非コンパクト等質 Einstein 多様体について

田丸 博士
（広島大学大学院理学研究科）

2006/09/13 幾何学阿蘇研究集会

Introduction (1/3)

- 漠然とした問題：
  - 多様体は, いつ「良い」「構造」（e.g., リーマン計量）を持つか？
  - 「良い」「構造」を持つ多様体は, どれくらいあるか？

- 今回の話題：非コンパクト等質 Einstein 多様体
  - 非コンパクト等質空間 G/H は, いつ G-不変 Einstein 計量を持つ？
    （G, H の群論的性質と関係？）
  - 非コンパクト等質 Einstein 多様体 $(G/H, g)$ は, どれくらいあるか？
    （コンパクトの場合と違って, 連続的に存在）

- 今回の講演の目標：
  - 非コンパクト等質 Einstein 多様体の有名な例の紹介
  - 非コンパクト等質 Einstein 多様体の新しい構成法の紹介
  - 今後の問題と課題（moduli）

Introduction (2/3)

- **群論的性質との関連：**Einstein $\Rightarrow$ **可解？**
  - ○ Alekseevskii **予想「非コンパクト等質** Einstein $\Rightarrow$ **可解多様体？」**
    (i.e., **等長的かつ推移的に作用する可解群が存在)**
    (参考 ([Heintze 1974]): **等質**, **負曲率** $\Rightarrow$ **可解)**

- **簡単な例１**: **ユークリッド空間** $\mathbb{R}^n$ **は**, **非コンパクト等質** Einstein;

$$M(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n \supset S := \mathbb{R}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n \quad \text{：推移的}$$

- **簡単な例２**: **双曲平面** $\mathbb{R}H^2$ **は非コンパクト等質** Einstein;

$$SL_2(\mathbb{R}) \supset S := \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \curvearrowright \mathbb{R}H^2 \quad \text{：推移的}$$

Introduction (3/3)

- 本講演では, 単連結の場合のみを考える：
  - (S, g), ここで S は単連結可解群, g は左不変リーマン計量
  - 内積付き可解リー環 $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$ を考えれば良い
  - リー環 $\mathfrak{s}$ が可解 $:\Leftrightarrow \mathfrak{n} := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ が巾零

- 研究の手法など：
  - Ricci 曲率は（原理的には）リー環で計算できる
    （Ricci 曲率は, ad, ad^*, $\langle , \rangle$ を用いて表せる）
    （しかし, 正規直交基底に関して和を取ったりして, 式は複雑）
  - $\mathfrak{s}$ の代数構造が複雑（e.g., $\mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ の step 数が大きい）な場合,
    計算は難しい
  - 与えられた $\mathfrak{s}$ 上の Einstein 計量を見付けることは, 難しい

Known Examples（パターン１）

- 良い幾何を持つもの：
  - 非コンパクト型対称空間
  - 非コンパクト等質 Kähler-Einstein 多様体
  - 四元数 Kähler 可解多様体

- 非コンパクト型対称空間 (M, g) について：
  - 岩沢分解を通して可解群と同一視できる
    （$M = G/K \cong AN$）
    （$G = KAN$ は岩沢分解; K は極大コンパクト, A は可換, N は巾零）
  - 岩沢分解の例.

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n) + [\text{対角行列}] + [\text{上三角行列}]$$

  - 系. $\mathfrak{s} := [\text{対角行列}] + [\text{上三角行列}]$ は Einstein 計量を持つ

Known Examples（パターン２）(1/2)

- **良い巾零リー環** $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ **の "可解拡大"**
  - **可解拡大とは**, $\mathfrak{s} := \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ **（半直積）という操作**
  - Damek-Ricci space $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$

    := generalized Heisenberg **群の（所定の）** 1 **次元可解拡大**

    （$\mathfrak{s} = \mathbb{R}A + \mathfrak{n}$, **ここで** A **は** canonical **に定まる）**
  - generalized Heisenberg **リー環** $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ **とは**,

    Clifford **代数の表現から構成される** 2-step **巾零リー環**
  - **例. 古典的な** Heisenberg **リー環の場合**,

$$\mathfrak{n} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \to \quad \mathfrak{s} := \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix} + \mathfrak{n} \quad (\cong \mathbb{C}H^2)$$

Known Examples（パターン２）(2/2)

- 半単純リー環の gradation から得られる巾零リー環
  - 半単純リー環の分解 $\mathfrak{g} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$ が gradation $:\Leftrightarrow [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subset \mathfrak{g}_{k+l}$
  - $\mathfrak{n} := \sum_{k>0} \mathfrak{g}_k$ は巾零リー環
  - 例．行列のブロック分割から, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ の gradation が得られる, e.g.,

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 \\ \hline \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{g}_1 \\ \hline \mathfrak{g}_{-2} & \mathfrak{g}_{-1} & \mathfrak{g}_0 \end{array}\right]$$

  - 森邦彦 (2002, OJM)．古典型複素単純リー環 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の 2 階の gradation に対し, $\mathfrak{n} := \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} + \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$ は Einstein 可解拡大を持つ
  - T (2004)．全ての $\mathfrak{g}$ の 全ての 2 階と 3 階の gradation に対し, $\mathfrak{n}$ は Einstein 可解拡大を持つ

- パターン２が使えるのは, $\mathfrak{n}$ の step 数が小さいか, 次元が低い場合のみ...

