (Ishihara-T. 2016)

- (X, s) is flat finite connected iff
  it is isomorphic to a "discrete torus" with odd cardinality.

Note

- R_n is regarded as a "discrete S^1".
- A discrete torus is: $R_{n_1} \times \cdots \times R_{n_k}$.

Note

The above theorem is a discrete version of:

- A flat compact connected Riem. symmetric space is a torus.

Sec. 1 - Quandles (5/5)

関連研究

“二点等質” カンドル:

- 定義 (T. 2013),
- 有限な場合の分類 (Kamada-T.-Wada 2016, Wada 2015, Vendramin 2017).

今後の研究計画

- 問題 (1)-1: 被覆, 単連結をカンドルに定義せよ (進展中).
- 問題 (1)-2: 階数をカンドルに定義せよ (構想中).
  (二点等質と階数 1 は関係するか？)
- 問題 (1)-3: 曲率, 定曲率, ... は定義できるか?

Sec. 2 - Examples (1/8)

$\boxed{\text{群作用・部分多様体}} \longrightarrow \boxed{\text{カンドル}}$

問題 (2)

- “良い” 有限カンドルの例を構成せよ.
  (e.g., 非連結な有限平坦カンドル...)

方針

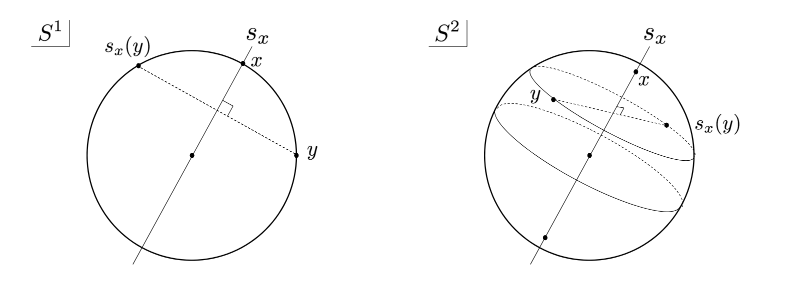
- 部分カンドル := $s_x^{\pm 1}$ $(\forall x)$ で閉じる部分集合.
- 対称空間内の部分カンドルで, 良さそうなものを見付ける.

Sec. 2 - Examples (2/8)

Ex. (sphere)

The unit sphere S^n is a symmetric space with

- $s_x(y) = 2\langle x, y\rangle x - y$.



(Thanks to Y. Tada)

Sec. 2 - Examples (3/8)

Ex. (Furuki-T.)

- $A(1,n) := \{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$ は S^{n-1} 内の部分カンドルで，さらに等質，非連結，平坦.

Proof ($n = 3$)

- $s_{\pm e_1} = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$，他も同様.
- $s_{\pm e_i}$ は全て対角行列で表される．よって平坦.
- $s_{\pm e_i}$ は符号しか変えない．よって非連結.

Note

- (X, s) が 連結 :$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Inn}(X,s) := \{s_x \mid x \in X\} \curvearrowright X$ が推移的.
- (X, s) が 等質 :$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Aut}(X,s) \curvearrowright X$ が推移的.

Sec. 2 - Examples (4/8)

Def.

The **real Grassmannian** $(G_k(\mathbb{R}^n), s)$ is define by

- $G_k(\mathbb{R}^n) := \{V : k\text{-dim. linear subspace in } \mathbb{R}^n\}$;
- $s_V(W) :=$ "the reflection of W wrt V".

Ex.

- For $G_2(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{Span}\{e_1,e_2\}}(\mathrm{Span}\{e_1, e_3\}) &= \mathrm{Span}\{e_1, -e_3\} \\ &= \mathrm{Span}\{e_1, e_3\}. \end{aligned}$$

Sec. 2 - Examples (5/8)

Def.

The **real oriented Grassmannian** $(G_k(\mathbb{R}^n)^\sim, s)$ is define by

- $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim := \{(V, \sigma) \mid V \in G_k(\mathbb{R}^n),\ \sigma : \text{orientation}\}$
  (an orientation is $\sigma \in \{\text{bases of } V\}/\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})^+$);
- $s_{(V,\sigma)}(W, \tau) :=$ "the reflection of (W, τ) wrt V".

Ex.

- For simplicity, $(i, j) := (\mathrm{Span}\{e_i, e_j\}, [(e_i, e_j)]) \in G_2(\mathbb{R}^n)^\sim$.
- $s_{(1,2)}(1, 3) = (\mathrm{Span}\{e_1, -e_3\}, [(e_1, -e_3)]) = -(1, 3)$.

Note

- $G_1(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^n, \quad G_1(\mathbb{R}^{n+1})^\sim \cong S^n$.

Sec. 2 - Examples (6/8)

Thm. (Furuki-T.)

For $G_k(\mathbb{R}^n)^{\sim}$,

- $\pm(i_1, \ldots, i_k) := (\mathrm{Span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}, \pm[(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})])$;
- $A(k,n) := \{\pm(i_1, \ldots, i_k) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$.

