1　幾何学 A・同演習 (2018/06/08): ガイダンス

目的: 多様体論

この講義では (可微分) 多様体の基本的な事項を解説する. 多様体とは, 大雑把に言うと「位相空間であって, その上の写像の微分が定義できるもの」である. もう少し詳しく言うと, 以下の条件をみたすものとして定義される:

(1) ハウスドルフ位相空間である;
(2) 局所的には $\mathbb{R}^n$ 内の開集合と同相;
(3) それらの開集合の貼り合わせが所定の条件をみたす.

方針: この講義の概要

この講義では, 多様体の定義や例を紹介し, 多様体上で定義される諸概念を解説する. そのために, 以下のように順を追って講義を行う:

(1) $\mathbb{R}^n$ 内の (空でない) 開集合;
(2) 座標近傍 := (1) と同相なもの;
(3) 多様体 := (2) を貼り合わせたもの.

諸注意: 演習との連動・試験・レポート・成績

幾何学 A では講義を行い, 幾何学 A 演習では小テストと発表を行う. 成績は以下によって判定する:

(1) 中間試験および期末試験の点数 (講義と演習で共通の試験を行う);
(2) 演習での小テストおよび発表状況 (演習を履修している場合のみ).

なお, 講義と演習の合否は連動させる. また, 上記の点数で合格点に少し足りない場合には, 以下についても成績判定の材料とする:

(1) 演習での小テストおよび発表状況 (発表に挑戦していることが条件);
(2) 試験前の「事前救済レポート」.

演習での発表は, 「授業をするように」行うことを要請する. 特に, 以下に注意すること (注文が多い分, 発表点は大きくします):

(1) 板書は, 板書だけ見ても分かるように, かつ, できるだけ簡潔に;
(2) 口頭での発表も, それだけを聞いても分かるように.

2　幾何学 A・同演習 (2018/06/08): 多様体の定義 (1)

$\mathbb{R}^n$ 内の開集合

$\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離を d で表し, ε-近傍を $U(p;\varepsilon)$ で表す.

定義 2.1. $\mathbb{R}^n \supset O$ が 開集合 とは次が成り立つこと: $\forall p \in O, \exists \varepsilon > 0 : U(p;\varepsilon) \subset O$.

例 2.2. 以下は $\mathbb{R}$ 内の開集合: $\emptyset$, (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $\mathbb{R}$.

例 2.3. 以下は $\mathbb{R}^2$ 内の開集合: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$.

定義 2.4. $\mathcal{O} := \{O \mid O$ は $\mathbb{R}^n$ 内の開集合 $\}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の 標準的な位相 と呼ぶ.

位相空間の復習: 相対位相

定義 2.5. $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とし, $A \subset X$ とする. このとき, 次で定義される $\mathcal{O}_A$ を $\mathcal{O}$ から決まる A 上の 相対位相 という:

$$\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}.$$

問題 1 (小テスト問題 (1))**.** 円 $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ に対し, $\mathbb{R}^2$ 上の標準的な位相から決まる相対位相を考える. このとき円の上半分 $U := \{(x,y) \in S^1 \mid y > 0\}$ が S^1 内の開集合であることを示せ. ($\mathbb{R}^2$ 内の部分集合が開集合かどうかは既知として良い.)

3　幾何学 A・同演習 (2018/06/11): 多様体の定義 (2)

$\mathbb{R}^n$ 内の開集合と同相なもの: 位相空間の復習

定義 3.1. X, Y を位相空間とする. 写像 $f : X \to Y$ が <u>連続</u> とは, 以下が成り立つこと: $\forall O$ (Y 内の開集合), $f^{-1}(O)$ は X 内の開集合.

この講義では, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ という連続写像の例 (例えば多項式, 三角関数, 指数関数, 有理関数, 等を用いて表すことができるもの) は既知として話を進める.

定義 3.2. X, Y を位相空間とする. 写像 $f : X \to Y$ が <u>同相</u> とは, 以下が成り立つこと:
(i) f は全単射; (ii) f は連続; (iii) f^{-1} は連続.

$\mathbb{R}^n$ 内の開集合と同相なもの

定義 3.3. U $(\neq \emptyset)$ を位相空間とし, $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ を考える. このとき (U, φ) が (m 次元) <u>座標近傍</u> とは, 以下が成り立つこと:
(i) $\mathbb{R}^m \supset \varphi(U)$ は開集合; (ii) $\varphi : U \to \varphi(U)$ は同相写像.

例 3.4 (自明な座標近傍)**.** $\mathbb{R}^m \supset O$ を空でない開集合, $\varphi : O \to \mathbb{R}^m$ を包含写像とする. このとき, (O, φ) は m 次元座標近傍.

ここで, O には $\mathbb{R}^m$ の標準的な位相から決まる相対位相を入れていることに注意する. 以下の例でも同様に, 特に断らない限り, その集合に入る最も自然な位相を考えるものとする.

例 3.5. $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ とおく (これを n 次元球面とよぶ). このとき, 以下で定義される (U, φ) は n 次元座標近傍:

$$U := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > 0\}, \quad \varphi : U \to \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n).$$

この例は, 球面 S^n の "上半分" を表している. 例えば, $n = 1$ ならば半円, $n = 2$ ならば北半球. ちなみに $\varphi(U)$ は $\mathbb{R}^n$ 内の "開円盤" になる.

問題 2 (小テスト問題 (2))**.** $U := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$ に対し, $\varphi : U \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$ を考える. このとき次を定義に従って示せ: $\varphi(U) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

例 3.6 (グラフ)**.** $\mathbb{R}^m \supset O$ を空でない開集合, $f : O \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とする. このとき, 以下で定義される (U, φ) は m 次元座標近傍 (これを $y = f(x)$ のグラフという):

$$U := \{(x, y) \in O \times \mathbb{R}^n \mid y = f(x)\}, \quad \varphi : U \to \mathbb{R}^m : (x, y) \mapsto x.$$

グラフの $m=n=1$ のときは, 高校数学で習う通常の $y=f(x)$ のグラフと同じ. また, 先の球面の北半球の例は, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ のグラフに他ならない.

注意 3.7. グラフで表すときの "座標の順番" はどうでも良い. 例えば $(m,n)=(2,1)$ の場合, $z=f(x,y)$, $y=f(x,z)$, $x=f(y,z)$, いずれのグラフも全て座標近傍になる.

例 3.8 (立体射影: グラフにならない例)**.** 以下で定義される (U,φ) は 1 次元座標近傍:

$$U:=\{(x,y)\in S^1 \mid y\neq 1\},\quad \varphi:U\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto\frac{x}{1-y}.$$

注意 3.9. 立体射影において, $(0,1)$ と (x,y) を結ぶ直線と x 軸との交点が $(\varphi(x,y),0)$. この立体射影をとくに $(0,1)$ からの立体射影とよぶ.

