1 数学通論 I (2018/04/09): ガイダンス

1.1 概要説明

集合の上に “距離” が与えられたものを距離空間と呼びます. 例えば実数 $\mathbb{R}$ やユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ には, 自然に距離が定義され, 距離空間となります. この講義では, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ と順を追って解説し, 最終的には一般の距離空間を扱います.

1.2 重要な要請

数学通論では, 「論理記号の使い方」や「証明の書き方」が極めて大切です. これらは, 数学の全ての分野・科目を学ぶための基礎となります. 論理記号の使い方や証明の書き方に慣れるために, この講義・演習は以下のように行います:

(1) 講義で証明を書く際には, 「示すこと」を論理記号で最初に宣言します. また証明は, 宣言した「示すこと」に忠実に従って書くようにします.

(2) 演習や小テストや試験では, 講義でやっている証明の書き方をまずは真似して下さい. (田丸の書き方が唯一の正解という訳ではありませんが, 書道のお手本程度に考えて下さい.)

(3) 小テストの答案は, 授業時間中にその場で採点し, コメントを伝えます. 正しく書けていない場合は, コメントを参考に再提出して下さい. なお, 答案は返却しません.

(4) 演習で発表する際は, その場で黒板に書きながら説明をして下さい. 授業をするような気持ちで. また, 他の人の発表へのコメントも歓迎します.

1.3 成績および単位

基本的には, 講義内容を理解して証明を正しく書けることが, 単位取得のための必要十分条件です. それを確認するために, 以下のような基準を適用します:

(1) 講義と演習共通で, 中間試験と期末試験を行います. その点数に, 演習での発表回数と小テストの成績を加味して, 合否を判定し, 成績を付けます.

(2) 演習では, 発表しないと自動的に不合格という制約は今回は設けません. しかし, 発表しない場合には著しく不利になる, という程度に発表点はかなり高めに設定します.

(3) 中間試験と期末試験の前に, 試験前事前レポートを出題します. このレポートの点数は, 合否のボーダーライン付近の学生に加点します. 詳細は後日にお知らせします.

(4) なお, 講義と演習の合否は連動します.

2　数学通論 I (2018/04/09): $\mathbb{R}$ 内の開集合

2.1　記号の復習

この講義を通して, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す.

定義 2.1. $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, 以下のように定義する:

(1) $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (これを <u>開区間</u> と呼ぶ).

(2) $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (これを <u>閉区間</u> と呼ぶ).

また, $(a,b]$, $[a,b)$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $\ldots$ なども同様に定義する.

定義 2.2. A, B を集合とする. A は B の <u>部分集合</u> である ($A \subset B$) とは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A,\ x \in B$.

2.2　内点と内部

定義 2.3. $A \subset \mathbb{R}$ とする.

(1) x $(\in \mathbb{R})$ が A の <u>内点</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.

(2) $A^\circ := \{x \in \mathbb{R} \mid x$ は A の内点 $\}$ を A の <u>内部</u> と呼ぶ.

例 2.4. $[0,2) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $1 \in [0,2)^\circ$.

(2) $0 \notin [0,2)^\circ$.

(3) $(0,2) \subset [0,2)^\circ$.

問題 2.5 (小テスト問題 (1))**.** $A := [1,+\infty)$ とする. 次を定義に従って示せ: $(1,+\infty) \subset A^\circ$.

命題 2.6. $A \subset \mathbb{R}$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.

(2) $(a,b) \subset A$ ならば $(a,b) \subset A^\circ$.

(3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

例 2.7. 内部について, 以下が成り立つ:

(1) $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$, $\emptyset^\circ = \emptyset$.

(2) $(a,b)^\circ = [a,b]^\circ = [a,b)^\circ = (a,b]^\circ = (a,b)$.

(3) $(a,+\infty)^\circ = [a,+\infty)^\circ = (a,+\infty)$.

(4) $(-\infty,b)^\circ = (-\infty,b]^\circ = (-\infty,b)$.

2.3　開集合

定義 2.8. $A\ (\subset \mathbb{R})$ が <u>開集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.

問題 2.9 (小テスト問題 (2))**.** O_1, O_2 を $\mathbb{R}$ 内の開集合とする．このとき $O_1 \cap O_2$ も $\mathbb{R}$ 内の開集合であることを, 定義に従って示せ.

命題 2.10. $A\ (\subset \mathbb{R})$ が開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $A = A^\circ$.

例 2.11. 以下は開集合: $\mathbb{R}$, $\emptyset$, (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, ...

定理 2.12. $\mathbb{R}$ の開集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}$ は開集合.

(2) $O_i\ (i = 1,\ldots,n)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ も開集合.

(3) $O_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ も開集合.

すなわち, 有限個の開集合の共通部分は開集合であり, 開集合の和集合は (有限個でも無限個でも) 開集合である.

例 2.13. $A_n := (-1, \dfrac{1}{n})$ とすると, 次が成り立つ: $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = (-1, 0]$. すなわち, 無限個の開集合の共通部分は, 開集合になるとは限らない.

2.4　演習問題

問題 2.14. 以下の集合の内部が何になるかを予想し, それを示せ (証明は省略しないこと．ただし, 命題 2.6 の結果は用いて良い):

(1) $(-\infty, 0]$.

(2) $\{1\}$ (一点集合).

問題 2.15. $A, B \subset \mathbb{R}$ とする．以下のそれぞれの主張に対して, 正しい場合には証明し, 正しくない場合は反例を挙げよ (例 2.7 の結果を用いても良い):

(1) $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$.

