曲線の曲率と高速道路の話

田丸 博士

広島大学

広島大学 2018 年度 公開講座 / オープンキャンパス
2018/08/21–22

まえがき - (1/3)

問題

- 高速道路などの道路の形は，どんな曲線？

まえがき - (2/3)

今回の目標

- 曲線の「曲率」(曲がり具合を表すもの) を紹介.
- それを使って, 先の問題に答える.

コメント

- 高校では, $y = f(x)$ のグラフ (という曲線) の形を調べる.
  (増減表を書いて, 凹凸を調べる, 等々)
- 曲率を使うと「どのくらい曲がっているか」も調べられる.

まえがき - (3/3)

目次

おまけ

- 本日の内容は, 大学 2 年後期または 3 年前期あたりの幾何学の講義 (の最初の初歩の部分) の内容に相当します.

曲線 - (1/6)

定義

- 写像 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を **平面曲線** という.
  (これを $c(t) = (x(t), y(t))$ のように書く)
  ($c(t) \in \mathbb{R}^2$. よって $\vec{c}(t)$ と書いても良いが, 今回は略記)

注

- 上の平面曲線は, 高校の言葉でいうと「媒介変数表示」.
- 写像 c の定義域は $\mathbb{R}$ の部分集合でも良い (が, 話を簡単にするために $\mathbb{R}$ にしておく).

例 (半径 r の円)

- $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$ は平面曲線 (ただし $r > 0$).

曲線 - (2/6)

例 (続き)

半径 r (> 0) の円には, 以下の表示がある:

- $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$ (前述).
- $c(t) = (r\cos(at), r\sin(at))$ (ただし $a \neq 0$).
- 円の上半分なら, $c(t) = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$ (ただし $-r < t < r$).

注

- 同じ曲線が, 違う $c(t)$ によって表されることもある.

例 (グラフ)

- $y = f(x)$ のグラフは平面曲線 ($c(t) = (t, f(t))$ とかける).

曲線 - (3/6)

約束

- $c(t) = (x(t), y(t))$ に対して, $c'(t) := (x'(t), y'(t))$.

定義

- 平面曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ が なめらか
  $:\Leftrightarrow$ (i) $c(t)$ は何回でも微分可能;
  (ii) 全ての t に対して $c'(t) \neq (0, 0)$.

例 (半径 r の円)

- $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$ はなめらかな平面曲線.
  $(\because)$ $c'(t) = r(-\sin t, \cos t) \neq (0, 0)$. $\square$

曲線 - (4/6)

なめらかでない例 (1)

- $c(t) = (t, |t|)$ (つまり $y = |x|$ のグラフ) はなめらかでない.

なめらかでない例 (2)

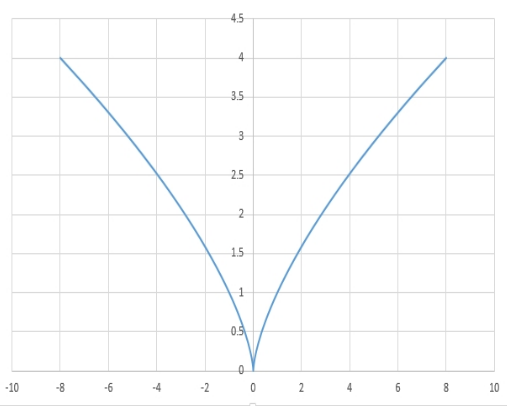
- $c(t) = (0, 0)$ (動かない) はなめらかでない.

なめらかでない例 (3)

- $c(t) = (t^3, t^2)$ はなめらかでない. ($\rightarrow$ 次頁)

曲線 - (5/6)

$c(t) = (t^3, t^2)$ の概形 ($y = x^{2/3}$ のグラフ)



曲線 - (6/6)

復習

- 平面曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ が **なめらか**
  :⇔ (i) $c(t)$ は何回でも微分可能;
  (ii) 全ての t に対して $c'(t) \neq (0, 0)$.

補足 (車の運転に例えると)

- (i) ⇔ スピンターンしない;
- (ii) ⇔ 止まらない.