Then $A(k,n)$ is a subquandle in $G_k(\mathbb{R}^n)^{\sim}$, which is flat, homogeneous, disconnected (and nontrivial).

Note

有限平坦カンドルについて,

- “連結” なものは分類済み (極めて限定的だった).
- “等質” なものが数多く存在する.

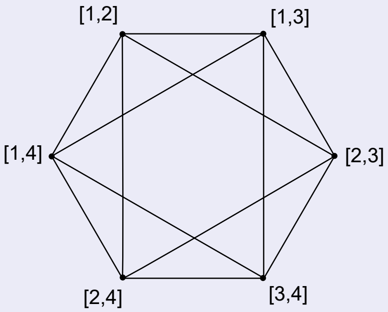
Sec. 2 - Examples (7/8)

Note

For $A(2,4)$,

- $s_{(1,2)}(1,3) = -(1,3)$; $s_{(1,2)}(3,4) = (3,4)$; $\cdots$
- join $[i,j]$ and $[k,l]$ if $s_{(i,j)}(k,l) = -(k,l)$.

Then we get



(Thanks to K. Furuki)

Sec. 2 - Examples (8/8)

問題 (2)-1

- (Furuki-T.) グラフから非連結な等質平坦カンドルが作れる．ただし作られるのは $s_x^2 = \mathrm{id}$ となるものだけ．
- その構成法を一般化せよ．等質平坦カンドルを分類せよ．

問題 (2)-2

- 上記以外に，対称空間内の“良い”部分カンドルを見付けよ．
- 一般には，球面の場合ですら (部分カンドルの分類は) 困難．(Weyl 群の軌道となるものについては，進展中)

Sec. 3 - Some subsets (1/5)

$\boxed{\text{カンドル}} \longrightarrow \boxed{\text{群作用・部分多様体}}$

Question

- What are $A(k,n)$ in $G_k(\mathbb{R}^n)^{\sim}$?

Note

- $A(k,n)$ is not antipodal;
- (Chen-Nagano 1988) A subset C in a quandle (X,s) is **antipodal** if $\forall x, y \in C$, $s_x(y) = y$.

Sec. 3 - Some subsets (2/5)

Def.

A subset C in a quandle (X, s) is ***s*-commutative** if

- $s_x \circ s_y = s_y \circ s_x$ $(\forall x, y \in C)$.

Thm. (Nagashiki et al.)

If $n \neq 2k$, or $n = 2k$ with k odd, then

- $A(k, n)$ is a maximal s-commutative subset in $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$;
- such subset in $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ is essentially unique.

Sec. 3 - Some subsets (3/5)

問題 (3)

- 各対称空間 M 内の "極大 s-可換" 部分集合を決定せよ.

Fact

- 一般のカンドルで, 極大 s-可換部分集合は部分カンドル.
- リーマン対称空間 M に対し, $\#$[極大 s-可換部分集合] $< \infty$.

Sec. 3 - Some subsets (4/5)

問題 (3)-1

- $G_k(\mathbb{R}^{2k})^{\sim}$ (k even) 内の極大 s-可換部分集合を決定せよ.
- 注: $G_2(\mathbb{R}^4)^{\sim}$ に対し, $A(2,4)$ は s-可換だが極大ではない.
  $(A(2,4) := \pm\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\})$

問題 (3)-2

- 他の対称空間で, 極大 s-可換部分集合を決定せよ.
- (Akase et al.) 特にコンパクト古典群の場合に決定;
  $\exists M$: 極大 s-可換部分集合は一意ではない...

Sec. 3 - Some subsets (5/5)

問題 (3)-3

- 極大 s-可換を使って, 極大対蹠集合を調べよ.
- 一般に, 対蹠 $\Rightarrow$ s-可換 $\quad (\because s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x)$
- 極大 s-可換の方が決定しやすい場合が多い. (e.g., $G_k(\mathbb{R}^n)^{\sim}$)

問題 (3)-4

- 極大 s-可換部分集合は, 外の対称空間を近似するか？
- デザイン, 符号理論と関係？

Summary (1/2)

本日の講演内容 (目次)

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{対称空間}} \arrow[r] \arrow[d, "(1)"'] \arrow[dr] & \boxed{\text{左不変計量}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\boxed{\text{カンドル}} \arrow[r, shift right, "(3)"'] & \boxed{\text{群作用・部分多様体}} \arrow[l, shift right, "(2)"']
\end{tikzcd}
$$

Summary (2/2)

References

- Tamaru, H.: *J. Math. Soc. Japan* (2013)
- Kamada, S., Tamaru, H., Wada, W.: *Tokyo J. Math.* (2016)
- Wada, K.: *Hiroshima Math. J.* (2015)
- Ishihara, Y., Tamaru, H.: *Proc. Amer. Math. Soc.* (2016)
- Furuki, K., Tamaru, H.: preprint
- Nagashiki, M., et al.: in preparation
- Akase, F., Tamaru, H., Tanaka, M., Tasaki, H.: in preparation

- Thank you very much!