(2) $A^\circ \cap B^\circ \supset (A \cap B)^\circ$.

(3) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.

(4) $A^\circ \cup B^\circ \supset (A \cup B)^\circ$.

3　数学通論 I (2018/04/12): $\mathbb{R}$ 内の閉集合

3.1　触点と閉包

定義 3.1. $A \subset \mathbb{R}$ とする.

(1) x $(\in \mathbb{R})$ が A の <u>触点</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(2) $\overline{A} := \{x \in \mathbb{R} \mid x$ は A の触点 $\}$ を A の <u>閉包</u> と呼ぶ.

例 3.2. 次が成り立つ:

(1) $1 \in \overline{[0,1)}$.

(2) $2 \notin \overline{[0,1)}$.

命題 3.3. $A \subset \mathbb{R}$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) O を $\mathbb{R}$ 内の開集合とするとき, $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $O \cap A \neq \emptyset$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

例 3.4. 閉包について, 次が成り立つ:

(1) $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(2) $\overline{(a,b)} = \overline{[a,b]} = \overline{[a,b)} = \overline{(a,b]} = [a,b]$.

(3) $\overline{(a,+\infty)} = \overline{[a,+\infty)} = [a,+\infty)$.

(4) $\overline{(-\infty,b)} = \overline{(-\infty,b]} = (-\infty,b]$.

問題 3.5 (小テスト問題 (3))**.** 数列 $\{a_n\}$ が A に含まれ, a に収束するとき, 次が成り立つことを示せ: $a \in \overline{A}$.

例 3.6. 閉包について, 以下が成り立つ: $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

3.2　閉集合の定義

定義 3.7. A $(\subset \mathbb{R})$ が <u>閉集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\overline{A} = A$.

例 3.8. 以下は閉集合: $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, 有限集合, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

ここで, 「閉集合である」ことと「開集合でない」ことは, 全く意味が異なることに注意する. 例えば $\emptyset$, $\mathbb{R}$ は開集合かつ閉集合である. また, $(a,b]$ は開集合でも閉集合でもない.

3.3 閉集合の性質

命題 3.9. 次が成り立つ: $\mathbb{R} - \overline{A} = (\mathbb{R} - A)^{\circ}$.

ここで $X - Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$. これを差集合という. 差集合は $X \setminus Y$ と表記することもある. 全集合からの差集合 $\mathbb{R} - A$ を補集合と呼び, A^c と表すこともある.

定理 3.10. A が閉集合であるための必要十分条件は, $\mathbb{R} - A$ が開集合となること.

定理 3.11. $\mathbb{R}$ の閉集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}$ は閉集合.

(2) F_i $(i = 1, \ldots, n)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ も閉集合.

(3) F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

3.4 演習問題

問題 3.12. A $(\subset \mathbb{R})$ は有限集合ならば閉集合であることを示せ. (命題 3.3 (1) は用いて良い.)

問題 3.13. 無限個の閉集合の和集合は, 閉集合になるとは限らない. 反例を挙げよ. (与えた集合が閉集合であるかないかは, 分かっているとして良い. ただし, 和集合がどうなるかについては, 証明を与えよ.)

問題 3.14. $A, B \subset \mathbb{R}$ とする. 以下のそれぞれの主張に対して, 正しい場合には証明し, 正しくない場合は反例を挙げよ:

(1) $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

(2) $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$.

(3) $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

(4) $\overline{A} \cup \overline{B} \supset \overline{A \cup B}$.

問題 3.15. $A \subset \mathbb{R}$ とし, m が A の上限であるとする. このとき $m \in \overline{A}$ を定義に従って示せ. ただしここで, 実数 m が A の上限であるとは, 次が成り立つこと:

(i) $\forall a \in A$, $a \leq m$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A : m - \varepsilon < a$.

4 数学通論 I (2018/04/19): $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合

4.1 コンパクト集合の定義

以下では $A \subset \mathbb{R}$ とする.

定義 4.1. $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \subset \mathbb{R} \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合族とする. $\mathfrak{U}$ が A の <u>開被覆</u> (<u>**open cover**</u>) とは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, U_λ は開集合,

(ii) $A \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

例 **4.2.** 以下は $(0,2)$ の開被覆:

(1) $\{(-1,1), (0,1), (0,3)\}$.

(2) $\{(1/n, 2) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(3) $\{\mathbb{R}\}$.

定義 4.3. A が <u>コンパクト</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: A の開被覆, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$: $A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$.

例 **4.4.** $\mathbb{R}$, $(0,2)$, $[0, +\infty)$ はコンパクトでない.

問題 4.5 (小テスト問題 (4))**.** $(0,2)$ が $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合でないことを示せ. (ヒント: 開被覆の取り方はいくらでもあるが, 例えば $\mathfrak{U} := \{U_n = (1/n, 2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ と取るとよい.)

次の命題の証明は複雑なので, 後でやる:

命題 4.6. 閉区間 $[a,b]$ はコンパクト.

4.2 コンパクト集合の性質

以下では $A, K \subset \mathbb{R}$ とする. コンパクト集合は K で表すことが多い.

定義 4.7. A が <u>有界</u> とは, 次が成り立つこと: $\exists a, b \in \mathbb{R}$: $A \subset [a,b]$.

以降では, コンパクト集合であることと有界閉集合であることが同値であることを示す.

命題 4.8. K を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合とする. このとき K は有界閉集合である.

有界であることの証明は容易. 閉集合であることを示すために, 補集合が開集合であることを示す. その際に以下を用いる.

補題 4.9. 以下が成り立つ:

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x \neq y),\ \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (y-\varepsilon, y+\varepsilon) = \emptyset$.