命題 3.10. (U,φ) を m 次元座標近傍とし, $U\supset U'$ を空でない開集合とする. このとき $(U',\varphi|_{U'})$ は m 次元座標近傍.

命題 3.11. (U,φ) を m 次元座標近傍, (V,ψ) を n 次元座標近傍とする. また, $\varphi\times\psi:U\times V\to\mathbb{R}^{m+n}:(x,y)\mapsto(\varphi(x),\psi(y))$ と定める. このとき $(U\times V,\varphi\times\psi)$ は $m+n$ 次元座標近傍.

$\mathbb{R}^n$ 内の開集合と同相なもの: 演習問題

問題 3 (差し替え)**.** 例 3.6 の (U,φ) に対して, $\varphi(U)$ および φ^{-1} を予想し, それらを定義に従って確かめよ.

問題 4. 例 3.8 の立体射影と同様に考えて, S^1 に対して $(0,-1)$ からの立体射影を求めよ. また, それが座標近傍を与えることを示せ.

問題 5. $(X,\mathcal{O}_X)$ を位相空間, $A\subset X$ とし, A には $\mathcal{O}_X$ から決める相対位相を入れる. 以下は, 命題 3.10 の証明に用いた事実である. これらを定義に従って示せ:

(1) 開集合内の開集合は開集合である. すなわち, A を X 内の開集合とし, O を A 内の開集合とすると, O は X 内の開集合.

(2) 連続写像の制限は連続である. すなわち, $f:X\to Y$ を連続とすると, $f|_A:A\to Y$ も連続.

4 幾何学 A・同演習 (2018/06/14): 多様体の定義 (3)

多様体の定義: 位相空間の復習

定義 4.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が ハウスドルフ空間 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x, y \in X$ $(x \neq y)$, $\exists O_x, O_y \in \mathcal{O}$: $x \in O_x$, $y \in O_y$, $O_x \cap O_y = \emptyset$.

距離空間はハウスドルフであり, 従って $\mathbb{R}^n$ は自然な位相に関してハウスドルフである. また, ハウスドルフ空間内の部分集合は, 相対位相に関してハウスドルフである.

定義 4.2. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合族 $\{U_\alpha\}$ が X の 開被覆 とは, 次が成り立つこと:
(i) $\forall \alpha, U_\alpha \in \mathcal{O}$; (ii) $\displaystyle\bigcup_\alpha U_\alpha = X$.

多様体の定義: 位相多様体

定義 4.3. 位相空間 M に対し, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ が m 次元 局所座標系 とは, 次が成り立つこと:
(i) $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆;
(ii) 各 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ は M の m 次元座標近傍.

例えば $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ に対して, x 軸と y 軸はそれぞれ座標近傍になるが, これらは局所座標系にはならない.

定義 4.4. 位相空間 M が m 次元 位相多様体 とは, 以下が成り立つこと:
(i) M はハウスドルフ空間;
(ii) M の m 次元局所座標系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ が存在する.

例 4.5. (U, φ) を m 次元座標近傍とする. このとき, U は m 次元位相多様体.

例 4.6. 球面 S^n は, 以下で定義される局所座標系 $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}$ に関して n 次元位相多様体:

$$\begin{aligned}
&U_i^+ := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^{n+1} \mid x_i > 0\},\\
&U_i^- := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^{n+1} \mid x_i < 0\},\\
&\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

ここで $\widehat{x_i}$ は「x_i を抜く」ことを表す記号. 例えば $n = 2$, $i = 2$ のとき,

$$\varphi_2^+(x_1, x_2, x_3) = (x_1, \widehat{x_2}, x_3) = (x_1, x_3).$$

例 4.7. 球面 S^n は, 以下で定義される局所座標系 $\{(U_\pm, \varphi_\pm)\}$ に関しても n 次元位相多様体 (こ

こで定義された $\varphi_\pm$ を $p_\pm$ からの <u>立体射影</u> と呼ぶ):

$$\begin{aligned} p_\pm &:= (0, \ldots, 0, \pm 1) \in S^n, \\ U_\pm &:= S^n \setminus \{p_\pm\}, \\ \varphi_\pm &: U_\pm \to \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (1/(1 \mp x_{n+1}))(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

多様体の定義: 位相多様体の演習問題

問題 6 (小テスト問題 (3): 口頭)**.** 距離空間はハウスドルフであることを示せ.

問題 7. $(X, \mathcal{O})$ をハウスドルフ位相空間, A を X 内の部分集合とし, $\mathcal{O}_A$ を $\mathcal{O}$ から決まる A の相対位相とする. このとき $(A, \mathcal{O}_A)$ はハウスドルフであることを示せ.

問題 8. 球面 S^n の立体射影 $\varphi_\pm$ は, $p_\pm$ と $x \in U_\pm$ を結ぶ直線と, $\mathbb{R}^n$ ($x_{n+1} = 0$ で定義されるもの) の交点を表している. このことを用いて $\varphi_\pm$ の逆写像を求めよ.

問題 9. M を m 次元位相多様体とし, $M \supset M'$ を空でない開集合とする. このとき M' も m 次元位相多様体であることを示せ. ここで, 命題 3.10 の結果は用いても良い.

問題 10. M を m 次元位相多様体, N を n 次元位相多様体とする. このとき $M \times N$ は $m + n$ 次元位相多様体であることを示せ. ここで, 命題 3.11 の結果は用いても良い.

5　幾何学 A・同演習 (2018/06/18): 多様体の定義 (4)

多様体の定義: 解析の復習

定義 5.1. O を $\mathbb{R}^m$ 内の開集合, $f : O \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とする. このとき f が C^∞ 級 であるとは, 次が成り立つこと: f は各変数に関して何回でも偏微分可能.

連続写像のときと同様に, 多項式や三角関数で書くことができる関数が C^∞ 級であることは認めて話を進める.

多様体の定義: 可微分多様体

可微分多様体は「座標変換が C^∞ 級になるような位相多様体」として定義される.

定義 5.2. M が m 次元 C^∞ 級多様体 であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) M は $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を局所座標系とする m 次元位相多様体;

(ii) $\forall \alpha, \beta$ $(U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset)$, 次の写像は C^∞ 級:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta).$$

上の写像 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$ を $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ から (U_β, φ_β) への 座標変換 という. また, 全ての座標変換が C^∞ 級であるような局所座標系をC^∞ 級局所座標系という.

例 5.3. (U, φ) を座標近傍とすると, U は C^∞ 級多様体. 従って, 特に $\mathbb{R}^m$ 内の (空でない) 開集合や, その上で定義された関数のグラフは C^∞ 級多様体.

例 5.4. 球面 S^n は, 先に定義した局所座標系 $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm) \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ に関して C^∞ 級多様体である.