New Method

- **部分多様体に着目：**
  - $(\mathfrak{s}, \langle , \rangle)$ **が** Einstein **のとき**, **部分環** $\mathfrak{s}' \subset \mathfrak{s}$ **が（誘導計量に関して）**
    $\mathrm{ric}^{\mathfrak{s}'} = \mathrm{ric}^{\mathfrak{s}}|_{\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}'}$ （Ricci-equivalent?）**を満たせば**, **自動的に** Einstein

- **主結果：**
  - **全ての半単純リー環の全ての** gradation $\mathfrak{g} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$ **に対し**,
    $\mathfrak{n} := \sum_{k>0} \mathfrak{g}_k$ **は** Einstein **可解拡大を持つ**

- **証明の方針：**
  - gradation **と適合する岩沢分解** $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \overline{\mathfrak{a}} + \overline{\mathfrak{n}}$ **を取る（**$\mathfrak{n} \subset \overline{\mathfrak{n}}$**）**
  - $\mathfrak{a} \subset \overline{\mathfrak{a}}$ **も上手く取る**
    （実はこれは, **放物型部分環** $\mathfrak{p} := \sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}_k$ **の** Langlands **分解）**
    （"generalized **岩沢分解**" **と呼ばれるものとも**, **大体一致）**
  - $\mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ **は**, **対称空間** $\overline{\mathfrak{a}} + \overline{\mathfrak{n}}$ **の** Ricci-equivalent **な部分環**

Comments

▼ 主結果に関して：

- $\mathfrak{s} \supset \mathfrak{s}'$ は, 全測地的ではない, むしろ全測地的部分多様体の補空間
- $\mathfrak{n}$ は任意の step 数を取りえる　(→代数構造が複雑)

  (ただし $\mathfrak{n}$ の step 数は, 対称空間の $\overline{\mathfrak{n}}$ の step 数より減る)
- 多くの例が構成された

  ($\overline{\mathfrak{a}} + \overline{\mathfrak{n}}$ には, 約 2^r 個の gradation, ここで $r := \dim \overline{\mathfrak{a}}$)

  (しかし, 離散的)

▼ 当然考えるべき問題：

- 各対称空間 $\overline{\mathfrak{a}} + \overline{\mathfrak{n}}$ の Ricci-equivalent な部分環はどのくらいある？
- Damek-Ricci space の Ricci-equivalent な部分環は？
- そのような部分環が連続的に存在する？ (→ moduli)
- 等質でない Ricci-equivalent 部分多様体は存在する？

Moduli

- Einstein 可解多様体の moduli は, 一般に次元が高い（と思われる）
  - $\{(\mathfrak{g}, \langle , \rangle) \mid \mathfrak{g}$ は n-dim リー環 $\}/\mathrm{isom}$
    $\cong \{\mu \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n \mid$ Jacobi 律 $\}/\mathrm{O}(n)$
    $\supset \{\mu \mid$ Jacobi 律, 可解, Einstein$\}/\mathrm{O}(n)$ ： moduli space
  - $\mathbb{R}H^n$, $\mathbb{C}H^n$ は孤立点 （代数構造が簡単すぎるから？）
  - $\mathbb{H}H^n$ $(n \geq 3)$ の近傍で, moduli の次元は正

- 関連した問題：
  - Ricci-equivalent な部分環は, 連続的に存在するか？
    (→ 変形の具体的な記述)
  - 変形できるための障害？
  - (可解) リー群上に左不変 Einstein 計量が存在するための障害？
    (位相的な障害は期待できない... 代数構造に付随した障害？)

まとめ

▼ 大きな問題:

○ 等質空間上の Einstein 計量の存在 ↔ 群論的な条件, 制約？

▼ 結果：

○ 対称空間（または半単純リー群）に上手く入ってるくらい良い可解群ならば, 左不変 Einstein 計量を持つ

○ 手法は, 部分多様体論　（Ricci-equivalent）

▼ 経験則：

○ 可解群は, いろいろと面白い例を供給する

（cf. また, Levi 分解より, 可解群を調べることは自然でもある）