(2) $K \subset \mathbb{R}$ とし, 各 $x \in K$ に対して U_x を x を含む開集合とする. このとき次は K の開被覆: $\mathfrak{U} := \{U_x \mid x \in K\}$.

例 4.10. 以下はコンパクト集合ではない:

(1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $(0, +\infty)$, $[0, +\infty)$, $\ldots$

(2) (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $\ldots$

命題 4.11. コンパクト集合内の閉集合はコンパクト. すなわち, K を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合, F を $\mathbb{R}$ 内の閉集合とし, $F \subset K$ が成り立つとすると, F はコンパクト集合である.

定理 4.12. K がコンパクト集合であるための必要十分条件は, K が有界閉集合となること.

系 4.13. $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合は, 最大値と最小値をもつ.

4.3 演習問題

問題 4.14. $A\ (\subset \mathbb{R})$ が有界であることと, 次が同値であることを示せ: $\exists R > 0 : A \subset (-R, R)$.

問題 4.15. K_1, $K_2\ (\subset \mathbb{R})$ をコンパクト集合とすると, $K_1 \cup K_2$ もコンパクト集合である.

(1) 上の性質を, コンパクト集合の定義に従って示せ.

(2) 上の性質を, 有界閉集合の性質を調べることによって示せ. (定理 4.12 は用いて良い.)

問題 4.16. $\mathbb{R}$ 内の開集合は, 最大値をもたないことを示せ.

問題 4.17. $A := \{1, 2, 3\}$ (三点集合) がコンパクトであることを, 定義に従って示せ.

5　数学通論 I (2018/04/23): $\mathbb{R}$ 上の連続写像

ここでは, 写像 (関数) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が連続であることを定義し, その性質を調べる.

5.1　連続写像の定義

定義 5.1. 写像 $f:X\to Y$ を考える.

(1) $A\subset X$ に対して, 次を f による <u>像</u> と呼ぶ: $f(A):=\{f(a)\in Y\mid a\in A\}$.

(2) $B\subset Y$ に対して, 次を f による <u>逆像</u> と呼ぶ: $f^{-1}(B):=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$.

定義 5.2. $a\in\mathbb{R}$ とする. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が <u>a で連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0: f((a-\delta,a+\delta))\subset(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$.

注意 5.3. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が a で連続であることと次は同値: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0: |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

写像 f を「x を入力したら $f(x)$ が出力されるもの」だと思うと, 連続写像の条件は「入力の誤差を十分小さくすれば, 出力の誤差を十分小さくできる」と言うことができる. 条件の記号を用いると, δ が入力の誤差, ε が出力の誤差.

例 5.4. 次の写像は $x=0$ で連続: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto 2x$.

例 5.5. 次の写像は $x=0$ で連続でない:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases}0 & (x\leq 0),\\ 1 & (x>0).\end{cases}$$

定義 5.6. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が <u>連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a\in\mathbb{R}$, f は a で連続.

5.2　連続写像の性質

例 5.7. 以下の写像は連続である:

(1) 定値写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto c$. (ただし $c\in\mathbb{R}$ は定数.)

(2) 恒等写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x$.

命題 5.8 (復習)**.** 写像 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が点 a で連続であるとし, $c\in\mathbb{R}$ とする. このとき, 以下の写像も a で連続である:

(1) 関数の和 $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto f(x)+g(x)$.

(2) 関数の定数倍 $cf:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto cf(x)$.

(3) 関数の積 $fg:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto f(x)g(x)$.

以上のことを組み合わせると, 例えば多項式関数が連続であることが示される.

5.3　連続写像と開集合・閉集合

写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることと, 開集合の逆像が開集合となることが同値である. このように, 写像が連続であるための必要十分条件を, 開集合や閉集合を用いて表すことができる.

補題 5.9. 写像 $f : X \to Y$ および $A \subset X$, $B \subset Y$ を考える. このとき次が成り立つ: $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.

定理 5.10. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることと次は同値: $\forall O$: 開集合, $f^{-1}(O)$: 開集合.

問題 5.11 (小テスト問題 (5))**.** 例 5.5 の関数が連続でないことを, 上の定理を用いて示せ.

系 5.12. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とすると, $g \circ f$ も連続.

系 5.13. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることと次は同値: $\forall F$: 閉集合, $f^{-1}(F)$: 閉集合.

5.4　連続写像とコンパクト性

命題 5.14. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とし, K を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合とする. このとき $f(K)$ は ($\mathbb{R}$ 内の) コンパクト集合である.

系 5.15. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とし, K を $\mathbb{R}$ 内のコンパクト集合とする. このとき f は K 上で最大値と最小値をもつ.

5.5　演習問題

問題 5.16. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cx + d$ を考える. ただし $c > 0$ とする. このとき, f が連続であることを定義に従って示せ.

問題 5.17. 連続写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について, 以下の主張が正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ:

(1) 開集合の像は開集合である.
(2) 閉集合の像は閉集合である.
(3) 有界な集合の像は有界である.
(4) 有界な集合の逆像は有界である.
(5) コンパクト集合の逆像はコンパクト集合である.

6 数学通論 I (2018/04/26): $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離

$\mathbb{R}$ 内の開集合や閉集合を定義する際に, 開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ を用いた. $\mathbb{R}^n$ 内でこれに対応するものを定義するためには, $\mathbb{R}^n$ 上の (標準的な) 距離が必要となる.

6.1 $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離の定義

以下では, $x = (x_i) = (x_1, \ldots, x_n)$ のように $\mathbb{R}^n$ の元を表す.