この例で $n = 1$ のとき, (U_1^+, φ_1^+) から (U_2^+, φ_2^+) への座標変換は, 次で与えられるので C^∞ 級写像である:

$$\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1} : (0, 1) \to (0, 1) : y \mapsto \sqrt{1 - y^2}.$$

問題 11 (小テスト問題 (4))**.** 2 次元球面 S^2 に対して, $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}$ を先に定義した局所座標系とする. このとき, (U_1^+, φ_1^+) から (U_2^-, φ_2^-) への座標変換と, その定義域と値域を求めよ.

例 5.5. 球面 S^n は, 立体射影を用いて定義した $\{(U_\pm, \varphi_\pm)\}$ に関して C^∞ 級多様体である.

多様体の定義: 可微分多様体に関する演習

問題 12. 2 次元球面 S^2 に対して, $\{(U_\pm, \varphi_\pm)\}$ を立体射影により定義された局所座標系とする. このとき, (U_+, φ_+) から (U_-, φ_-) への座標変換と, その定義域と値域を求めよ.

問題 13. 2 次元球面 S^2 に対して, $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}$ をグラフにより定義された局所座標系とする. このとき, 講義では紹介していない座標変換を挙げ, その写像と定義域および値域を求めよ.

問題 14. M を n 次元 C^∞ 級多様体とし, M' を M 内の空でない開集合とする. このとき M' も n 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ. (以前の演習問題の内容を用いて良い.)

問題 15. M を m 次元 C^∞ 級多様体, N を n 次元 C^∞ 級多様体とする. このとき $M \times N$ は $m+n$ 次元 C^∞ 級多様体になることを示せ. (以前の演習問題の内容を用いて良い.)

6 幾何学 A・同演習 (2018/06/21): 多様体の定義 (5)

多様体の定義: 商空間の復習

定義 6.1. X を集合とし, $\sim$ を X 上の同値関係とする. このとき,

(1) $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$ を x を含む <u>同値類</u> と呼ぶ.
(2) $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ を X の $\sim$ による <u>商集合</u> と呼ぶ.

命題 6.2. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $\pi : X \to Y$ を全射とする. このとき, 次は Y の位相である:

$$\mathcal{O}^\pi := \{O \subset Y \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}.$$

定義 6.3. 上の命題の $\mathcal{O}^\pi$ を<u>π による商位相</u>と呼ぶ.

特に, X 上に同値関係 $\sim$ があるとき, 自然な射影 $\pi : X \to X/\sim : x \mapsto [x]$ による商位相 $\mathcal{O}^\pi$ を, 商集合 $X/\sim$ 上の <u>商位相</u> と呼ぶ. また, 商位相を入れた位相空間を <u>商空間</u> と呼ぶ.

多様体の定義: 射影空間

定義 6.4. $\mathbb{RP}^n := \{\ell \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \ell$ は原点を通る直線 $\}$ を <u>実射影空間</u> と呼ぶ.

補題 6.5. $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ とおくと, 以下が成り立つ:

(1) 次で定義される $\sim$ は X 上の同値関係: $x \sim y :\Leftrightarrow \exists c \neq 0 : x = cy$.
(2) 次は well-defined かつ全単射: $f : X/\sim \to \mathbb{RP}^n : [x] \mapsto \mathbb{R}x$.

以下では $\mathbb{RP}^n$ と $X/\sim$ を同一視する. X には $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的な位相から決まる相対位相を入れ, $\mathbb{RP}^n$ には自然な射影 $\pi : X \to \mathbb{RP}^n$ による商位相を入れる. また $\pi(x) = [x] = [x_1 : \cdots : x_{n+1}]$ と表し, これを同次座標と呼ぶ.

命題 6.6. $\mathbb{RP}^n = X/\sim$ は n 次元 C^∞ 級多様体である. 実際, 以下が成り立つ:

(1) $\mathbb{RP}^n$ はハウスドルフ.
(2) $U_i := \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0\}$ とおくと, $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$ は $\mathbb{RP}^n$ の開被覆.
(3) 各 i に対して, (U_i, φ_i) は n 次元座標近傍. ただしここで

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n : [x_1 : \cdots : x_{n+1}] \mapsto (1/x_i)(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1}).$$

(4) $\{(U_i, \varphi_i) \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ の任意の座標変換は C^∞ 級.

先の命題の証明において, $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ が連続であることの証明には, 次を用いる. ちなみに φ^{-1} が連続であることの証明は, 面倒なので略す (教科書には説明がある).

補題 6.7. 上記の記号の下で, 以下が成り立つ: $\varphi_i \circ \pi : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^n$ は連続.

多様体の定義: 射影空間の演習問題

今回の演習問題では, 2 次元実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ を考える. また $\{(U_i, \varphi_i) \mid i = 1, 2, 3\}$ を, 先に定義した局所座標系とする.

問題 16 (小テスト問題 (5))**.** φ_2 が well-defined であることを示せ. ただしここで,

$$\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2 : [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto (1/x_2)(x_1, x_3).$$

問題 17. U_2 が $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 内の開集合であることを示せ.

問題 18. $(\varphi_2)^{-1} : \varphi_2(U_2) \to U_2$ の形を予想し, それを示せ.

問題 19. (U_2, φ_2) から (U_3, φ_3) への座標変換を求めよ. また, $\varphi_2(U_2)$, $\varphi_3(U_3)$, 座標変換の定義域と値域も求めよ.

中間試験事前救済レポート

問題 20 (事前レポート問題, 2018/06/28 締切, 提出任意)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する中間試験問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け. ただし, レポートの一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと. 表紙を付けてはならない.

(1) $\mathbb{R}^m$ 内の開集合. (2) 座標近傍. (3) 位相多様体. (4) 可微分多様体.

7　幾何学 A・同演習 (2018/06/28): C^∞ 級写像 (1)

$\mathbb{R}^m$ 上の C^∞ 級写像

以下では O を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合とする.

定義 7.1. $f : O \to \mathbb{R}$ を連続写像とする. このとき f が <u>C^∞ 級関数</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in O$, f は p で全ての変数に関して無限回連続偏微分可能であること.

$(x_1, \ldots, x_m)$ を $\mathbb{R}^m$ の座標とすると, (標準基底 $\{e_k\}$ を使って) 偏導関数は次で定義された:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(p + \varepsilon e_j) - f(p)}{\varepsilon}.$$

定義 7.2. $f : O \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とする. このとき f が <u>C^∞ 級写像</u> とは, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ としたときに全ての f_i が C^∞ 級関数となること.

命題 7.3 (復習)**.** $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ を C^∞ 級写像とする. このとき, $g \circ f$ も C^∞ 級写像.

上では簡単のために定義域を $\mathbb{R}^m$ や $\mathbb{R}^n$ 全体にしたが, その中の開集合で定義された写像についても, 合成できる設定ならば, 合成写像は C^∞ 級である.