曲率 - (1/9)

定義

- なめらかな曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ に対し, 次を **曲率** という:

$$\kappa(t) := \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{|c'(t)|^3}.$$

本章の目標

- 注: $\kappa(t) \in \mathbb{R}$.
- $\kappa(t)$ が ($c(t)$ における) 曲がり具合を表してることを説明.

曲率 - (2/9)

「曲率 $=$ 曲がり具合」の証拠 (1)

- 具体例で，それっぽいことを確かめる．

例 (直線)

- $c(t) = (a_0, b_0) + t(a_1, b_1)$ (直線) について，$\kappa(t) = 0$.

($\because$) $c(t)$ は一次式なので

$$c''(t) = (x''(t), y''(t)) = (0, 0).$$

これを曲率の定義式に代入すると，

$$\kappa = (x'y'' - x''y')/|c'| = 0. \qquad \square$$

曲率 - (3/9)

例 (半径 r の円)

- $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$ (ただし $r > 0$) とすると, $\kappa(t) = 1/r$.

($\because$) 微分を計算すると,

$$c'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-r\sin t, r\cos t),$$
$$c''(t) = (x''(t), y''(t)) = (-r\cos t, -r\sin t).$$

したがって,

$$|c'(t)| = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} = r,$$
$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = \cdots = r^2.$$

これらを曲率の定義式に代入すると,

$$\kappa(t) = (x'y'' - x''y')/|c'| = 1/r. \qquad \square$$

曲率 - (4/9)

- 「曲率 ＝ 曲がり具合」の証拠 (1) の他の例.

練習問題

- $c(t) = (t, t^2)$ は放物線 $(y = x^2)$ を表す. この曲線の曲率は頂点で最大になることを確かめよ.

練習問題

- $c(t) = (a\cos t, b\sin t)$ (ただし $a > b > 0$) は楕円を表す. この曲線の曲率が最大になる点と最小になる点を求めよ.

曲率 - (5/9)

「曲率 ＝ 曲がり具合」の証拠 (2)

- 速さ 1 で走ったときの加速度を表している.

定義

- なめらかな平面曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ が 速さ 1
  $:\Leftrightarrow$ 全ての t に対して $|c'(t)| = 1$.

注

- 速さ 1 のとき, $\kappa = x'y'' - x''y'$.

曲率 - (6/9)

命題

- なめらかな平面曲線は, 速さ 1 となる表示 $c(t)$ をもつ.

例

- 半径 $r > 0$ の円のとき, 次が速さ 1 の表示:

$$c(t) = \left(r\cos\left(\frac{t}{r}\right), r\sin\left(\frac{t}{r}\right) \right).$$

曲率 - (7/9)

命題 (曲率 = 速さ 1 で走ったときの加速度)

- なめらかな曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ が速さ 1
  $\Longrightarrow$ 全ての t に対して $|\kappa(t)| = |c''(t)|$.

(∵) 速さ 1 なので,

$$(x')^2 + (y')^2 = 1.$$

両辺を微分すると,

$$2x'x'' + 2y'y'' = 0.$$

これを曲率の定義に代入すると,

$$-y'\kappa = -y'(x'y'' - x''y') = x'(x'x'') + x''(y')^2 = x'',$$
$$x'\kappa = x'(x'y'' - x''y') = (x')^2y'' + (y'y'')y' = y''.$$

すなわち $c'' = \kappa(-y', x')$. 両辺の長さを取ればよい. $\square$

曲率 - (8/9)

復習

- 半径 R (> 0) の円の曲率は $1/R$.
- つまり, 曲率 κ なら, 半径 $1/\kappa$ の円と同じだけ曲がっている.

余談

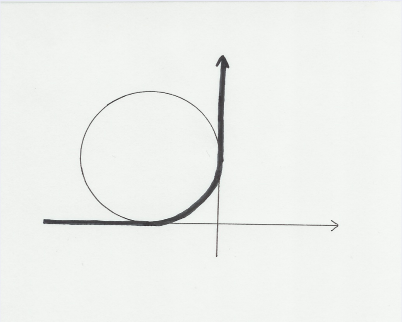
- 実際の道路の曲がり具合を表すために, 「半径 R の円と同じだけ曲がっている」という表し方をしている.