定義 6.1. 次で定義される d を $\mathbb{R}^n$ 上の 標準的な距離 と呼ぶ:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

上記の標準的な距離は, $\mathbb{R}^n$ 上のノルムを使って表すこともできる. ここで, $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な内積やノルムは次で定義されていた:

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \quad ||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

命題 6.2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = ||x - y||$.

6.2 $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離の性質

全ての $t \in \mathbb{R}$ に対して $||at + b||^2 \geq 0$ が成り立つので, その判別式を考えると次が得られる.

補題 6.3 (Cauchy-Schwarz の不等式)**.** $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$, $|\langle a, b \rangle| \leq ||a|| \cdot ||b||$.

得られた不等式の両辺を二乗したものを成分で書くと,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right).$$

命題 6.4. $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な距離 d は次をみたす:

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) \geq 0$, かつ "$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$".
(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = d(y, x)$.
(3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$. (これを 三角不等式 と呼ぶ)

$n = 1$ のときの三角不等式の証明は容易. また $n \geq 2$ のときは, Cauchy-Schwarz の不等式および $n = 1$ のときの結果から従う. 方針: $a_i := |x_i - y_i|$, $b_i := |y_i - z_i|$ とおくと,

$$d(x, z)^2 = \sum (x_i - z_i)^2 \leq \sum (a_i + b_i)^2.$$

7　数学通論 I (2018/05/01): $\mathbb{R}^n$ 内の開集合

$\mathbb{R}^n$ 内の部分集合の内点や内部を定義し, 開集合を定義する. $\mathbb{R}$ 内の部分集合を扱った時には, 開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ を本質的に用いた. $\mathbb{R}^n$ の場合の議論は, それを ε-近傍 $U(x;\varepsilon)$ に置き換えたものである.

7.1　内点と内部

定義 7.1. $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ に対して, 次を a の **ε-近傍** と呼ぶ:

$$U(a;\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < \varepsilon\}.$$

特に $n=1$ のときの ε-近傍は $U(a;\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ に他ならない.

定義 7.2. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

(1) x $(\in \mathbb{R}^n)$ が A の **内点** であるとは, 次が成り立つこと: $\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.

(2) $A^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ は A の内点 $\}$ を A の **内部** と呼ぶ.

例 7.3. $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $(1,0) \in A^\circ$.

(2) $(2,0) \notin A^\circ$.

問題 7.4 (小テスト問題 (6))**.** $y \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ とする. このとき, 次が成り立つことを定義に従って示せ: $U(y;\delta) \subset U(y;\delta)^\circ$. (ヒント: 三角不等式)

命題 7.5. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.

(2) $U(x;\varepsilon) \subset A$ ならば $U(x;\varepsilon) \subset A^\circ$.

(3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

例 7.6. 内部について, 以下が成り立つ:

(1) $(\mathbb{R}^n)^\circ = \mathbb{R}^n$, $\emptyset^\circ = \emptyset$.

(2) $U(a;\varepsilon)^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) \leq \varepsilon\}^\circ = U(a;\varepsilon)$.

7.2　$\mathbb{R}^n$ 内の開集合

定義 7.7. A $(\subset \mathbb{R}^n)$ が **開集合** であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.

命題 7.8. A $(\subset \mathbb{R}^n)$ が開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $A = A^\circ$.

例 7.9. 以下は開集合: $U(a;\varepsilon)$, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$, ...

定理 7.10. $\mathbb{R}^n$ の開集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ は開集合.

(2) O_i $(i=1,\ldots,m)$ が開集合ならば, $\bigcap_{i=1}^{m} O_i$ も開集合.

(3) O_λ $(\lambda\in\Lambda)$ が開集合ならば, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ も開集合.

7.3 演習問題

問題 7.11. 以下の集合の内部が何になるかを予想し, それを示せ (証明は省略しないこと. ただし, 命題 7.5 の結果は用いて良い):

(1) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y>0\}$.

(2) $\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in(-\infty,0]\}$.

問題 7.12 (定理 7.10 (3))**.** O_λ $(\lambda\in\Lambda)$ が $\mathbb{R}^n$ 内の開集合であるとする. このとき, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ も $\mathbb{R}^n$ 内の開集合であることを示せ.

問題 7.13. $X,Y\subset\mathbb{R}$ に対して, 次のように定義する:

$$X\times Y := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in X,\ y\in Y\}.$$

また, $A,B\subset\mathbb{R}$ とする. このとき, 以下のそれぞれの主張に対して, 正しい場合には証明し, 正しくない場合は反例を挙げよ:

(1) $A^\circ\times B^\circ\subset(A\times B)^\circ$.

(2) $A^\circ\times B^\circ\supset(A\times B)^\circ$.

7.4 中間試験事前救済レポート

問題 7.14 (事前レポート問題, 2018/05/07 締切, 提出任意)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する中間試験問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け. ただし, レポートの一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと. 表紙を付けてはならない.

(1) 開集合. (2) 閉集合. (3) コンパクト集合. (4) 連続写像.

8 数学通論 I (2018/05/07): $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合

8.1 触点と閉包

定義 8.1. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

(1) x $(\in \mathbb{R}^n)$ が A の <u>触点</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0, U(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(2) $\overline{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ は A の触点 $\}$ を A の <u>閉包</u> と呼ぶ.

例 8.2. $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ について, 以下が成り立つ:

(1) $(0,0) \in \overline{A}$.

(2) $(0,-1) \notin \overline{A}$.