定義 7.4. $\mathbb{R}^m \supset O, O'$ を開集合とする. このとき $f : O \to O'$ が <u>C^∞ 級同相</u> であるとは, 以下が成り立つこと: (i) f : 全単射; (ii) f : C^∞ 級; (iii) f^{-1} : C^∞ 級.

例 7.5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ は全単射かつ C^∞ 級だが, f^{-1} は C^∞ 級ではない. すなわち, C^∞ 級同相の条件 (i), (ii) だけから (iii) は従わない.

座標近傍上の C^∞ 級写像: C^∞ 級関数

定義 7.6. (U, φ) を座標近傍とし, 関数 $\xi : U \to \mathbb{R}$ を考える. ξ が <u>C^∞ 級関数</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in U$, $\xi \circ \varphi^{-1}$ が $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

ここで $\xi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ の C^∞ 性は, 通常の意味の ($\mathbb{R}^m$ 内の開集合の上で定義された関数としての) C^∞ 性である.

例 7.7. O を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合とし, $\xi : O \to \mathbb{R}$ を考える. このとき, ξ が通常の意味で C^∞ 級であることと, 座標近傍 (O, id) 上の関数として C^∞ 級であることは同値.

例 7.8. I を $\mathbb{R}$ 内の空でない開集合, $f : I \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とし, (U, φ) を $y = f(x)$ のグラフとする. このとき, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級ならば, 制限 $F|_U$ は (U, φ) 上の C^∞ 級関数.

ここで $U := \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$, $\varphi : U \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ がグラフの定義だった. 高次元の C^∞ 級写像のグラフについても, 同様の性質が成り立つ.

座標近傍上の C^∞ 級写像: C^∞ 級写像

定義 7.9. (U, φ), (V, ψ) を座標近傍とし, 写像 $F : U \to V$ を考える. このとき, F が C^∞ 級写像 とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in U$, $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

例 7.10. S^n に対して, (U_1^+, φ_1^+) をグラフと思ったときの座標近傍, (U_+, φ_+) を立体射影による座標近傍とする. このとき次は C^∞ 級: $F : U_1^+ \to U_+ : x \mapsto x$.

ここで, 立体射影は次で与えられていた:

$$\varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (1/(1 \mp x_{n+1}))(x_1, \ldots, x_n).$$

命題 7.11. (U, φ), (V, ψ), (W, ρ) を座標近傍とし, $F : U \to V$, $G : V \to W$ を C^∞ 級写像とする. このとき $G \circ F$ も C^∞ 級写像.

座標近傍上の C^∞ 級写像: C^∞ 級同相

定義 7.12. $F : U \to V$ が C^∞ 級同相 であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) F : 全単射; (ii) F : C^∞ 級; (iii) F^{-1} : C^∞ 級.

例 7.13. S^n に対して (U_1^+, φ_1^+) をグラフと思ったときの座標近傍とし, $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ に対して (U_1, φ_1) を自然な座標近傍とする. このとき次は C^∞ 級同相: $F : U_1^+ \to U_1 : x \mapsto [x]$.

8　幾何学 A・同演習 (2018/07/02): C^∞ 級写像 (2)

多様体上の C^∞ 級写像: C^∞ 級関数

ここでは, M は C^∞ 級多様体を表すものとする.

定義 8.1. $\xi : M \to \mathbb{R}$ を連続関数とし, $p \in M$ とする. このとき, ξ が $\underline{p \text{ で } C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\exists (U, \varphi)$ (p を含む M の座標近傍) : $\xi \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

命題 8.2. $\xi : M \to \mathbb{R}$ を連続関数とし, $p \in M$ とする. このとき以下は同値:

(1) ξ は p で C^∞ 級;

(2) $\forall (U, \varphi)$ (p を含む M の座標近傍), $\xi \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

定義 8.3. $\xi : M \to \mathbb{R}$ を連続関数とする. このとき, ξ が $\underline{C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M$, ξ は p で C^∞ 級.

命題 8.4. $\xi : M \to \mathbb{R}$ を連続関数とする. このとき以下は同値:

(1) ξ は C^∞ 級;

(2) $\forall (U, \varphi)$ (M の座標近傍), $\xi|_U$ は C^∞ 級.

とくに, (U, φ) を座標近傍とし, $\xi : U \to \mathbb{R}$ を連続写像とすると, ξ が座標近傍上の関数として C^∞ 級であることと, 多様体上の関数として C^∞ 級であることは同値である.

例 8.5. 球面 S^n に対して, グラフによって局所座標系を定めた多様体を $(S^n)_{\mathrm{gr}}$, 立体射影によって局所座標系を定めた多様体を $(S^n)_{\mathrm{pr}}$ と便宜的に表す. 関数 $f : S^1 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$ について, 以下が成り立つ:

(1) 定義域を $(S^1)_{\mathrm{gr}}$ と考えたとき, f は C^∞ 級関数;

(2) 定義域を $(S^1)_{\mathrm{pr}}$ と考えたとき, f は C^∞ 級関数.

問題 21 (小テスト問題 (6))**.** S^1 上の関数 $f : S^1 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$ を考える. 定義域を $(S^1)_{\mathrm{pr}}$ と考えたとき, f は C^∞ 級関数であることを示せ.

9　幾何学 A・同演習 (2018/07/04): 中間試験問題

注意

- 証明問題の解答を書くときには, 証明中に適宜「示すこと」を書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

参考: 定義や用語など

- (U, φ) が座標近傍 $:\Leftrightarrow$ $\varphi(U)$ は $\mathbb{R}^n$ 内の開集合で, $\varphi : U \to \varphi(U)$ は同相.
- (U, φ) から (V, ψ) への座標変換とは, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$.
- $x, y \in X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ に対して, $x \sim y :\Leftrightarrow \exists c \neq 0 : y = cx$.
- 実射影空間は (講義の定義とは表記が異なるが) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := X/\sim$.
- 上の同値関係に関する同値類を $[\cdot]$ とし, $[x_1 : \cdots : x_{n+1}] := [(x_1, \ldots, x_{n+1})]$.
- $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ には, 自然な射影 $\pi : X \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ による商位相を入れる.

問題

[1] S^3 を 3 次元単位球面とし, 次のように定める:

$$U_i^{\pm} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \mid \pm x_i > 0\} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

(1) U_1^+ が S^3 内の開集合であることを示せ. ここで, $\mathbb{R}^n$ 内の開集合に関する事実は既知として良い. (20 点)

(2) 各 $(U_2^{\pm}, \varphi_2^{\pm})$ が座標近傍となるように $\varphi_2^{\pm}$ を自然に与えよ (証明不要). (10 点)

(3) φ_2^- の像を求めよ (証明不要). (10 点)

(4) (U_2^-, φ_2^-) から (U_4^-, φ_4^-) への座標変換の定義域・値域・写像を求めよ. (20 点)

[2] $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ を 2 次元実射影空間とし, 次のように定める:

$$U_1 := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid x_1 \neq 0\},$$
$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2 : [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto (1/x_1)(x_2, x_3).$$

(1) φ_1 が well-defined であることを示せ. (20 点)

(2) $\varphi_1(U_1)$ がどのような集合であるかを予想し, それを示せ. (20 点)

[3] S^2 を 2 次元単位球面とし, $p_+ := (0, 0, 1)$, $U_+ := S^2 \setminus \{p_+\}$ とおく. このとき, p_+ からの立体射影 $\varphi_+ : U_+ \to \mathbb{R}^2$ を求めよ. ここで φ_+ は, S^2 上の点 q に対し, p_+ と q を結ぶ直線と xy 平面との交点を対応させることにより得られる写像である. (20 点)

[4] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.