曲率 - (9/9)

高速道路の形 - (1/9)

問題

次のような, 直線と円を繋いだ道路は運転しやすいか？



高速道路の形 - (2/9)

考察

曲率 κ の道路を走るには:

- $\kappa = 0 \Leftrightarrow$ ハンドルは真っすぐ.
- $|\kappa|$ が大きい $\Leftrightarrow$ カーブがきつい $\Leftrightarrow$ ハンドルを大きく切る.
- $|\kappa|$ が小さい $\Leftrightarrow$ カーブが緩やか $\Leftrightarrow$ ハンドルを小さく切る.

結論

- 道路の曲率が急激に変化する
  $\Rightarrow$ 急ハンドルを切らなくてはいけない
  $\Rightarrow$ 危険で運転しにくい.
- よって, 直線と円を繋いだ道路は, 急ハンドルが必要で危険.

高速道路の形 - (3/9)

ではどういう道路が良い？

- ハンドルを一定の速さで切れば良いような道路.
  (これなら急ハンドルは不要)
- すなわち, 曲率が一定の速さで変化するような道路.
- すなわち, 曲率が $k(t) = at$ (a は定数) となる曲線が良い.

ということで数学の問題になった

- a を定数とする.
- 曲率が $k(t) = at$ をみたす曲線を描け.

高速道路の形 - (4/9)

定理 (平面曲線の基本定理)

- $\kappa(t)$ を何回でも微分できる関数とすると，これを曲率とするようななめらかな平面曲線が (実質的に唯一つ) 存在する.

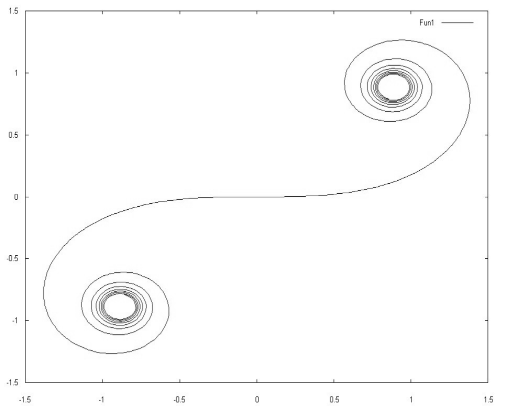
応用 (先の問への回答)

- $\kappa(t) = at$ となる曲線は唯一つ存在 (クロソイド曲線 という).
- この曲線が，実際に道路のカーブには使われている.
- 式で表示すると，

$$c(t) = \left(\int_0^t \cos(as^2/2)ds, \int_0^t \sin(as^2/2)ds \right)$$

高速道路の形 - (5/9)

クロソイド曲線の概形



高速道路の形 - (6/9)

実際の高速道路のジャンクション (再掲)

高速道路の形 - (7/9)

クロソイド曲線の雑学

- クローソー（ギリシャ神話の女神の名前）が由来.
- 殆ど全ての高速道路に利用されている.
  (ジャンクションだけでなく, カーブでも, 一般道でも)

余談 (国土交通省の HP より)

- 日本初のクロソイド曲線道路は, 昭和 27 年 (1952 年).
- 場所は三国峠.
- 以前の道路は, 直線と円の組み合わせで, 非常に事故が多かった.
- クロソイド曲線に変えてから, 事故が激減した (らしい).

高速道路の形 - (8/9)

- 鉄道の線路にも，クロソイド曲線が使われている.

高速道路の形 - (9/9)

その他の例

- ジェットコースターにも, クロソイド曲線が使われている.

さらにあるか?

- 陸上競技のトラックは, クロソイド曲線ではないらしい.
  (描くのが難しい?)
- 競輪のトラックは, クロソイドもあったが, 今は違うらしい.

あとがき

本日の内容

- 曲線の曲率の話．高速道路の形.

大学で学ぶ数学について...

- 今日の話は (大学の数学では) 非常に具体的な内容.
- このくらいまでいくと, 実生活への応用もある.
- 様々な応用のためには, もっと高度で抽象的な数学が必要...
- 例えば, 曲面は $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を使って表せる．その曲がり具合を調べるためには, (少なくとも) 多変数の微分積分は必須.