命題 8.3. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) O $(\subset \mathbb{R}^n)$ が開集合, $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $O \cap A \neq \emptyset$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

例 8.4. 閉包について, 次が成り立つ:

(1) $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(2) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ とすると, $\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

(3) $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) \leq \varepsilon\}$ とすると, $\overline{U(a;\varepsilon)} = \overline{A} = A$.

上記の (3) の証明において, $\overline{U(a;\varepsilon)} \subset A$ を示すときには, 補集合を考えると便利である. また, $A \subset \overline{U(a;\varepsilon)}$ を示すときには, 任意の $x \in A$ を取り, a と x を適当に内分する点を考えると良い.

8.2 閉集合の定義と性質

定義 8.5. A $(\subset \mathbb{R}^n)$ が <u>閉集合</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\overline{A} = A$.

命題 8.6. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 次が成り立つ: $\mathbb{R}^n - \overline{A} = (\mathbb{R}^n - A)^\circ$.

定理 8.7. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする. このとき, A が閉集合であるための必要十分条件は, $\mathbb{R}^n - A$ が開集合となること.

定理 8.8. $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset, \mathbb{R}^n$ は閉集合.

(2) F_i $(i = 1, \ldots, m)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ も閉集合.

(3) F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

8.3 演習問題

問題 8.9. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする．このとき, 以下を示せ:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (命題 8.3 (2) を用いて良い).

問題 8.10. $A \subset \mathbb{R}^n$ とする．このとき, 以下を示せ:

(1) $\mathbb{R}^n - \overline{A} = (\mathbb{R}^n - A)^\circ$.

(2) $\overline{\mathbb{R}^n - A} = \mathbb{R}^n - A^\circ$.

問題 8.11. $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合に対して, 定理 7.10, 8.7 を用いて, 以下を示せ:

(1) F_i $(i = 1, \ldots, m)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ も閉集合.

(2) F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

問題 8.12. $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ とする．このとき, 次を示せ: $\overline{A} \subset \overline{B}$.

9　数学通論 I (2018/05/10): $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合

9.1　コンパクト集合の定義

定義 9.1. $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \subset \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合族とする．$\mathfrak{U}$ が A $(\subset \mathbb{R}^n)$ の 開被覆 (**open cover**) であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, U_λ は開集合,

(ii) $A \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

定義 9.2. A $(\subset \mathbb{R}^n)$ が コンパクト であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: A の開被覆, $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Lambda$: $A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$.

上記の定義において, $\mathbb{R}$ の時は有限開被覆の個数 k を主張に入れていなかったが, 正確を期するために今回は入れておく．実質的な意味は同じ.

9.2　コンパクト集合の性質

ここでは $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合が, 有界閉集合と同等であることを示す．閉集合はすでに定義されている．有界集合は次のように定義する.

定義 9.3. A $(\subset \mathbb{R}^n)$ が 有界 であるとは, 次が成り立つこと: $\exists a \in \mathbb{R}^n$, $\exists R > 0$: $A \subset U(a; R)$.

ちなみに A が有界であることは次と同値: $\exists R > 0$: $A \subset U(0; R)$.

命題 9.4. K を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合とする．このとき K は有界閉集合である.

有界であることの証明は容易 (演習). 閉集合であることを示すためには, 補集合が開集合であることを示せば良い．そのために次の補題を用いる.

補題 9.5. 相異なる二点 $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し, 次が成り立つ: $\exists \varepsilon > 0$: $U(x; \varepsilon) \cap U(y; \varepsilon) = \emptyset$.

命題 9.6. 次の集合はコンパクト: $D := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \ (\forall i)\}$.

この命題の証明は省略する．閉区間がコンパクトであることを用いると示すことができるが, その手続きは後に (恐らくは数学通論 II で) 紹介されるはず.

命題 9.7. コンパクト集合内の閉集合はコンパクト．すなわち, K を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合, F を $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合とし, $F \subset K$ が成り立つとすると, F はコンパクト集合である.

定理 9.8. K $(\subset \mathbb{R}^n)$ がコンパクトであるための必要十分条件は, K が有界閉集合となること.

9.3　演習問題

問題 9.9. $A\ (\subset \mathbb{R}^n)$ が有界であるとする. このとき, 次を示せ: $\exists R > 0 : A \subset U(0; R)$. ただしここで, $U(0; R)$ の中の 0 は $\mathbb{R}^n$ の零ベクトルを表しているものとする.

問題 9.10. $x, y \in \mathbb{R}^n$ および $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に対し, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq d(x, y)$ が成り立っているとする. このとき $U(x; \varepsilon_1) \cap U(y; \varepsilon_2) = \emptyset$ を示せ.

問題 9.11. A を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合とする. このとき A は有界であることを示せ.

問題 9.12. K を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合, F を $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合とし, $F \subset K$ が成り立つとする. このとき, F はコンパクト集合であることを示せ.

問題 9.13. $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 2\}$ がコンパクトでないことを定義に従って示せ.

10　数学通論 I・同演習 (2018/05/14): 中間試験

注意

証明問題の解答を書くときには, 解答中に適宜「示すこと」を必ず書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

定義や用語

- x ($\in \mathbb{R}^n$) が A ($\subset \mathbb{R}^n$) の内点 $:\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$. (ここで $U(x;\varepsilon)$ は x の ε-近傍)
- x ($\in \mathbb{R}^n$) が A ($\subset \mathbb{R}^n$) の触点 $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $U(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
- 内部 A° とは, A の内点全体の集合. 閉包 $\overline{A}$ とは, A の触点全体の集合.
- A ($\subset \mathbb{R}^n$) が開 $:\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.
- $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が A の開被覆 $:\Leftrightarrow$ (i) 全ての U_λ は開, (ii) $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.
- A ($\subset \mathbb{R}$) がコンパクトとは, 任意の開被覆に対して, 有限部分被覆が存在すること.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が a ($\in \mathbb{R}$) で連続 $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 :$ $f((a-\delta, a+\delta)) \subset (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続 $:\Leftrightarrow$ f は任意の a ($\in \mathbb{R}$) で連続.