10　幾何学 A・同演習 (2018/07/05): C^∞ 級写像 (3)

多様体上の C^∞ 級写像: C^∞ 級写像

ここでは M, N は C^∞ 級多様体を表すものとする.

定義 10.1. $F : M \to N$ を連続写像とする.

(1) F が $\underline{p \in M \text{ で } C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\exists(U, \varphi)$ (p を含む M の座標近傍), $\exists(V, \psi)$ ($F(p)$ を含む N の座標近傍) : $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

(2) F が $\underline{C^\infty \text{ 級}}$ とは, 次が成り立つこと: $\forall p \in M$, F は p で C^∞ 級.

命題 10.2. $F : M \to N$ を連続写像とし, $p \in M$ とする. このとき以下は同値:

(1) F は $p \in M$ で C^∞ 級;

(2) $\forall(U, \varphi)$ (p を含む M の座標近傍), $\forall(V, \psi)$ ($F(p)$ を含む N の座標近傍), $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞ 級.

例 10.3. 次は C^∞ 級写像: $\pi : (S^n)_{\mathrm{gr}} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n : x \mapsto [x]$.

命題 10.4. L, M, N を C^∞ 級多様体, $F : L \to M$, $G : M \to N$ を C^∞ 級写像とする. このとき $G \circ F$ も C^∞ 級写像.

多様体上の C^∞ 級写像: C^∞ 級同相

定義 10.5. $F : M \to N$ が $\underline{C^\infty \text{ 級同相}}$ であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) F : 全単射; (ii) F : C^∞ 級; (iii) F^{-1} : C^∞ 級.

例 10.6. 次の恒等写像は C^∞ 級同相: $\mathrm{id} : (S^n)_{\mathrm{gr}} \to (S^n)_{\mathrm{pr}}$.

座標近傍上の C^∞ 級写像: 演習問題

問題 22. S^2 に対して, (U_2^-, φ_2^-) をグラフによる座標近傍, (U_+, φ_+) を立体射影による座標近傍とする. このとき次は C^∞ 級であることを示せ: $F : U_2^- \to U_+ : x \mapsto x$.

問題 23. S^1 に対して, グラフによる座標近傍 $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ を考える. このとき, 原点を中心とする 90° 回転によって定義される写像 $F : (U_1^+, \varphi_1^+) \to (U_2^+, \varphi_2^+)$ が C^∞ 級同相であることを示せ. (全単射, F が C^∞, F^{-1} が C^∞ は分割して発表して良い.)

問題 24. S^2 に対して (U_2^-, φ_2^-) をグラフによる座標近傍とし, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ に対して (U_2, φ_2) を自然な座標近傍とする. このとき $F : U_2^+ \to U_2 : x \mapsto [x]$ が C^∞ 級同相であることを示せ. (全単射, F が C^∞, F^{-1} が C^∞ は分割して発表して良い.)

多様体上の C^∞ 級写像: 演習問題

問題 25. $\xi : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R} : [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto x_1^2/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ を考える.

(1) ξ が well-defined であることを示せ.
(2) ξ が C^∞ 級関数であることを示せ.

問題 26. 次の恒等写像が C^∞ 級同相であることを示せ: $\mathrm{id} : (S^2)_{\mathrm{gr}} \to (S^2)_{\mathrm{pr}}$.

問題 27. $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする. このとき, 制限写像 $F|_{S^n}$ は $(S^n)_{\mathrm{gr}}$ 上の C^∞ 級関数であることを示せ.

問題 28. 次で定義される G を考える:

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \neq 0,\ b \in \mathbb{R} \right\}.$$

このとき G には $M(2, \mathbb{R})$ $(\cong \mathbb{R}^4)$ の自然な位相から決まる相対位相を入れる. また, G が $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ 内の部分群であることは認めて良い.

(1) (G, φ) が座標近傍になるように自然に φ を与えよ.
(2) 次の写像が C^∞ 級であることを示せ: $\psi : G \to G : g \mapsto g^{-1}$.
(3) 座標近傍と座標近傍の直積は座標近傍となる. この構造に関して, 次の写像が C^∞ 級であることを示せ: $\mu : G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh$.

問題 29. M を C^∞ 級多様体とし, $f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする. また, M' を M 内の空でない開集合とし, 自然な方法で C^∞ 級多様体と考える. このとき, 制限写像 $f|_{M'}$ が M' 上の C^∞ 級関数であることを示せ.

11　幾何学 A・同演習 (2018/07/19): 接空間 (1)

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合の接空間: 接ベクトル

以下では, O を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合とし, $p \in O$ とする.

定義 11.1. p を始点とする $\mathbb{R}^m$ 内のベクトルを, p における O の 接ベクトル と呼ぶ. また, 次を p における O の 接空間 と呼ぶ: $T_pO := \{X \in \mathbb{R}^m \mid X$ は p における接ベクトル $\}$.

当然ながら, T_pO はベクトル空間であり, $\mathbb{R}^m$ と同型である. 接ベクトルを用いて, 方向微分が定義される. 方向微分は, 様々な形で言い換えることができる. 本節の内容は以下の通り:

- 偏微分;
- 方向微分 (接ベクトル);
- 曲線に沿った微分 (速度ベクトル);
- 型式的方向微分.

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合の接空間: 解析の復習

定義 11.2. $f : O \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とする. 次を f の $p \in O$ における 微分写像 と呼ぶ:

$$(df)_p : T_pO \to T_{f(p)}\mathbb{R}^n : X \mapsto \lim_{t \to 0}(1/t)\left(f(p + tX) - f(p)\right).$$

命題 11.3 (復習)**.** $f : O \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像, $p \in O$ とする. このとき以下が成り立つ:

(1) $(df)_p$ は線型写像.

(2) $\{e_1, \ldots, e_m\}$ を T_pO の標準的な基底とすると, $(df)_p(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$.

(3) $f = (f_1, \ldots, f_n)$ と表す. $(df)_p$ を標準的な基底に関して行列表示すると $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)$.

このとき $(Jf)_p := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)$ と表し, これを ヤコビ行列 と呼ぶ.