問題

[1] O_1, O_2 を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合とする. このとき $O_1 \cap O_2$ が $\mathbb{R}^n$ 内の開集合であるかどうかを予想し, それを定義に従って示せ. (20 点)

[2] $A, B \subset \mathbb{R}^n$ が $A \subset B$ をみたすとする. このとき $\overline{A} \subset \overline{B}$ が成り立つかどうかを予想し, それを定義に従って示せ. (20 点)

[3] $(-\infty, 1]$ がコンパクトであるかどうかを予想し, それを定義に従って示せ. (20 点)

[4] 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が次をみたすとする: $\mathbb{R}$ 内の任意の開集合の f による逆像が開集合である. このとき, f が連続であることを, 定義に従って示せ. (20 点)

[5] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ について, 以下に答えよ. ただし証明は不要.
(1)　像 $f((-1, 2))$ を求めよ. (10 点)
(2)　逆像 $f^{-1}((1, 4))$ を求めよ. (10 点)

[6] $A := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 2\}$ とおく. このとき $(1, 0) \in A^\circ$ であるかどうかを予想し, それを定義に従って示せ. (20 点)

[7] $\mathbb{R}$ 内の部分集合について, 最大値と最小値が存在してもコンパクトとは限らない. そのような例を挙げよ. ただし証明は不要. (10 点)

[8] 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.

11　数学通論 I (2018/05/17): $\mathbb{R}^n$ 上の連続写像

11.1　連続写像の定義

定義 11.1. $a \in \mathbb{R}^n$ とする. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が <u>点 a で連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $f(U(a;\delta)) \subset U(f(a);\varepsilon)$.

定義 11.2. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が <u>連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in \mathbb{R}^n$, f は a で連続.

例 11.3. 次の写像は連続: $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$.

11.2　連続写像の性質

定理 11.4. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O$: $\mathbb{R}^m$ 内の開集合, $f^{-1}(O)$: $\mathbb{R}^n$ 内の開集合.

問題 11.5 (小テスト問題 (7))**.** 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が次をみたすとする: $\forall O$: $\mathbb{R}^m$ 内の開集合, $f^{-1}(O)$: $\mathbb{R}^n$ 内の開集合. このとき, f が連続であることを定義に従って示せ.

系 11.6. 連続写像と連続写像の合成は連続. すなわち, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ を連続写像とすると, $g \circ f$ も連続.

系 11.7. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall F$: $\mathbb{R}^m$ 内の閉集合, $f^{-1}(F)$: $\mathbb{R}^n$ 内の閉集合.

系 11.8. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を連続写像とし, K を $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合とする. このとき $f(K)$ は $\mathbb{R}^m$ 内のコンパクト集合である.

11.3　連続写像の例

命題 11.9. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対し, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ と表す. このとき, f が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続.

この命題の証明のうち, ($\Rightarrow$) の証明は容易 (射影 π_i との合成). 逆の証明は, 多少面倒.

11.4　演習問題

問題 11.10. 系 11.6, 11.7, 11.8 を示せ.

問題 11.11. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$ が連続であることを示せ.

12　数学通論 I (2018/05/17): 距離空間の定義

12.1　距離空間の定義

定義 12.1. X を集合とする. 関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が 距離 または 距離関数 であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) \geq 0$ かつ "$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$".

(ii) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

条件 (iii) の不等式を 三角不等式, 集合 X と距離 d の組 (X, d) を 距離空間 と呼ぶ.

例 12.2. 以下は $\mathbb{R}^n$ 上の距離である:

(1) 標準的な距離 $d_{\mathrm{st}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

(2) $d_{\max} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, \ldots, n\}$.

命題 12.3. 任意の集合 X に対して, 次で定義される d_∞ は距離である (これを 離散距離 と呼ぶ):

$$d_\infty : X \times X \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & (\text{if } x = y), \\ 1 & (\text{if } x \neq y). \end{cases}$$

命題 12.4. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ とする. このとき $d_A := d|_{A \times A}$ は A 上の距離である (これを 部分距離 と呼ぶ).

12.2　演習問題

問題 12.5. 離散距離が三角不等式をみたすことを示せ.

問題 12.6. 次が $\mathbb{R}^n$ 上の距離であることを示せ (これを マンハッタン距離 と呼ぶ):

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

問題 12.7. 次が $\{0, 1\}^n$ 上の距離であることを示せ (これを ハミング距離 と呼ぶ):

$$d(x, y) := \#\{i \mid x_i \neq y_i\}.$$

13 数学通論 I (2018/05/21): 距離空間内の開集合

13.1 前回の補足

補題 13.1. $A \subset \mathbb{R}^m$ とする. このとき A が $\mathbb{R}^m$ 内の開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall x \in A$, $\exists O$ ($\mathbb{R}^m$ 内の開集合) : $x \in O \subset A$.

補題 13.2. O を $\mathbb{R}^2$ 内の開集合とし, $\pi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を自然な射影とする. このとき次が成り立つ: $\forall y \in O$, $\exists O_1, O_2$ ($\mathbb{R}$ 内の開集合) : $y \in (\pi_1^{-1}(O_1) \cap \pi_2^{-1}(O_2)) \subset O$.

問題 13.3. 適切に記号を設定した上で次を示せ: (1) 逆像の逆像は, 合成の逆像と等しい. (2) 共通部分の逆像は, 逆像の共通部分と等しい.

13.2 距離空間における ε-近傍

定義 13.4. $a \in X$, $\varepsilon > 0$ とする. このとき, 次を距離空間 (X, d) の a における <u>ε-近傍</u> と呼ぶ:

$$U(a;\varepsilon) := \{x \in X \mid d(x,a) < \varepsilon\}.$$

例 13.5. $\mathbb{R}^2$ 内の ε-近傍に対して, 以下が成り立つ:

(1) d_{st} に関する ε-近傍は, 円の内部の形をしている.

(2) $d_{\max}$ に関する ε-近傍は, 正方形の内部の形をしている.

(3) d_∞ に関する ε-近傍は, 一点集合または全体集合のいずれか.

上記の ε-近傍は (X, d) 内のものであることを強調して $U_X(a;\varepsilon)$ と書くこともある. 例えば $A \subset X$ に部分距離を入れた場合には, $U_A(a;\varepsilon)$ と $U_X(a;\varepsilon)$ は区別しておく必要がある.

命題 13.6. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ とし, d_A を部分距離とする. このとき, 次が成り立つ: $\forall a \in A$, $\forall \varepsilon > 0$, $U_A(a;\varepsilon) = U_X(a;\varepsilon) \cap A$.

13.3 距離空間における内点と内部

以下では特に断らない限り (X, d) を距離空間とする.

定義 13.7. $A \subset X$ とする.

(1) x $(\in X)$ が A の <u>内点</u> であるとは, 次が成り立つこと: $\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset A$.

(2) $A^\circ := \{x \in X \mid x$ は A の内点 $\}$ を A の <u>内部</u> と呼ぶ.

例 13.8. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. A の $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}})$ に関する内部を $(A^\circ)_{\mathrm{st}}$ とし, $(\mathbb{R}^2, d_{\max})$ に関する内部を $(A^\circ)_{\max}$ で表す. このとき次が成り立つ: $(A^\circ)_{\mathrm{st}} = (A^\circ)_{\max}$.

命題 13.9. $A \subset X$ とする. (X, d) に関する内部について以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.

(2) $U(x; \varepsilon) \subset A$ ならば $U(x; \varepsilon) \subset A^\circ$.

(3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

例 13.10. (X, d) に関する内部について, 以下が成り立つ:

(1) $X^\circ = X$, $\emptyset^\circ = \emptyset$.

(2) $U(a; \varepsilon)^\circ = U(a; \varepsilon)$.

例 13.11. 離散距離空間 (X, d_∞) に関する内部について, 以下が成り立つ: $\forall A \subset X$, $A^\circ = A$.

13.4 距離空間における開集合

以下でも特に断らない限り (X, d) を距離空間とする.

定義 13.12. $A\ (\subset X)$ が 開集合 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \subset A$.

命題 13.13. $A\ (\subset X)$ が開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $A = A^\circ$.

定理 13.14. (X, d) の開集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, X は開集合.

(2) $O_i\ (i = 1, \ldots, n)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ も開集合.

(3) $O_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ も開集合.

命題 13.15. $A \subset X$ とし, d_A を A 上の部分距離とする. このとき, U が (A, d_A) の開集合であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\exists O : (X, d)$ の開集合 s.t. $U = O \cap A$.

例 13.16. $A := [0, 2)$ とし, d_A を $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ から決まる部分距離とする. このとき $[0, 1)$ は (A, d_A) 内の開集合である.

問題 13.17 (小テスト問題 (8))**.** 命題 13.15 を用いて例 13.16 を示せ.

13.5 演習問題

問題 13.18. 命題 13.9 (1), (2), (3), 定理 13.14 (2), (3) を示せ.

問題 13.19. 命題 13.15 の条件が必要条件であることを示せ.

14　数学通論 I (2018/05/21): 距離空間内の閉集合

以下 (X,d) を距離空間とする.

14.1　距離空間における触点と閉包

定義 14.1. $A \subset X$ とする.

(1) $x\ (\in X)$ が A の 触点 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0,\ U(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(2) $\overline{A} := \{x \in X \mid x$ は A の触点 $\}$ を A の 閉包 と呼ぶ.

命題 14.2. $A \subset X$ とする. 次が成り立つ:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) $O\ (\subset X)$ が開集合, $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ならば $O \cap A \neq \emptyset$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

例 14.3. 閉包について, 次が成り立つ:

(1) $\overline{X} = X,\ \ \overline{\emptyset} = \emptyset$.

(2) $A \subset X$ とする. 離散距離空間 (X, d_∞) に関して, $\overline{A} = A$.

14.2　距離空間における閉集合

定義 14.4. A が (X,d) 内の 閉集合 であるとは, 次が成り立つこと: $\overline{A} \subset A$.

命題 14.5. 次が成り立つ: $X - \overline{A} = (X - A)^\circ$.

定理 14.6. A が閉集合であるための必要十分条件は, $X - A$ が開集合となること.

定理 14.7. (X,d) 内の閉集合に対して, 以下が成り立つ:

(1) $\emptyset$, X は閉集合.

(2) $F_i\ (i = 1, \ldots, n)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ も閉集合.

(3) $F_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ も閉集合.

例 14.8. $A := [0,2)$ とし, d_A を $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ から決まる部分距離とする. このとき $[1,2)$ は (A, d_A) 内の閉集合である.