命題 11.4 (チェインルール)**.** $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ を C^∞ 級写像とする. このとき, $g \circ f$ も C^∞ 級写像であり, 次が成り立つ: $\forall p \in \mathbb{R}^m$, $(J(g \circ f))_p = (Jg)_{f(p)}(Jf)_p$.

チェインルールは, 行列の成分で書き下した形で書かれることも多いが, ヤコビ行列を使った方が簡潔で扱いやすい (と思う).

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合の接空間: 接ベクトルと方向微分

命題 11.5 (復習)**.** $C^\infty(O) := \{\xi : O \to \mathbb{R} : C^\infty$ 級 $\}$ は, 関数の和・積・スカラー倍に関して閉じている (これにより $\mathbb{R}$-代数となる). ただしここで, $\xi, \eta \in C^\infty(O)$, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$(a\xi + b\eta)(x) := a\xi(x) + b\eta(x), \quad (\xi\eta)(x) := \xi(x)\eta(x).$$

接ベクトル $X \in T_pO$ があると, その方向微分 $D_X : C^\infty(O) \to \mathbb{R}$ が得られる.

定義 11.6. $X \in T_pO$ とする. このとき, 次を X による 方向微分 と呼ぶ:

$$D_X : C^\infty(O) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto (d\xi)_p(X) := \lim_{t\to 0}(1/t)\left(\xi(p+tX) - \xi(p)\right).$$

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合の接空間: 方向微分と偏微分

微分写像 $(d\xi)_p$ は線型であり, D_{e_j} は偏微分に一致するので, 次が従う.

命題 11.7. O の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ とすると, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\tfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\} = \{D_X \mid X \in T_pO\}.$$

ここで上式の左辺は次の意味:

$$\left(a_1\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \cdots + a_m\left(\tfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right)\xi := a_1\tfrac{\partial \xi}{\partial x_1}(p) + \cdots + a_m\tfrac{\partial \xi}{\partial x_m}(p).$$

命題 11.8. 上の記号のもとで, 次は一次独立: $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\}$.

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合の接空間: 接ベクトルと速度ベクトル

定義 11.9. C^∞ 級写像 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O$ を O 内の 曲線 と呼ぶ. また, このときの $c'(0)$ を $c(0)$ における 速度ベクトル と呼ぶ.

命題 11.10. $T_pO = \{c'(0) \in \mathbb{R}^m \mid \varepsilon > 0,\ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O : C^\infty,\ c(0) = p\}$.

したがって $\{D_X \mid X \in T_pO\} = \{D_{c'(0)}\}$. チェインルールより, $D_{c'(0)}$ は次をみたす.

命題 11.11. $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O$ を C^∞ 級とし, $c(0) = p$ とする. このとき次が成立: $\forall \xi \in C^\infty(O)$,

$$(\xi \circ c)'(0) = (J\xi)_p(Jc)_0 = (d\xi)_p(c'(0)) = D_{c'(0)}\xi.$$

このときの $D_{c'(0)}$ を曲線 c に沿う微分と呼ぶ.

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合の接空間: 速度ベクトルと形式的方向微分

定義 11.12. $v : C^\infty(O) \to \mathbb{R}$ が p における 形式的方向微分であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) 線型;

(ii) 積の微分法則をみたす, すなわち, $\forall \xi, \eta \in C^\infty(O)$, $v(\xi\eta) = v(\xi)\eta(p) + \xi(p)v(\eta)$.

形式的方向微分の全体の集合を $D_pO := \{v : p$ における形式的方向微分 $\}$ と表す. 次の命題は, 1 変数関数の場合に帰着すれことにより, 証明できる.

命題 11.13. $\{D_{c'(0)} \mid \varepsilon > 0,\ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O : C^\infty,\ c(0) = p\} \subset D_pO.$

問題 30 (小テスト問題 (7))**.** O を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合, $\varepsilon > 0$, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O$ を C^∞ 級写像とし, $p := c(0)$ とおく. このとき $D_{c'(0)}$ が積の微分法則をみたすことを示せ. (1 変数関数の微分に関する性質は用いて良い.)

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合の接空間: 形式的方向微分と偏微分

命題 11.14. $D_pO \subset \mathrm{Span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\}.$

講義では $n = 1$ のときのみ示す. その証明には次の補題を用いる.

補題 11.15. I を $\mathbb{R}$ 内の開集合とし, $p = 0 \in I$ とすると, 以下が成り立つ:

(1) $\forall v \in D_0I$, $v(1) = 0$, v(定数関数) $= 0$, $v(x^2) = 0$.

(2) $\forall \xi \in C^\infty(I), \exists \eta \in C^\infty(I) : \xi(x) = \xi(0) + \xi'(0)x + \eta(x)x^2.$

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合の接空間: 演習問題

問題 31. 次を示せ: $T_pO \subset \{c'(0) \in \mathbb{R}^m \mid \varepsilon > 0,\ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O : C^\infty,\ c(0) = p\}.$

問題 32. I を $\mathbb{R}$ 内の開集合とし, $p = 0 \in I$ とする. 次を示せ: $\forall v \in D_0I$, $v(x^2) = 0$.

問題 33. O の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ とする. 次を示せ:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\tfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\} \subset \{D_X \mid X \in T_pO\}.$$

12　幾何学 A・同演習 (2018/07/23): 接空間 (2)

座標近傍の接空間: イントロ

(U, φ) を m 次元座標近傍とし, $p \in U$ とする. ここでは, 接空間を定義し, 以下の 3 通りの方法で表示できることを紹介する (注: 時間の都合で一部省略する):

- 偏微分を用いた表示;
- 速度ベクトルを用いた表示;
- 型式的方向微分を用いた表示.

命題 12.1. $C^\infty(U) := \{\xi : U \to \mathbb{R} : C^\infty \text{ 級 }\}$ は, 関数の和・積・スカラー倍に関して閉じている (これにより $\mathbb{R}$-代数となる).

座標近傍の接空間: 接空間と偏微分

定義 12.2. $\varphi(U)$ の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ で表す. このとき $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ を次で定義する:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi \circ \varphi^{-1})(p).$$

定義 12.3. $T_pU := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\}$ を (U, φ) の $p \in U$ における <u>接空間</u> という.

命題 12.4. 上記の $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\}$ は一次独立. よって T_pU は m 次元線型空間である.

座標近傍の接空間: 接空間と速度ベクトル

次に $c'(0)$ を定義する. $\mathbb{R}^m$ 内の開集合について $D_{c'(0)}\xi = (\xi \circ c)'(0)$ だった.

定義 12.5. $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ を C^∞ 級とする. このとき <u>速度ベクトル</u> $c'(0)$ を次で定義する:

$$c'(0) : C^\infty(U) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto (\xi \circ c)'(0).$$

命題 12.6. 次が成り立つ: $T_pU \subset \{c'(0) \mid \varepsilon > 0,\ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U : C^\infty,\ c(0) = p\}$.