15　数学通論 I (2018/05/24): 距離空間内のコンパクト集合

以下 (X, d) を距離空間とし, $A \subset X$ とする.

15.1　定義と例

定義 15.1. $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を X の部分集合族とする. $\mathfrak{U}$ が A の 開被覆 (**open cover**) であるとは, 以下が成り立つこと:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda$, U_λ は開集合,

(ii) $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

定義 15.2. A が (X, d) 内の コンパクト部分集合 であるとは, 次が成り立つこと:

$\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: A の開被覆, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$: $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$.

例 15.3. $A := [0, 1]$ に対して以下が成り立つ:

(1) A は $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}})$ 内のコンパクト部分集合.

(2) A は $(\mathbb{R}, d_\infty)$ 内のコンパクト部分集合ではない.

定義 15.4. (X, d) が コンパクト距離空間 であるとは, 次が成り立つこと: X が (X, d) 内のコンパクト部分集合である.

問題 15.5 (小テスト問題 (9))**.** (X, d) を距離空間とし, A を X 内の有限部分集合とする. このとき A はコンパクト部分集合であることを示せ.

15.2　性質

命題 15.6. A が (X, d) 内のコンパクト部分集合であることと, 次は同値: 部分距離を入れた距離空間 (A, d_A) がコンパクト距離空間である.

すなわち, コンパクトという性質は, 外の空間への入り方には依存しない.

定義 15.7. A が 有界 であるとは, 次が成り立つこと: $\exists a \in A$, $\exists R > 0$: $A \subset U(a; R)$.

命題 15.8. A を (X, d) 内のコンパクト部分集合とする. このとき A は有界閉集合である.

命題 15.9. コンパクト集合内の閉集合はコンパクト.

ちなみに一般の距離空間においては, 「有界閉集合ならばコンパクト」という命題は成立しない. 例えば $A := [0, 2)$ とすると, A は A 内の有界閉集合だがコンパクトではない.

15.3　演習問題 (閉集合)

問題 15.10. 命題 14.2 (1), (2), (3), 命題 14.5, 定理 14.7 (2), (3) を示せ.

問題 15.11. (X, d) を距離空間とし, A を X 内の有限部分集合とする. このとき A は X 内の閉集合であることを定義に従って示せ.

15.4　期末試験事前レポート問題

問題 15.12 (事前レポート問題, 2018/05/28 締切, 提出任意)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する期末試験問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け. ただし, レポートの一枚目に全ての問題を書き, 二枚目以降に解答を書くこと. 表紙を付けてはならない.

(1) 開集合. (2) 閉集合. (3) コンパクト集合. (4) 連続写像.

15.5　演習問題 (コンパクト集合)

問題 15.13. $(\mathbb{R}, d_\infty)$ に関して, $\mathbb{R}$ が有界であることと, コンパクトでないことを示せ.

問題 15.14. 命題 15.6 の $(\Rightarrow)$, 命題 15.8, 15.9 を示せ.

問題 15.15. (X, d) を距離空間とし, A を X 内の有限部分集合とする. このとき A は有界であることを定義に従って示せ.

16 数学通論 I (2018/05/28): 距離空間上の連続写像

以下 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする.

16.1 定義と例

定義 16.1. $a \in X$ とする. 写像 $f : X \to Y$ が <u>点 a で連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $f(U_X(a; \delta)) \subset U_Y(f(a); \varepsilon)$.

定義 16.2. 写像 $f : X \to Y$ が <u>連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in X$, f は a で連続.

例 16.3. 次は連続写像:

(1) 定値写像, すなわち $y_0 \in Y$ に対して次で決まる写像: $f : X \to Y : x \mapsto y_0$.
(2) X に離散距離 d_∞ を入れたとき, 任意の写像 $f : X \to Y$.

16.2 性質

定理 16.4. 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O$: (Y, d_Y) の開集合, $f^{-1}(O)$: (X, d_X) の開集合.

命題 16.5. 連続写像と連続写像の合成は連続.

命題 16.6. 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall F$: (Y, d_Y) の閉集合, $f^{-1}(F)$: (X, d_X) の閉集合.

命題 16.7. $f : X \to Y$ を連続写像とし, K を (X, d_X) のコンパクト部分集合とする. このとき $f(K)$ は (Y, d_Y) のコンパクト部分集合である.

命題 16.8. 連続写像の制限は連続. すなわち, $f : X \to Y$ を連続写像とし, A を X の部分集合とすると, 制限写像 $f|_A : A \to Y$ は部分距離 d_A に関して連続.

16.3 同相写像

定義 16.9. 写像 $f : X \to Y$ が <u>同相写像</u> とは以下が成り立つこと:

(i) f : 全単射.
(ii) f : 連続.
(iii) f^{-1} : 連続.

例 16.10. 恒等写像を id で表す. このとき以下が成り立つ:

(1) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}^2, d_{\max})$ は同相写像.

(2) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}, d_{\infty})$ は同相写像でない.

16.4 演習問題

問題 16.11. 定理 16.4, 命題 16.5, 16.6, 16.7 を示せ.

問題 16.12. $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}, d_{\infty})$ が連続でないことを示せ.

問題 16.13. 距離空間 $(X.d_X)$, (Y, d_Y) に対して, $f : X \to Y$ が等長写像であるとは, 次が成り立つことと定義する: $\forall x_1, x_2 \in X$, $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$. 以下を示せ:

(1) 全ての等長写像は単射である.

(2) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}^2, d_{\max})$ は等長写像でない.