座標近傍の接空間: 速度ベクトルと形式的方向微分 (略)

定義 12.7. $v : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ が p における <u>形式的方向微分</u>であるとは, v が線型で, 積の微分法則をみたすこと. また, 次のようにおく: $D_pU := \{v : p \text{ における形式的方向微分 }\}$.

命題 12.8. $\{c'(0) \mid \varepsilon > 0,\ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U : C^\infty,\ c(0) = p\} \subset D_pU \subset T_pU$.

座標近傍の接空間: 演習問題

問題 34. (U, φ) を座標近傍とする. $C^\infty(U) := \{\xi : U \to \mathbb{R} : C^\infty \text{ 級 }\}$ が関数の積に関して閉じていることを示せ.

問題 35. (U, φ) を座標近傍とし, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ と表す.

(1) 各 $\varphi_j : U \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級であることを示せ.
(2) $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \varphi_j$ を求めよ.

問題 36. (U, φ) を座標近傍とする. $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ が C^∞ 級であることを示せ.

多様体の接空間: イントロ

M を m 次元 C^∞ 級多様体とする. その接空間は, 座標近傍の接空間と同様に 3 通りの方法で表示できる.

命題 12.9. M を C^∞ 級多様体とする. $C^\infty(M) := \{\xi : M \to \mathbb{R} : C^\infty \text{ 級 }\}$ は, 関数の和・積・スカラー倍に関して閉じている (これにより $\mathbb{R}$-代数となる).

多様体の接空間: 速度ベクトルと接空間

接空間の定義は, どの表示方法を採用しても良いが, ここでは曲線の速度ベクトルを用いたものを定義とする (局所座標を使うと, その取り方に依存しないことが気になる).

定義 12.10. $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を C^∞ 級とする. このとき 速度ベクトル $c'(0)$ を次で定義する:

$$c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto (\xi \circ c)'(0).$$

定義 12.11. 次を M の p における 接空間 と呼ぶ:

$$T_pM := \{c'(0) \mid \varepsilon > 0,\ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M : C^\infty,\ c(0) = p\}.$$

多様体の接空間: 速度ベクトルと形式的方向微分

定義 12.12. $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が p における 形式的方向微分であるとは, v が線型で, 積の微分法則をみたすこと. また, 次のようにおく: $D_pM := \{v : p \text{ における形式的方向微分 }\}$.

命題 12.13. 次が成り立つ: $T_pM \subset D_pM$.

多様体の接空間: 局所座標と速度ベクトル

定義 12.14. (U,φ) を M の局所座標とし, $\varphi(U)$ の座標を $(x_1,\ldots,x_m)$ で表す. また $p\in U$ とする. このとき $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ を次で定義する:

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(M)\to\mathbb{R} : \xi\mapsto \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\xi\circ\varphi^{-1})(p).$$

命題 12.15. $D_pM\subset \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p,\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\}\subset T_pM.$

命題 12.16. 次は一次独立: $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p,\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\}.$

従って上記の 3 通りの表記は全て一致する. さらにこのことから T_pM が m 次元線型空間であることも従う. これらのことを正確に行うためには, $C^\infty(M)$ と $C^\infty(U)$ の違いに気を付けなくてはならない ($\xi\in C^\infty(M)\Rightarrow \xi|_U\in C^\infty(U)$ だが, この逆は正しいとは限らない).

多様体の接空間: 演習問題

問題 37. M を C^∞ 級多様体, (U,φ) をその局所座標とする. このとき $\varphi^{-1}:\varphi(U)\to M$ (正確に言うと, U から M への包含写像との合成) は C^∞ 級であることを示せ.

問題 38 (小テスト問題 (8))**.** M を C^∞ 級多様体, (U,φ) をその局所座標, $p\in U$ とし, $\varphi(U)$ の座標を $(x_1,\ldots,x_m)$ とする. このとき次を示せ: $\sum a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\in T_pM.$

問題 39. S^1 に対して, 立体射影による局所座標系 $\{(U_\pm,\varphi_\pm)\}$ を考える. このとき, $\xi\in C^\infty(U_+)$ であって, S^1 上の C^∞ 級写像の制限とならないような例を挙げよ. (制限とならないことは, 直観的に説明すれば良い)

問題 40. M を C^∞ 級多様体, $p\in M$ とする. このとき D_pM が線型空間であることは知っているが, その一般論は使わずに, D_pM が和とスカラー倍について閉じていることを定義に従って示せ.

問題 41. M を C^∞ 級多様体, $p\in M$, $v\in T_pM$ とする. また, $\xi:M\to\mathbb{R}$ を定数関数とする. このとき以下を示せ ($\mathbb{R}$ 上の関数の性質を用いて良い):

(1) $\xi\in C^\infty(M)$.

(2) $v(\xi)=0$.

13　幾何学 A・同演習 (2018/07/26): 微分写像 (1)

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合における微分写像

ここでは O を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合とする.

定義 13.1 (復習の復習)**.** $f : O \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像, $p \in O$ とする. このとき次を f の p における 微分写像 と呼ぶ:

$$(df)_p : T_pO \to T_{f(p)}\mathbb{R}^n : X \mapsto \lim_{t\to 0}(1/t)\left(f(p+tX) - f(p)\right).$$

微分写像は線型であり, これを標準的な基底に関して行列表示したものがヤコビ行列であった.

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合における微分写像: vs 速度ベクトル

曲線の速度ベクトルを微分写像で送ると, チェインルールより次が成り立つ.

命題 13.2. $f : O \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O$ を C^∞ 級写像とし, $p = c(0)$ とおく. このとき以下が成り立つ: $(df)_p(c'(0)) = (f \circ c)'(0)$.

$\mathbb{R}^m$ 内の開集合における微分写像: vs 方向微分

接ベクトル $X \in T_pO$ に対して方向微分 D_X を対応させることが, 多様体の接空間を定義するためのアイデアであった. ここで D_X は次で定義されていた:

$$D_X : C^\infty(O) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto (d\xi)_p(X).$$

命題 13.3. $f : O \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像, $p \in O$, $X \in T_pO$, $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき以下が成り立つ: $D_{(df)_pX}\xi = D_X(\xi \circ f)$.

多様体における微分写像: vs 形式的方向微分

以下では M, N を C^∞ 級多様体, $F : M \to N$ を C^∞ 級写像とし, $p \in M$ とする. ここでは微分写像を, 形式的方向微分を用いて定義する.

命題 13.4. 各 $v \in D_pM$ に対し, $(dF)_pv : C^\infty(N) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto v(\xi \circ F)$ と定義する. このとき次が成り立つ: $(dF)_pv \in D_{F(p)}N$.

定義 13.5. 上で定義した $(dF)_p : D_pM \to D_{F(p)}N$ を F の p での 微分写像 と呼ぶ.

命題 13.6. 上の記号の下で, $(dF)_p$ は線型写像.

命題 13.7. L, M, N を C^∞ 級多様体とする．このとき以下が成り立つ:

(1) $F_1 : L \to M$, $F_2 : M \to N$ を C^∞ 級写像とすると, $\forall p \in L$, $d(F_2 \circ F_1)_p = (dF_2)_{F_1(p)} \circ (dF_1)_p$.

(2) 恒等写像 $\mathrm{id}_M : M \to M$ に対して, $\forall p \in M$, $d(\mathrm{id}_M)_p = \mathrm{id}_{D_pM}$.

(3) $F : M \to N$ を C^∞ 級同相写像とすると, $\forall p \in M$, $(dF)_p$ は線型同型写像.

問題 42 (小テスト問題 (9))**.** L, M, N を C^∞ 級多様体とし, $F_1 : L \to M$, $F_2 : M \to N$ を C^∞ 級写像とする．このとき次を示せ: $\forall p \in L$, $d(F_2 \circ F_1)_p = (dF_2)_{F_1(p)} \circ (dF_1)_p$.

系 13.8. M と N が C^∞ 級同相のとき, 次が成り立つ: $\dim M = \dim N$.

多様体における微分写像: 演習問題

問題 43. M, N を C^∞ 級多様体, $F : M \to N$ を C^∞ 級写像とし, $p \in M$ とする．このとき, 各 $v \in D_pM$ に対し, $(dF)_pv$ が線型写像であることを定義に従って示せ.

問題 44 (講義で紹介したため中止)**.** M, N を C^∞ 級多様体とし, $p \in M$ とする．恒等写像 $\mathrm{id}_M : M \to M$ に対して, 次が成り立つことを示せ: $d(\mathrm{id}_M)_p = \mathrm{id}_{T_pM}$.

問題 45. M, N を C^∞ 級多様体, $F : M \to N$ を C^∞ 級写像とし, $p \in M$ とする．このとき $(dF)_p$ は線型写像であることを示せ.

問題 46 (期末試験事前レポート問題 (2018/08/01 提出))**.** 以下の各キーワードに関連する期末試験問題をそれぞれ予想し, その問題と解答を書け．ただしレポートには表紙を付けず, 一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと.

(1) 多様体の定義; (2) C^∞ 級写像; (3) 接空間; (4) 微分写像.

14　幾何学 A・同演習 (2018/07/30): 微分写像 (2)

多様体における微分写像: vs 速度ベクトル

接空間には 3 通りの表示方法があったが, そのうちの方向微分の空間を用いることにより, 微分写像を定義した. ここでは, 速度ベクトルを用いて微分写像を記述する.

命題 14.1. $F : M \to N$ を C^∞ 級写像とする. また, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ も C^∞ 級写像であるとし, $p := c(0)$ とおく. このとき次が成り立つ:

$$(dF)_p(c'(0)) = (F \circ c)'(0).$$

多様体における微分写像: vs 局所座標

ここでは, 局所座標を用いて微分写像を記述する. これらの表示方法は, 目的に応じて使い分けると便利である.

命題 14.2. $F : M \to N$ を C^∞ 級写像, (U, φ) を M の局所座標とし, $p \in U$ とする. また, (V, ψ) を N の局所座標で $F(p) \in V$ をみたすものとする. さらに, $\varphi(U)$, $\psi(V)$ の座標をそれぞれ $(x_1, \ldots, x_m)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ とおく. このとき次が成り立つ:

$$(dF)_p \left(\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\tfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \right) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{F(p)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_{F(p)} \right) J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}.$$

多様体における微分写像: 演習問題 (2)

問題 47. $\dim M = \dim N$ としても, M と N が C^∞ 級同相とは限らない. 反例を挙げよ.

問題 48. $F : S^1 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$ および各 $p \in S^1$ に対して, 微分写像 $(dF)_p$ を考える.

(1) グラフによって定まる座標近傍を用いて, $(dF)_p$ の階数を求めよ.

(2) 立体射影によって定まる座標近傍を用いて, $(dF)_p$ の階数を求めよ.

問題 49. 次の行列を掛けることにより定義される写像を $F : S^2 \to S^2$ で表す:

$$g := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

また $p = (1, 0, 0)$ とする. $\varphi_1^+(U_1^+)$ の座標を (y, z) とするとき, 微分写像 $(dF)_p$ を次の基底に関して行列表示せよ:

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p, \ \left(\tfrac{\partial}{\partial z}\right)_p \right\}.$$

15　幾何学 A・同演習 (2018/08/03): 期末試験問題

注意

- 証明問題の解答を書くときには, 証明中に適宜「示すこと」を書くこと. また, 証明中の式変形では, できるだけ理由も書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

定義や用語など

- (U, φ) から (V, ψ) への座標変換は, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$.
- $F : M \to N$ が C^∞ とは, $\forall p \in M$, $\exists (U, \varphi)$ (M の局所座標, $p \in U$), $\exists (V, \psi)$ (N の局所座標, $F(p) \in V$) : $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^∞.
- $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$: C^∞ 級に対し, $c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto (\xi \circ c)'(0)$.
- $D_pM := \{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid$ 線型, 積の微分法則をみたす $\}$ $(= T_pM)$.
- $F : M \to N$: C^∞ 級, $v \in D_pM$ に対し, $(dF)_pv : C^\infty(N) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto v(\xi \circ F)$.

問題

[1] $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ を 2 次元実射影空間とし, $U_i := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid x_i \neq 0\}$ と定める.

(1) (U_3, φ_3) が座標近傍となるように φ_3 を自然に与えよ (証明不要). (10 点)

(2) φ_3 の像および逆写像 $(\varphi_3)^{-1}$ を求めよ (証明不要). (10 点)

(3) (U_3, φ_3) から (U_2, φ_2) への座標変換の定義域・値域・写像を求めよ. (20 点)

(4) $F : S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2 : x \mapsto [x]$ が C^∞ 級であることを示せ. ここで, S^2 にはグラフを用いた局所座標系が入っているものとする. (20 点)

[2] M, N を C^∞ 級多様体, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を C^∞ 級写像とし, $p := c(0)$ と定める. また $F : M \to N$ を C^∞ 級写像とする.

(1) このとき $c'(0) \in D_pM$ であり, 特に $c'(0)$ は積の微分法則をみたす. $c'(0)$ のみたす「積の微分法則」を論理記号と数式を用いて書け. (10 点)

(2) (1) が成り立つことを示せ. (20 点)

(3) F の p における微分写像を $(dF)_p$ で表す. $(dF)_p(c'(0))$ の形を予想せよ. (10 点)

(4) (3) が成り立つことを示せ. ただし微分写像は次で定義されているものとする: $v \in D_pM$ に対し, $(dF)_pv : C^\infty(N) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto v(\xi \circ F)$. (20 点)

[3] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.